**Tìm quỹ tích.**

1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ ( Vòng 1)- năm học 2002-2003]

a/ Trong mặt phẳng Oxy, cho một đường tròn (C) cắt parabol (P): y = x2 tại bốn điểm, một điểm có tọa độ là (1;1) và ba điểm còn lại là ba đỉnh của một tam giác đều. Tính bán kính của đường tròn (C).

b/ Tìm tập hợp các tâm của những tam giác đều có ba đỉnh thuộc parabol (P): y = x2.

**Lời giải**

a/ (C): (x – a)2 + (y – b)2 = R2. (C) qua điểm (1;1) nên: R2= (1 – a)2 + (1 – b)2.

Hoành độ x1, x2, x3 của ba đỉnh tam giác đều và x = 1 là nghiệm của phương trình:

(x – a)2 + (y – b)2 = (1 – a)2 + (1 – b)2 

Do đó: x3 + x2 + (2 – 2b)x +2 – 2a – 2b ≡ (x – x­1)(x – x­2)(x – x­3) nên:



Từ giả thiết tam giác đều nên:



Do đó: a = , b = 3 và bán kính đường tròn (C) là: R = .

b/ (1.5 đ)

Thuận:

Giả sử I(a;b) là tâm của tam giác dều ABC có đỉnh trên (P). Đường tròn (ABC) cắt (P) thêm điểm M(x0;y0) ( có thể trùng A, B, C).

xA, xB, xC và x0 là nghiệm của: (x – a)2 + (y – b)2 = (x0 – a)2 + ( – b)2



Suy ra: 

Hay: , vì vậy: b = 9a2 + 2. Nên tâm I ở trên đồ thị (G): y = 9x2 + 2.

Đảo: Xét I(a; 9a2 + 2) tùy ý trên (G): y = 9x2 + 2. Ta phải chứng minh đường tròn (C) tâm I bán kính IM với M(-3a; 9a2) cắt (P) thêm 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác đều.

Xét phương trình: (x – a)2 + (x2 – 9a2 – 2)2 = (-3a – a)2 + (9a2 – 9a2 – b)2 (2).

 với f(x) = x3 -3a2x2 - (9a2 + 3)x + 27a3 + 7a (f(x) = 0 chính là phương trình (1) với x0 = - 3a).

Nếu a = 0: f(x) = x3 -3x = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Nếu a ≠ 0: Do f(x) liên tục,  và 

nên f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình f(x) = 0 luôn có 3 nghiệm phân biệt x1, x2, x3 với mọi a.

y

x

A

B

C

M

I

Ta có: . Do đó: 

Do x1, x2, x3 là 3 nghiệm phân biệt của (2) nên: (C) cắt (P) tại 3 đỉnh A, B, C của tam giác AB**C.** Và do (3): tam giác ABC có trọng tâm trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I, nên ABC là tam giác đều.

Kết luận: Tập hợp các tâm của những tam giác đều có 3 đỉnh thuộc (P): y = x2 là parabol:

(G): y = 9x2 + 2.

1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ ( Vòng 1)- năm học 2004-2005]

Trong mặt phẳng , cho tam giác vuông cố định có , Tìm tập hợp các điểm thuộc mặt phẳng sao cho 

**Lời giải**

Ta có:

+ 



+ Chọn hệ trục Axy và đơn vị trên trục sao cho B(3;0),C(0;3). Gọi M(x;y)



Vậy ở trong hình tròn (T) tâm I(-1;0), bán kính 2, ( kể cả biên).

Tương tự ở trong hình tròn (S) tâm J(0;-1), bán kính 2, ( kể cả biên).

Vậy tập hợp những điểm M thỏa bài toán là phần giao của hai hình tròn (T) và (S), ( kể cả biên).

y



x

1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ ( Vòng 1)- năm học 2005-2006]

Cho hình vuông EFGH. Gọi (T) là đường tròn qua các trung điểm các cạnh của tam giác EFG. Nhận xét: Điểm H thỏa mãn đồng thời hai tính chất sau:

a/ Các hình chiếu vuông góc của nó lần lượt trên các đường thẳng: EF, FG, GE nằm trên một đường thẳng d.

b/ Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (T).

Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm N của mặt phẳng chứa hình vuông EFGH sao cho N thỏa mãn đồng thời hai tính chất a/ và b/ ở trên.

**Lời giải**

+ Điểm N thỏa mãn tính chất a/ khi và chỉ khi N ở trên đường tròn qua E, F, G.



+ Chứng minh: Chọn hệ trục Oxy với O là tâm của hình vuông EFGH và vec tơ đơn vị trên trục . Ta có E(-1;0), F(0;1), G(1;0).

Phương trình của EF: x –y + 1 = 0; FG: x + y -1 = 0, đường tròn (EFG): x2+y2=1

Gọi N(X;Y). Tọa độ các hình chiếu của N lên EG, EF, FG lần lượt là:

N1 (X;0), N2 ((X+Y-1); (X+Y+1)), N3 ((X-Y+1); (-X+Y+1))

;

thẳng hàng khi và chỉ khi (-X+Y-1)(-X)-(1-Y)(X+Y+1)=0X2+Y2=1(1)

+ Tìm thêm điều kiện để N thỏa mãn tính chất b/. Chỉ cần xét N(X;Y) khác F(0;1).

Với điều kiện (1) đường thẳng d có phương trình X(x-X) +(1-Y)(y-0)=0

Tâm của (T) là I(0; ). Bán kính của (T) là 

+ d tiếp xúc (T) khi và chỉ khi 

 (2)

+ Giải hệ (1) và (2): Rút X2 từ (1) thay vào (2):

(2Y2-Y-1)2=2(1-Y)(Y-1)2(2Y+1) 2 =2(1-Y).Đang xét Y1 nên:(Y-1)(2Y+1)2= -2

4Y3-3Y+1= 0(Y+1)(4Y2-4Y+1) = 0 Y= -1; Y=.

+ VớiY=-1 ta cóđiểm N(0;-1),đó là H

Với Y= , ta có thêm hai điểm N là (;) và (-;)

Tập hợp phải tìm là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (EFGH) mà một đỉnh là H.

1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ ( Bảng A- Vòng 1)- năm học 2000-2001]

Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

A

B

C

D

M

N

Q

P

0

x

y

1. (2.0 điểm)

Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh .

Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ

Oxy sao cho A(0;1), B(-1;0), C(0;-1), D(1;0).

Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN,

MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại

N, P, Q.

Do đó: MP.MQ = MN2 (1) ( xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)

AB: x – y + 1 = 0,AD: x + y – 1 = 0.

(1) 

M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.

Do đó: x2 –(y – 1)2 = (x – y + 1)(x + y – 1) < 0 nên (1) ⇔ x2 – (y– 1)2 =- 2y2 ⇔ x2 + (y+1)2 = 2

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung ¼ đường tròn C, bán kính R = .

Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung ¼ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

1. [Trường THPT DTNT Quế Phong- năm học 2008-2009]

Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P cắt (O) tại hai điểm A và **B.** Tìm quỹ tích điểm M sao cho ****.

**LOẠI 3. Tìm quỹ tích:**

1. **[ HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**

**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI ]**

Cho nhọn không cân,  là một điểm chuyển động trên đoạn thẳng  (nhưng không trùng vào các đầu mút). Đường tròn ngoại tiếp tam giác giao  tại  khác . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  giao  tại Z khác . Gọi T là hình chiếu của  trên BC, H là trực tâm tam giác . Gọi  là giao của  và . Gọi  là điểm đối xứng với  qua .

a) Chứng minh rằng  thẳng hàng

b) Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

**Hướng dẫn giải**

Kí hiệu  là đường tròn đi qua 3 điểm 

a) Ta có .

Suy ra .

Suy ra  hay .

Từ đó  hay  thẳng hàng

b) Gọi M là trung điểm BC, AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại  sao cho  và  khác phía với . AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại khác **A.**

Do  thuộc tròn ngoại tiếp tam giác  nên 

Suy ra .

Lại có  và  đối xứng nhau qua BC nên , .

Từ đó . Ta thu được 

( vì  bằng nửa tổng số đo cung A’B và KC của nhưng vì  nên số đo cung A’B bằng số đo cung JC của. Do đó  bằng nửa tổng số đo cung  của , do đó bằng )

Vì vậy . Do 

Vậy  luôn đi qua giao điểm  của trung tuyến ứng với đỉnh  của  hay hình chiếu của trực tâm  trên .

Do đó tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác luôn thuộc đường thẳng trung trực của đoạn  cố định khi  thay đổi.

1. **[ Đề ôn thi đội tuyển Festival. Đề số 2 ]**

Cho Đường thẳng  và hai điểm cố định nằm trên , là điểm di động trên . Các đường tròn có tâm là và cùng đi qua  cắt nhau tại ( khác ). Tìm tập hợp điểm

1. Cho đường tròn  và một điểm ở trong đường tròn. Xét tất cả các góc vuông đỉnh : gọi giao điểm của hai cạnh góc vuông với đường tròn là. Tìm tập hợp trung điểm  của .

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Mặt khác mà 



Gọi  là trung điểm , đặt  (không đổi)

nên  không đổi.

Vì  cố định nên  thuộc đường tròn tâm  bán kính

Đảo lại, trên đường tròn  lấy tuỳ ý . Lấy  làm tâm quay một cung tròn bán kính  cắt  tại .

Ta có . Kéo dài  cắt  tại .

Xét tam giác  có: 

Hay tam giác  vuông tại  suy ra là trung điểm 

nghĩa là  hay tam giác  vuông tại .

1. **[ THI HSG KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2013 SỞ GD&ĐT QUẢNG NAM -TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHI** **ÊM]**

Cho đường tròn  và một điểm  cố định ở trong đường tròn (), đường thẳng qua  vuông góc với  cắt đường tròn tại và;  là một điểm nằm trên đường tròn, tia đối xứng với tia  qua đường thẳng  cắt đường tròn tại . Gọi  là trung điểm của .

a) Chứng minh đường thẳng  đi qua một điểm cố định  khi  thay đổi trên đường tròn .

b) Gọi là giao điểm của đường thẳng với đường tròn. Đường thẳng  và  cắt nhau ở . Chứng minh rằng các điểm  là những tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác .

**Hướng dẫn giải**



Gọi  là giao điểm của  và ;  là giao điểm của và.

Ta có  và IE là phân giác của góc , suy ra: 

Suy ra:  (M là trung điểm của AB, New-tơn)

= 

= 

Mà ta lại có: 

Do đó: 

Suy ra: 

Suy ra: 



Suy ra . Suy ra . Vậy L cố định.

b)Trước hết ta chứng minh  là phân giác của góc.

Gọi  là giao điểm của OM với 

Ta có: 

Suy ra: 

Suy ra: 

Suy ra: 

Ta có: 

Do đó ta suy ra: 

Suy ra: 

Theo hệ thức Newton, ta suy ra:  (1)

Mà  nên  là phân giác trong của góc  (2)

Theo chứng minh trên ta có: 

Suy ra: 

Suy ra:  (3)

Từ (1) và (3) ta suy ra:  đồng quy tại .

Mà góc  nên  là tứ giác nội tiếp

Suy ra: 

Suy ra là phân giác trong của góc . (4)

Từ (2) và (4), ta có  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác 

Ta lại có  suy ra  là phân giác ngoài của góc. Suy ra  là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác .

Vậy ,  lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của tam giác .

1. Xét các điểm ( không trùng với ) tương ứng thay đổi trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác  sao cho song song với  và các đường thẳng  cắt nhau tại . Gọi  là giao điểm thứ hai (khác điểm ) của đường tròn ngoại tiếp các tam giác và .

1. Chứng minh rằng luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

2. Gọi  lần lượt là điểm đối xứng với  qua các đường thẳng . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  nằm trên một đường thẳng cố định.

**Hướng dẫn giải**

**1) (2,0 *điểm*)**.

Do  cùng nằm trên một đường tròn và  cùng nằm trên một đường tròn, nên 

và 

Từ đó suy ra (2)

Gọi *I* và *J* theo thứ tự là hình chiếu của *Q* trên các đường thẳng *BM* và *CN*. Khi đó, do (2) nên  (do ).

Từ đó, theo tính chất của đường đối trung, *Q* nằm trên đường đối trung kẻ từ *A* của tam giác *AB****C.*2) (2,0 *điểm*)**.

Gọi  là giao điểm của *AP* với *B****C.*** Áp dụng định lý Céva cho tam giác ABC ta có



Do  nên  từ đó và (1) suy ra  hay *L* là trung điểm *B****C.*** 0,5

Do AQ là đường đối trung nên  và kết hợp với tứ giác  nội tiếp nên  suy ra  (3). 0,5

Do cách xác định các điểm  nên  hay tam giác  cân tại , kết hợp với  là đường trung bình của tam giác 

 (4) 0,5

Từ (3), (4) suy ra  là đường trung trực của đoạn *B’C’* suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  nằm trên đường thẳng *AP* hay nằm trên trung tuyến *AL* của tam giác *AB****C.*** 0,5

1. Cho tam giác nhọn  không cân tại  là trung điểm cạnh  và  tương ứng là chân đường cao hạ từ  của tam giác.  là giao điểm của hai tiếp tuyến tại  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  là giao điểm của và  là giao điểm của và .

a) Chứng minh rằng  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  và cắt nhau tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng trực tâm  của tam giác  nằm trên .

c) Chứng minh rằng  nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Hướng dẫn giải**



a) ZT là phân giác góc AZ**C.**

Do góc XAB= goc ACB = góc BFE =góc AFX và TA= TF, từ đó X và T nằm trên trung trực của AF, do đó T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác XYZ

b) Giả sử AB < BC, khi đó D nằm trên cung nhỏ A**B.** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và L là trung điểm của BH. Ta có được BD và LO vuông góc.

Từ BD và DH vuông góc, ta được LO và DH song song. OLHT là hình bình hành nên OL song song với HT, do đó D, H, T thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc ADT = góc AXT và TY là đường trung trực của D**C.**

Chứng minh được góc CDT = góc CYT nên CTDY là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc XDY + góc XZY= góc XDT+ góc TDY+ góc XZY

=góc ZAT + góc ZCT + góc XZY = 1800, do đó DXZY là tứ giác nội tiếp.

1. (Đề thi đề xuất trường PT vùng cao Việt Bắc – 2015) Từ một điểm  cố định ta vẽ hai tiếp tuyến đến những đường tròn thay đổi tâm  sao cho hai tiếp tuyến đó luôn vuông góc với nhau.

a. Tìm tập hợp tâm của những đường tròn  đi qua một điểm  cố định khác với .

b. Cho đường tròn có tâm  chạy trên một đường thẳng  cố định không đi qua . Tìm tập hợp các tiếp điểm  và  của nhữn đường tròn đó với các tiếp tuyến vẽ từ .

**Hướng dẫn giải:**



a. Tứ giác *OTCT’* có 3 góc vuông và  nên nó là một hình vuông. Gọi *R* là bán kính của đường tròn (*C*), ta có .

Do đó:  và 

Vậy tâm *C* ở trên đường tròn tâm *I* là tập hợp những điểm có tỉ số khoảng cách tới *A* và *O* bằng . Đường kính *DE* của đường tròn tâm *I* đi qua các điểm *A* và *O* tạo nên một hàng điểm điều hòa; ta có 

Ngược lại lấy điểm *C’* bất kỳ trên đường tròn tâm *I*, ta có .

Từ *O* kẻ hai tiếp tuyến *OT1* và  ta có . Vậy là hình vuông.

Vậy tập hợp các điểm *C* là đường tròn tâm *I* với *I* là trung điểm của đoạn *DE* trong đó *D, E, O, A* là một hàng điểm điều hòa.

b.  và .Vậy *T* là ảnh của *C* trong phép đồng dạng tâm *O* tỉ số , góc quay .

Điểm *C* chạy trên đường thẳng  nên điểm *T* chạy trên đường thẳng  là ảnh của  trong phép đồng dạng trên.

Với điểm *T’* ta dùng phép đồng dạng tâm *O* tỉ số , góc quay  ta tìm được tập hợp các điểm *T’* là đường thẳng ảnh của  trong phép đồng dạng .

**LOẠI 3: Tìm quỹ tích:**

**Câu TRƯỜNG THPT: LÊ QUÝ ĐÔN**

Trong mặt phẳng cho tam giác đều cạnh, hai tia  vuông góc với và ở cùng một phía đối với. Hai điểm  lần lượt chuyển động trên  và.

1/ Gọi  là trung điểm của  là hình chiếu của B trên mặt phẳng 

Góc giữa và  bằng . Tính độ dài đoạn  theo a và 

2/ Gọi  là mặt phẳng qua B và vuông góc với. Chứng minh rằng 

luôn đi qua một đường thẳng cố định.

3/ Gọi *O* là trung điểm,  không đổi, kẻ  vuông góc với tại. Chứng minh rằng chạy trên một đường tròn cố định.

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2**

Cho tam giác . Gọi là điểm chuyển động trên cạnh . Gọi  là điểm chuyển động trên cạnh .

a)Giả sử .Chứng minh đường trung trực của  luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử  không đổi.Chứng minh  luôn đi qua một điểm cố định

**Hướng dẫn giải**

a) Nếu tam giác  cân thì trung trực  đi qua điểm cố địnhXét tam giác  không cân tại A

Gọi E là điểm chính giữa cung của đường tròn ngọai tiếp tam giác

AB**C.**E là điểm cố địnhvì ;góc =góc nên Suy ra:  hay đường trung trực của  luôn đi qua điểm E cố định

b) Kẻ đường phân giác trong của  cắt MN tại FGọi  là số đo góc BACTa có: diện tích =diện tích +diện tích Suy ra: 



 không đổi hay F là điểm cố định

Vậy  luôn đi qua một điểm cố đinh.

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN (VÒNG 1)**

a.Cho tam giác  vuông cân tại, cạnh.Trong mặt phẳng chứa tam giác lấy thỏa .Tìm quĩ tích điểm 

b.Cho tam giác có hai trung tuyến và hợp với nhau một góc, ,. Tính độ dài trung tuyến còn lại của tam giác.

**Hướng dẫn giải**

• Chọn hệ trục tọa độ  vuông góc sao cho tia  qua A và tia qua**.** Ta có: , , . Giả sử .

**a.** • Chọn hệ trục tọa độ  vuông góc sao cho tia  qua A và tia qua **.** Ta có: , , . Giả sử .

• 



. • Phương trình trên là phương trình của một đường tròn tâm , bán kính . • Vậy quỹ tích điểm M là một đường tròn tâm , bán kính .

**b.** Gọi G là trọng tâm của tam giác**.**

• Xét trường hợp: 

Ta có: 



Vậy AC2 = 112  Vậy AB2 = 52 Vậy độ dài trung tuyến còn lại:

 Xét trường hợp: 

Ta có: 



Vậy AC2 = 208  Vậy AB2 = 148

Vậy độ dài trung tuyến còn lại:



**Câu KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12**

**LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013**

Trong mặt phẳng cho đường tròn  tâm bán kính  và điểm  cố định thuộc đường tròn . Gọi  là tiếp tuyến của  tại điểm**.** Tìm quỹ tích điểm *M* biết rằng khoảng cách từ *M* đến đường thẳng Δ bằng độ dài tiếp tuyến *MT* của đường tròn  với *T* là tiếp điểm.

**Hướng dẫn giải**

A

M

T

H

x

y

I

Δ

Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó ta có  Gọi M(x; y)

  Tam giác MTI vuông tại T



 Thử lại: Gọi 

 Vậy quỹ tích điểm M là một parabol 

**Câu KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12**

**LONG AN** **VÒNG 2 NĂM 2015**

Cho tứ giác lồi  có hai đường chéo không vuông góc với nhau, nội tiếp đường tròn . Gọi  là điểm di chuyển trên cung  không chứa . Gọi  là giao điểm của  với ,  là giao điểm của  với . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và  cắt nhau tại giao điểm thứ hai . Chứng minh rằng  luôn đi qua một điểm cố định.

**Hướng dẫn giải**



Gọi  lần lượt là tiếp tuyến của  tại . Khi đó:

. Do đócố định Tương tự  cố định.

Gọi , suy ra  cố định. Ta có:    Khi đó tam giáccân tại nên  hay K thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn  và .

Vậy  đi qua điểm cố định.

**Câu LONG AN** **VÒNG 2 - NĂM 2012**

Cho đường tròn  có tâm là và đường kính là,  là điểm cố định nằm giữa  và . Gọi  là đường thẳng qua  và cắt tại  và .

a) Tìm điểm M trên  sao cho .

b) Gọi  đối xứng qua  và giả sử  thay đổi nhưng luôn qua . Chứng minh: luôn nhận giá trị không đổi.

**Hướng dẫn giải**

 a) Ta có:     ( là trung điểm )

Th1: OI. Khi đó mọi M nằm trên là điểm M cần tìm. Th2: OI.Khi đó  Vậy điểm  cần tìm là giao điểm của đường thẳng  với 

với  là đường thẳng qua  và vuông góc . b)  Xét  ta có:  Tương tự xét :  Mặt khác:  Thay thế các đẳng thức vào ta được :  không đổi