

KHAI THÁC MỘT BÀI TOÁN

Dạng toán có nội dung hình học liên quan đến diện tích tam giác là dạng toán khó đối với các em học sinh lớp 5. Để giúp các em có thêm kiến thức và có khả năng vận dụng khi gặp dạng toán này, tôi xin trao đổi một hướng khai thác một bài toán.

Bài toán 1 : Cho tam giác ABC, trên BC lấy M sao cho $BM = MC$, N là điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2 \times NA$. Kéo dài MN cắt BA tại P. Hãy chứng tỏ $AP = AB$.

Lời giải : Nối BN, CP, kí hiệu S là diện tích tam giác, ta có : $S_{PBM} = S_{MPC}$ (vì có đáy $BM = MC$ và chung chiều cao hạ từ P). $S_{BNM} = S_{MNC}$ (vì có đáy $BM = MC$ và chung chiều cao hạ từ N).

Do đó $S_{PBM} - S_{BNM} = S_{MPC} - S_{MNC}$ hay $S_{PBN} = S_{PNC}$. (1)

$S_{PNC} = S_{APN} \times 2$. (2) (vì có đáy $NC = 2 \times NA$ và chung chiều cao hạ từ P).

Từ (1) và (2) ta có $S_{APN} \times 2 = S_{PBN}$ hay $S_{APN} = S_{ABN}$. Hai tam giác này có chung chiều cao hạ từ N nên đáy của chúng bằng nhau tức là $AP = PB$.

Thay đổi vị trí của M ; N ta có bài toán sau :

Bài toán 2 : Cho tam giác ABC có $AB = 2 \text{ cm}$; M là một điểm trên BC sao cho $BM = 3 \times MC$; N là một điểm trên AC sao cho $AN = 2 \times NC$; MN cắt BA kéo dài tại P.

- Tính AP.
- So sánh PN với NM.

Lời giải : Nối PC ; BN.

- Tương tự như bài 1 ta chứng minh được $S_{PBN} = 3 \times S_{PNC}$.

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Nếu coi $S_{PNC} = a$ thì $S_{PBN} = 3 \times a$. Do $S_{APN} = 2 \times S_{NPC}$ nên $S_{APN} = 2 \times a$, suy ra $S_{ANB} = a$ hay $S_{APN} = 2 \times S_{ANB}$, mà hai tam giác này có chung chiều cao hạ từ N, nên $AP = AB \times 2$ hay

$$AP = 2 \times 2 = 4 \text{ (cm)}.$$

b) Theo phần (a) ta có : $S_{PBN} = 3 \times a$, $S_{ABN} = a$; $S_{ABN} = 2 \times S_{NBC}$ (vì có $AN = 2 \times NC$ và chung chiều cao hạ từ B), do đó $S_{NBC} = a/2$. (1)

$$S_{NBM} = 3/4 S_{NBC} \text{ (vì } MB = 3 \times MC$$

nên $MB = 3/4 BC$; và chung chiều cao hạ từ N). (2)

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } S_{NBM} = a/2 \times 3/4 = (3 \times 2)/8.$$

Hai tam giác PBN và NBM có chung chiều cao hạ từ đỉnh B xuống PM, có tỉ số diện tích là : $(3 \times a) : (3 \times a)/8 = 8$, nên tỉ số độ dài hai đáy cũng là 8 hay $PN = 8 \times NM$.

Thay đổi vị trí M, N ta có bài toán sau :

Bài toán 3 : Cho tam giác ABC, M là điểm trên BC sao cho $MC = 2 \times MB$; N là điểm trên AC sao cho $AN = 4 \times NC$; NM cắt AB kéo dài tại P.

a) So sánh S_{APM} với S_{MPC} .

b) So sánh AB với PB.

Lời giải : Nối AM ; PC.

a) Tương tự như bài 1 ta chứng minh được : $S_{APM} = 4 \times S_{MPC}$.

b) Tương tự ta cũng chứng minh được $AB = 8 \times PB$.

Tiếp tục thay đổi vị trí của M, N, P để có bài toán sau :

Bài toán 4 : Cho tam giác ABC. Trên AB lấy M sao cho $AM = 1/2 MB$; trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AN = 1/3 NC$; BN cắt CM tại P.

a) So sánh diện tích tam giác PBC với diện tích tam giác ABC.

b) Tính tỉ số độ dài PN so với PB.

Hướng dẫn giải :

Trung tâm Luyện thi Amax – 39 LK 6A Làng Việt Kiều Châu Âu

Nối A với P ta có : $S_{BCM} = 2 \times S_{MCA}$ (vì có $MB = 2 \times MA$ và chung chiều cao hạ từ C). $S_{BPM} = 2 \times S_{MPA}$ (vì có $MB = 2 \times MA$ và chung chiều cao hạ từ P). Suy ra : $S_{BPC} = 2 \times S_{CPA}$. (1)

Tương tự như trên ta có : $S_{CBN} = 3 \times S_{NBA}$ (vì có $CN = 3 \times NA$ và chung chiều cao hạ từ B) ; $S_{CPN} = 3 \times S_{NPA}$ (vì có $CN = 3 \times NA$ và chung chiều cao hạ từ P). Suy ra : $S_{BPC} = 3 \times S_{APB}$. (2)

Từ (1) và (2) ta thấy : nếu coi S_{BPC} là 6 phần bằng nhau, thì S_{APB} là 2 phần, S_{NPA} là 3 phần. Khi đó S_{ABC} là : $6 + 2 + 3 = 11$ (phần).

Vậy $S_{BPC} : S_{ABC} = 6/11$.

Tương tự tính được $PN : PB = 3/8$.

Bây giờ các bạn hãy thử sức của mình bằng 2 bài toán sau :

Bài 1 : Cho tam giác ABC ; N là điểm trên AC sao cho $AN = 3 \times NC$; M là điểm trên BC sao cho $BM = 1/2 MC$. Nối MN cắt BA kéo dài tại P, biết $AB = 6$ cm. Tính PB.

Bài 2 : Cho tam giác ABC ; M là điểm trên AB sao cho $BM = 3 \times MA$; N là điểm trên AC sao cho $AN = 1/2 NC$; NB cắt MC tại O.

- So sánh diện tích tam giác AOB với AOC.
- Tính tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng OM và OC.