

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Phương trình $\sin x = a$:

* Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.

* Nếu $|a| \leq 1$: Đặt $a = \sin \varphi$, phương trình có nghiệm:

$$x = \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{hoặc } x = \pi - \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ và $a = \sin \varphi$ thì nghiệm phương trình có thể được viết là:

$$x = \arcsina + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{hoặc } x = \pi - \arcsina + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \varphi + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{hoặc } x = 180^\circ - \varphi + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình $\cos x = a$:

* Nếu $|a| > 1$: Phương trình vô nghiệm.

* Nếu $|a| \leq 1$: Đặt $a = \cos \varphi$, phương trình có nghiệm:

$$x = \pm \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $0 \leq \varphi \leq \pi$ và $a = \cos \varphi$ thì nghiệm phương trình có thể được viết là:

$$x = \pm \arccosa + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \pm \varphi + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\tan x = a$: Đặt $a = \tan \varphi$, phương trình có nghiệm:

$$x = \varphi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ và $a = \tan \varphi$ thì nghiệm phương trình có thể được viết là:

$$x = \arctana + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \varphi + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\tan[f(x)] = \tan[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Phương trình $\cot x = a$: Đặt $a = \cot\varphi$, phương trình có nghiệm:

$$x = \varphi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $0 < \varphi < \pi$ và $a = \cot\varphi$ thì nghiệm phương trình có thể được viết là: $x = \operatorname{arccot} a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \varphi + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\cot[f(x)] = \cot[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \varphi + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\tan[f(x)] = \tan[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Phương trình $\cot x = a$: Đặt $a = \cot\varphi$, phương trình có nghiệm:

$$x = \varphi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $0 < \varphi < \pi$ và $a = \cot\varphi$ thì nghiệm phương trình có thể được viết là: $x = \operatorname{arccot} a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: * Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:

$$x = \varphi + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x , ta có:

$$\cot[f(x)] = \cot[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 1: Giải phương trình lượng giác cơ bản.

Phương pháp: Dùng công thức nghiệm tương ứng với mỗi phương trình.

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$;

b) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\tan(x + 60^\circ) = -\sqrt{3}$;

d) $\cot\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right) = \frac{1}{3}$.

Thí dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$;

c) $\cos(3x + 20^\circ) = \sin(40^\circ - x)$;

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$;

b) $\cos^2 3x = 1$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

d) $\sin x + \cos x = 1$

Thí dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\cos x \cdot \cos 3x = -\cos 5x \cdot \cos 7x$;

b) $\sin 3x \cdot \cos 7x = \sin 13x \cdot \cos 17x$;

c) $\cos 2x \cdot \cos 5x = \cos 7x$;

d) $\sin 4x \cdot \sin 3x = \cos x$.

Thí dụ 3: Giải các phương trình:

a) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0$;

b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

d) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\tan(x + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $\cot(4x + 2) = -\sqrt{3}$;

e) $\sin(2x - 10^\circ) = \frac{1}{2}$ với $-120^\circ < x < 90^\circ$;

f) $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$;

Bài 2: Giải các phương trình:

a) $\sin(2x - 3) = \sin(x + 1)$;

b) $\sin 3x = \cos 4x$;

c) $\tan(3x + 2) + \cot 2x = 0$;

d) $\sin 5x + \cos 4x = 0$;

e) $\sin(2x + 50^\circ) = \cos(x + 120^\circ)$;

f) $\tan 3x \cdot \tan x = 1$;

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3} - 2\sin 2x = 0;$

b) $2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0;$

c) $3\tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0;$

d) $4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 1;$

e) $2\sin x - \sqrt{2} \sin 2x = 0;$

f) $8\cos^3 x - 1 = 0;$

g) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2\cos x + \sqrt{2}) \tan 2x = 0;$

h) $(2\sin x + 1)^2 - (2\sin x + 1)(\sin x - \frac{3}{2}) = 0;$

i) $\tan 2x \cdot \sin x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3} \tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0.$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2(x - 30^\circ) - \sin^2(x - 30^\circ) = \sin(x + 60^\circ);$ b) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0;$

c) $\sin^4 x - \sin^4(x + \frac{\pi}{2}) = 4\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x;$

d) $\frac{\cos 2x}{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos 2x};$ e) $\sin^2\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$

f) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1;$

g) $\left(\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} + \cot 2x\right)(3\tan x - \sqrt{3}) = 0$

h) $\tan^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3;$

i) $\cos 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 3x = \sin 2x \cdot \sin x - \sin 3x \cdot \cos x.$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x + 24^\circ) + \sin(x + 144^\circ) = \cos 20^\circ;$

b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0;$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0;$

d) $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x;$

e) $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x;$

f) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x;$

g) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2;$

h) $\sin x \cdot \sin 4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3} \cos x \sin 4x.$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x \cdot \sin 5x = \sin 11x \cdot \sin 13x;$

b) $\sin 3x \cdot \cos 7x = \sin 11x \cdot \cos 15x;$

c) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \cos 4x;$

d) $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x;$

e) $\sin 4x \cdot \cos 3x = \sin x;$

f) $\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x.$

g) $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2};$

h) $4\cos x \sin^2 x = \cos x - \sin x;$

i) $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$