B – MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ TRONG GIẢI TOÁN

I – Chứng minh quan hệ chia hết:

Bài 1: Chứng minh $A = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \vdots 24$ với mọi $n \in N$

Giải:

Phân tích thành nhân tử $A = n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)$

Dùng pp nhẩm ngiệm để phân tích $n^3 + 6n^2 + 11n + 6$ thành nhân tử

$A = n(n + 1)(n^2 + 5n + 6)$

$= n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

Đây là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Trong 4 số nguyên liên tiếp n; n + 1; n + 2; n + 3 luôn có một số chia hết cho 2; một số chia hết cho 4 $\Rightarrow A \vdots 8$

Mặt khác, trong 3 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại 1 số chia hết cho 3 nên $A \vdots 3$

Mà ƯCLN(3; 8) = 1 nên $A \vdots 3.8$ hay $A \vdots 24$.

Bài 2: Chứng minh rằng: $A = 22^{22} + 55^{55} \vdots 7$

Giải:

Cách 1: $A = (22^{22} - 1^{22}) + (55^{55} + 1^{55})$

$$= (22 - 1)\underbrace{(22^{21} + 22^{20} + \ldots + 1)}_{\mathbf{M}}(55 + 1)\underbrace{(55^{54} - 55^{53} + \ldots + 1)}_{\mathbf{N}}$$

$= 21M + 56N$

Mà $21M \vdots 7$; $56N \vdots 7 \Rightarrow A \vdots 7$

Cách 2: Dùng đồng dư:

Ta đã biết : $\left.\begin{array}{l} 56 \equiv 0 \pmod 7 \\ 1 \equiv 1 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 55 \equiv -1 \pmod 7$

Mặt khác $\left.\begin{array}{l} 22 \equiv 1 \pmod 7 \\ 55 \equiv -1 \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 22^{22} + 55^{55} \equiv 0 \pmod 7$

Hay $22^{22} + 55^{55} \vdots 7$

Bài 3: Chứng minh rằng $A = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chia hết cho a + b + c

Giải:

áp dụng hằng đẳng thức: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$. Thay biểu thức này vào A ta được :

$A = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$

$= [\,(a+b)^3 + c^3\,] - 3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)\,[\,(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Ta thấy đa thức này chứa một nhân tử là a + b + c $\Rightarrow$ A chia hết cho a + b + c

II – <u>Tìm điều kiện xác định và rút gọn một phân thức:</u>

Bài 4: Tìm ĐKXĐ sau đó rút gọn phân thức sau:

$$A = \frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3-x^2-10x-8}$$

Giải:

*Phân tích mẫu của A thành nhân tử:

$x^3 - x^2 - 10x - 8 = (x+1)(x+2)(x-4)$

Vậy ĐKXĐ: $x \neq -1;\ x \neq -2;\ x \neq 4$

*Phân tích thành nhân tử:

$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$

Rút gọn $A = \dfrac{(x+2)(x-3)(x-4)}{(x+2)(x+1)(x-4)} = \dfrac{x-3}{x+1}$

Bài 5: Tìm điều kiện xác định sau đó rút gọn phân thức sau:

$$A = \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2}$$

Giải:

$$B = \frac{x^2(x-3)-(x-3)}{x^2(x-1)} = \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)}$$

ĐKXĐ: $x \neq 1$

Rút gọn: $B = \dfrac{(x-3)(x+1)}{x^2}$

Bài 6: Chứng minh $A = n^3 + 6n^2 + 8n \ \vdots\ 24$ với mọi $n \in N$ chẵn.

Giải:

$A = n(n+2)(n+4)$

Thay n=2k $\vdots$ A=8k (k+1)(k+2)

Mà k(k+1)(k+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow \vdots\ 3$

ƯCLN (8,3) = 1 $\Rightarrow A \ \vdots\ 24$

Bài 7 : cho a+b+c = 0 chứng minh $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

Giải:

Từ KQ bài 3 trên , nếu a+ b+ c = 0

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 - 3abc = 0$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$

Bài 8: Rút gọn các phân thức:

a/. $\dfrac{(2x+3)^2 - x^2}{x^2 - 1}$ (ĐS: $\dfrac{3(x+3)}{x-1}$)

b/. $\dfrac{(3x+2)^2 - (x+2)^2}{x^3 - x^2}$ (ĐS : $\dfrac{8(x+1)}{x(x-1)}$)

III – <u>Giải phương trình, bất phương trình</u>:

Bài 9: (Bài 1 - đề thi cấp 3 năm 2007)

1/. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: B = b + by + y + 1

2/. Giải phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Bài 10: Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$

Giải:

Biến đổi phương trình đã cho được: $(x - 1)(x + 1)^2(x + 3) = 192$

$\Rightarrow$ $(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) = 192$

$\Rightarrow$ $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 192$

Đặt $x^2 + 2x - 1 = y$

Phương trình đã cho thành: $(y + 2)(y - 2) = 192 \Rightarrow \ldots \Rightarrow y = \pm 14$

Với y = 14 giải ra x = 3 hoặc x =- 5

Với y = - 14 giải ra vô nghiệm.

Vậy S $= \{3; -5\}$

Bài 11: Giải bất phương trình sau: $x^2 - 2x - 8 < 0$

Giải:

Biến đổi bất phương trình đã cho về bất phương trình tích:

$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) < 0$

Lập bảng xét dấu:

x		- 2		4	
x + 2	-	0	+		+
x - 4	-		-	0	+
(x+2)(x- 4)	+	0	-	0	+

Vậy nghiệm của bất phương trình là: - 2 < x < 4 .