**CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM**

1. Cho hàm số  thỏa mãn điều kiện:

 với .

Tính và chứng minh  là hàm số lẻ.

Tìm tất cả các hàm số .

**Hướng dẫn giải**

Tính  và chứng minh  là hàm số lẻ.

Với  thì  hay . (1)



Với  thì  (do (1))

Với  thì  hay 

Vậy  là hàm số lẻ.

Tìm tất cả các hàm số .

Đặt  ta suy ra 

Khi đó  (2)

Với 

Từ (2) ta được  hay .

Chọn , ta có .

Đặt 

Ta có . (3)

Suy ra

Từ (1), (3) ta được.

Thử lại

Với , ta có:

và 

Vậy .

1. Tìm tất cả các hàm số  thoả mãn:

.

**Hướng dẫn giải**

Cho  thì 

Cho  thì 

Cho  thì .

Do  nên  . (1)

Cho , ta có .

Do  nên . (2)

Từ (1) và (2) ta được .

1. Tìm tất cả các hàm số , biết rằng  là hàm số chẵn và thỏa mãn:

 với mọi .

**Hướng dẫn giải**

Từ (1) cho , ta có:

 với mọi 

Nếu  thì  với mọi . Khi đó  không thỏa mãn (1)

Do đó 

Từ (1) thay  bởi  và  bởi , ta được:

 (2)

Từ (1) thay  bởi  và  bởi , ta được:

 (3)

Vì là hàm số chẵn nên viết (3) lại như sau:

 (4)

Lấy (4) trừ (2) vế theo vế ta được:

 với mọi 

Suy ra:  với mọi .

1. Tìm tất cả các hàm số  thoả mãn



**Hướng dẫn giải**

Cho , từ  suy ra 

Cho , từ  suy ra .

Do đó (1) trở thành:



thay  bởi  từ  ta được :

, chứng tỏ  là hàm số lẻ.

Do đó với mọi  ta có



Với mọi  ta có



Kết hợp  và ta được .

tínhtheo hai cách. Ta có 

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:

.

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy hàm  hằng không thỏa mãn. Ta xét  không hằng.



Trong (1) cho y=-1 ta được: 

Rõ ràng nếu  thì  là hàm hằng. Do đó: 

Ta sẽ chứng minh: .

Thật vậy, giả sử tồn tại  sao cho .

Trong (1) chọn  ta có: .

Mâu thuẫn vì  không là hàm hằng. Do đó ta có: .

Chú ý là nên từ (2) ta có : .

Trong (1) chọn  ta được:





Suy ra 

Do **** nên .

Thử lại ta có hàm số cần tìm là .

1. Tìm tất cả các hàm f:  thoả mãn:

 .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết:  (1)

Thay y = x4 vào (1):  (2)

Thay y = -f(x) vào (1): (3)

Từ (2) và (3) ta có: 

 (4)

Thay x = 0 vào (4) suy ra f(0) = 0.

Giả sử tồn tại a ≠ 0 sao cho f(a) = 0. Ta chứng minh f(x) = 0, ∀x ∈ 

Thay x = 0 và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(-y).

Thay x = a và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(a4 – y).

Suy ra: 

⇒  (5)

và  (6)

Thay y = 0 và x tuỳ ý vào (1), ta được  (7)

Thay y = a4 vào (1), ta được

 (8)

Từ (5), (6), và (8) suy ra:  (9)

Từ (7) và (9): 

Và từ (4), nếu ∃x0 ∈R: f(x0) ≠ 0 ⇒ f(x) = x4, ∀x ∈ R

Thử lại, ta thấy f(x) = 0 và f(x) = x4 là nghiệm của phương trình.

1. Tìm tất cả các hàm số f: thoả mãn

 (1).

**Hướng dẫn giải**

Thay vào (1) ta được: 

Trong đó 

Tiếp tục thay y = a vào (1), ta thu được:



hay  (2)

Từ (2) suy ra . Thay vào (2), ta được

 hay 

Tiếp theo, thay biểu thức của f(t) vào (1), ta thu được đẳng thức





Vậy ta nhận được hai hàm số thoả mãn đề bài là và 

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn

.

**Hướng dẫn giải**

Chứng minh *f* là đơn ánh

Thật vậy, với mọi *x, y* thỏa mãn ta có

**

Chọn *y* = 0 ta được 

Vậy  với *c* là hằng số.

Thay vào điều kiện bài toán ta được

** (luôn đúng).

1. Tìm tất cả các hàm  thỏa mãn:  với mọi *x, y*.

**Hướng dẫn giải**

Cho x = 1 thì 

Chọn y thỏa mãn , và đặt  thì .

Chọn y = t, và thay vào giả thiết thì:

Hay: 

Vậy  là hàm bậc nhất.

Giả sử. Thay vào giả thiết ta có:



Đẳng thức trên đúng với mọi x, y nên:



Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu, là .

1. Tìm tất cả các hàm f:  thoả mãn:

 .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết:  (1)

Thay y = x4 vào (1):  (2)

Thay y = -f(x) vào (1): (3)

Từ (2) và (3) ta có: 

 (4)

Thay x = 0 vào (4) suy ra f(0) = 0.

Giả sử tồn tại a ≠ 0 sao cho f(a) = 0. Ta chứng minh f(x) = 0, ∀x ∈ 

Thay x = 0 và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(-y).

Thay x = a và y tuỳ ý vào (1), ta được f(y) = f(a4 – y).

Suy ra: 

⇒  (5)

và  (6)

Thay y = 0 và x tuỳ ý vào (1), ta được  (7)

Thay y = a4 vào (1), ta được

 (8)

Từ (5), (6), và (8) suy ra:  (9)

Từ (7) và (9): 

Và từ (4), nếu ∃x0 ∈R: f(x0) ≠ 0 ⇒ f(x) = x4, ∀x ∈ R

Thử lại, ta thấy f(x) = 0 và f(x) = x4 là nghiệm của phương trình.

1. Kí hiệu  là tập hợp các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm  thỏa mãn đẳng thức:

, với mọi 

**Hướng dẫn giải**

Nếu  sao cho 

,

suy ra  hay  là đơn ánh.

Từ đó  (1)

Dế thấy với mọi  ta có: . (2)

(chú ý điều này vẫn đúng nếu ta nhân cả 2 vế với cùng một thừa số).

Đặt . Theo (1) suy ra:

.

Vì phương trình  chỉ có nghiệm nguyên dương là (*x; y*)=(3,3) hoặc (5,1) nên ta có .

Cũng từ (1) ta có .

Vì phương trình  chỉ có nghiệm nguyên dương là (x,y) là (4,2) nên

. Từ (1) ta có

, suy ra từ khai triển (2).

Vì vậy theo các kết quả trên và phép quy nạp ta suy ra , với mọi k là số nguyên dương. Do đó  mà  đơn ánh nên .

Vậy  với mọi n nguyên dương. Thử lại thỏa mãn bài toán.

1. Tìm tất cả các hàm thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:



1. Tìm tất cả các hàm  liên tục trên  và thỏa mãn:

****

1. Cho hàm số thỏa mãn đồng thời các điều kiện:



1. Chứng minh .
2. Tìm biểu thức .

**Hướng dẫn giải**

1. Vì  nên từ giả thiết  ta được 

Kết hợp điều kiến ta được :



Do đó 

1. Ta có



Thử lại các điều kiện, nên 

1. Cho tập hợp  gồm tất cả các hàm số  thỏa mãn điều kiện:. Hãy tìm số thực lớn nhất sao cho với mọi hàm số  thuộc tâp hợp  ta đều có .

**Hướng dẫn giải**

1. Cho  là số thực. Tìm tất các hàm số  sao cho:  liên tục trên  và .

**Hướng dẫn giải**

1. Cho  và hàm số  sao cho: 
2. Giả sử rằng  Tính 
3. Tìm hàm số .

**Hướng dẫn giải**



* Từ  ta được
* Với 
* Với 
* Với 

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được 

* Từ  ta có: .

Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được 

* Từ  ta được 
* Đặt  và ta được  và  chia hết  nên . Do đó ta được: .
* Do đó, từ  ta được  hay  (loại). Vậy .

1. Từ  ta được 

*  chẵn: 
*  lẻ: Từ  và  ta được 

Suy ra: 

Do đó 

* Từ , chứng minh bằng quy nạp ta được 



Vậy 

* Từ  ta có  ta được 

Mà 

Vậy 

* Ta có  hay  từ  suy ra  hay 
* Thử lại thỏa mãn . Vậy  .

1. Tìm hàm số  thỏa mãn



**Hướng dẫn giải**

Cho 

+) Nếu . Cho  ta được: 

Cho  ta được . Thử lại thấy đúng

+) Nếu  cho  ta được  .

Cho  ta được 



Giả sử tôn tại  sao cho 

Chọn  ta được:



Nếu  ( Loại)

Nếu 

Vậy  .

1. Tìm tất cả các hàm số ** thỏa mãn



**Hướng dẫn giải**

1. Tìm hàm  thỏa mãn một trong hai điều kiện

,



**Hướng dẫn giải**

Ta tìm hàm *f* thỏa mãn (*ii*). Đối với (*i*) ta làm tương tự. Ngoài ra có thể thấy hai điều kiện này có thể biến đổi về nhau.

Ta cũng dễ thấy *f* là đơn ánh và 

Trong (*ii*) thay *x* bởi  ta có



Mặt khác  nên 

Kết hợp (*ii*) thì  mà *f* đơn ánh nên . Suy ra 

Ta chỉ ra không tồn tại đồng thời  thỏa mãn . Thật vậy, giả sử tồn tại *a, b* như trên. Trong (ii) lấy  ta có 

Do  nên  , mâu thuẫn.

Vậy  hoặc 

Thử lại thấy hai hàm này thỏa mãn.

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:

, 

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tồn tại hàm số *f(x)* thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Đặt  với 

Chọn ; , thay vào (14) ta được

,

Nên

,  (*i*)

Thay 2*y* bởi *y* ta được

,  (*ii*)

Với  thỏa mãn 

Thay *y* bởi *y-a* vào (*ii*) ta được

, 

Thay *x* bởi *y*; *y* bởi *x-a* vào (*ii*) ta được

, 

Do đó 

Chọn *x=*0; *y=*0, thay vào (*i*) ta có



Theo kết quả phần trên suy ra 

Suy ra 

Chọn *x=*0; *y=x*, thay vào (*i*) ta được

, 

Suy ra

, , 

Thử lại thấy hàm số vừa tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy ,  là hàm số cần tìm.

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn điều kiện



**Hướng dẫn giải**

Cho  ta được 

Cho  ta được 

Vậy f(0) = 0.

Cho  ta được 

Cho , ta được



Vậy 

Thử lại ta thấy hàm số thỏa mãn bài toán.

1. Tìm tất cả các hàm số liên tục  thỏa mãn các điều kiện sau:

 và  với mọi x, y thuộc .

**Hướng dẫn giải**

Cho  ta được 

Viết lại hệ thức  dưới dạng:



Đặt  do liên tục trên  nên  liên tục trên 

Ta có  và  với mọi x,y thuộc 

cộng tính có dạng , với k là hằng số.

Mà  

Thử lại ta thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

1. Tìm tất cả hàm số liên tục sao cho: 



**Hướng dẫn giải**

Ta có  

Đặt  

Xét hàm số thỏa mãn 

Do đó từ (2) ⇒ g(x) +  và  liên tục trên 

Thay 

Thay 

Thay  bởi  

Do đó  là hàm chẵn trên  nên ta chỉ cần xét với 

Từ (3) ta có 



Lấy  tùy ý, Xét dãy  xác định như sau:



Và 

Mặt khác vì  liên tục nên ta có 

Vậy   .

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn điều kiện



**Hướng dẫn giải**

Nếu  là hàm hằng,  thì ta có  vô lý.

Cho  ta được 

Do  không là hàm hằng nên 

Cho  ta được 

Suy ra  hay  là hàm số chẵn.

Bằng quy nạp ta chứng minh được 

Do  là hàm số chẵn nên 

Thử lại thỏa mãn.

Vậy 

1. Tìm  xác định  thỏa mãn



**Hướng dẫn giải**

Cho



Cho



Cho



Cho



Cho



Cho



Trừ từng vế hai phương trình và 



Cho



1. Tìm các hàm số  thoả mãn điều kiện:  với mọi *x*, *y* > 1

**Hướng dẫn giải**

Với mọi *t* > 1, thay  và  vào (1) ta được:



 (2), với mọi t > 1.

Lấy 

Thay vào (2) ta được: 

Do đó với mọi 

Từ (1) ta có:  vơi 

Với , từ (1) thay  ta có:

⇒  với mọi *t* > 1.

Đặt  với .

Thử lại thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy hàm số cần tìm là: .

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:

**.**

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy hàm  hằng không thỏa mãn. Ta xét  không hằng.

Trong (1) cho y=-1 ta được: 

Rõ ràng nếu  thì  là hàm hằng. Do đó: 

Ta sẽ chứng minh: .

Thật vậy, giả sử tồn tại  sao cho .

Trong (1) chọn  ta có: .

Mâu thuẫn vì  không là hàm hằng. Do đó ta có: .

Chú ý là nên từ (1) ta có : .

Trong (1) chọn ta được :

****

****

****

Do **** nên .

Thử lại ta có hàm số cần tìm là .

1. Tìm tất cả các số nguyên không âm  sao cho tồn tại một hàm  khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau
2. 
3. 

**Hướng dẫn giải**

Với bất kì, bằng cách thay  vào i) được

 (1)

+ Nếu  thì 

+ Nếu thì ta thấy hoặc  Thật vậy, nếu thì bằng cách cho , ta thấy  nên (1) không thể xảy ra, còn nếu thì với đủ lớn,  nên (1) cũng không thể xảy ra. Thành thử, ta đã chứng minh được với mọi  thì hoặc 

Từ đó suy ra . (2)

Do đó, 

\*)Nếu thì .

Vì khác hằng nên tồn tại  sao cho . Khi đó,



Do khác hằng nên tồn tại  sao cho . Từ i), ta có



Bây giờ, sử dụng (2), ta được



Điều vô lí này chứng tỏ không thỏa mãn.

\*)Nếu  thì hàm số



thỏa mãn đề bài. Do đó,  thỏa mãn đề bài.

\*)Nếu thì ta thấy không thể tồn tại 2 số sao cho . Thật vậy, nếu trái lại, thì  ta có





Kết hợp với (2) suy ra  Thế nhưng, do  nên tồn tại để  Do đó,  Điều vô lí này chứng tỏ



Bây giờ, ta xét hàm số



trong đó là 2 số nguyên tố phân biệt có dạng 

Ta sẽ chứng minh hàm xây dựng như trên thỏa mãn

i)

ii) 

* Kiểm tra điều kiện i)

Nếu  thì hiển nhiên .

Nếu  thì 

* Kiểm tra điều kiện ii)

Vì nên 

Dễ thấy  nên



Vậy  là tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài.

1. Tìm tất cả các hàm số  thoả mãn



**Hướng dẫn giải**

Cho , từ  suy ra 

Cho , từ  suy ra .

Do đó (1) trở thành:



thay  bởi  từ  ta được :

, chứng tỏ  là hàm số lẻ. Do đó với mọi  ta có



Với mọi  ta có



Kết hợp  và ta được .

tínhtheo hai cách. Ta có 

1. Cho hàm số  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:
2.  với mọi ; trong đó  lần lượt là bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương ;
3.  với mọi số nguyên tố .

Tính giá trị của ? Kí hiệu  là tập hợp tất cả các số nguyên dương.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó ta có các đẳng thức sau:







.

Do đó ta có .

Mặt khác ta có các đẳng thức sau:





Suy ra .

Từ (1) và (2) ta có



Ta có 2003 là số nguyên tố nên

 (3)





, kết hợp với (4) ta được :



Mặt khác 



Do đó , kết hợp với (5) ta được . Do đó từ đẳng thức (3) ta được .

1. Tìm tất cả các hàm số  sao cho: ,

**Hướng dẫn giải**

Đặt .Thay vào giả thiết ta có

Thay  vào (1) ta có 

Xét hàm số ta có h(x) liên tục trên R và , suy ra tập giá trị của h(x) là R. Từ (2) suy ra .

Do đó .

Thay vào thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy .

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:, với mọi , và tồn tại  sao cho 

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là số tự nhiên bé nhất sao cho , suy ra



hay .

Giả sử  suy ra

Nếu  thì  (trái với giả thiết  là số tự nhiên bé nhất sao cho ).

Nếu  thì (vô lý)

Vậy , do đó 

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn điều kiện:



**Hướng dẫn giải**

Giả sử hàm số  thỏa mãn 

TH1: . Thử lại ta thấy  thỏa mãn (1).

TH2: .

Ta có: 

Thay  vào (\*), ta được



Ta thấy vế phải của (2) là một hàm số bậc 3 nên có tập giá trị là . Do đó hàm số  có tập giá trị là  đều  sao cho .

Thay  vào (\*), ta được  (3).

Thay  vào (\*), ta được

 (4).

Từ (3) và (4)   hay 

Thử lại ta thấy  thỏa mãn điều kiện (1).

Vậy  và  ( a là hằng số) là các hàm số cần tìm.

1. Xác định hàm số thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện:
2. ;
3. 
4. .

**Hướng dẫn giải**

 ta có: 

Mặt khác, với mọi  khác  ta có:



Từ  và  ta có: 

 với mọi  khác 

Từ 1. có  suy ra 

Ta có . Vậy  .

1. Cho hàm  thỏa mãn  ,  và với mọi số tự nhiên  thì  bằng 0 hoặc 1. Hãy tính  và 

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Từ với 

Chọn , ta có 

Khi đó  mà nên suy ra .

Ta đi chứng minh bằng quy nạp:  (1)

Ta thấy (1) đúng với . Giả sử (1) đúng với ; ta đi chứng minh (1) đúng với . Ta có:



Vậy (1) đúng với . Do đó 

Lại có , ta sẽ chỉ ra . Thật vậy, nếu

  

Trong khi đó  (mâu thuẫn) Vậy .

Lập luận tương tự ta được .

Khi đó .

Ta lại có: 

Suy ra:  

Do đó:  với 

Vậy .

1. Tìm tất cả các số nguyên không âm  sao cho tồn tại một hàm  khác hằng thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau
2. 
3. 

**Hướng dẫn giải**

Với bất kì, bằng cách thay  vào i) được

 (1)

+ Nếu  thì 

+ Nếu thì ta thấy hoặc  Thật vậy, nếu thì bằng cách cho , ta thấy  nên (1) không thể xảy ra, còn nếu thì với  đủ lớn,  nên (1) cũng không thể xảy ra. Thành thử, ta đã chứng minh được với mọi  thì hoặc 

Từ đó suy ra . (2)

Do đó, 

\*)Nếu thì .

Vì khác hằng nên tồn tại  sao cho . Khi đó,



Do khác hằng nên tồn tại  sao cho . Từ i), ta có



Bây giờ, sử dụng (2), ta được



Điều vô lí này chứng tỏ không thỏa mãn.

\*)Nếu  thì hàm số



thỏa mãn đề bài. Do đó,  thỏa mãn đề bài.

\*)Nếu thì ta thấy không thể tồn tại 2 số sao cho . Thật vậy, nếu trái lại, thì  ta có





Kết hợp với (2) suy ra  Thế nhưng, do  nên tồn tại để  Do đó,  Điều vô lí này chứng tỏ



Bây giờ, ta xét hàm số



trong đó là 2 số nguyên tố phân biệt có dạng 

Ta sẽ chứng minh hàm xây dựng như trên thỏa mãn

1. 
2. 

-Kiểm tra điều kiện i)

Nếu  thì hiển nhiên .

Nếu  thì 

-Kiểm tra điều kiện ii)

Vì nên 

Dễ thấy  nên



Vậy  là tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài.

1. Xác định hàm số  liên tục  ( là tập hợp các số thực dương) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

1)  với mọi ,

2)  với mọi ,

3) ,

4) là số nguyên dương với mọi số nguyên dương .

**Hướng dẫn giải**

Với  và , suy ra . Do đó

.

Hay . Vì  nên ta suy ra .

Xét hàm số trên , ta có  với mọi  . Do đó hàm số đồng biến trên . Do đó từ , ta suy ra  hay .

Vậy  là đơn ánh. Kết hợp với  liên tục ta suy ra  là hàm đơn điệu thực sự. Mặt khác, theo giả thiết  nên ta suy ra  là hàm tăng thực sự trên .

Từ 2) ta cho thì . Kết hợp với 3) ta suy ra

.

Vì  là hàm tăng thực sự trên  nên ta suy ra .

Xét hàm số trên , ta có  với mọi  . Do đó hàm số đồng biến trên . Do đó từ , ta suy ra  hay .

Vì  với mọi  và  nên theo quy nạp ta có  với mọi số tự nhiên .

Với mọi số tự nhiên , ta có

.

Vì điều kiện 4) nên  đều là các số nguyên dương. Do đó ta suy ra

.

Vậy  với mọi số nguyên dương .

Từ  với mọi . Ta suy ra  với mọi . Cho với mọi  với mọi  là số nguyên dương ta suy ra . Do đó  hay với mọi số nguyên dương .

Với mỗi  tùy ý cho trước đều tồn tại dãy số ,  có dạng  hội tụ đến  . Vì  là hàm liên tục nên

.

Thử lại ta thấy hàm số  thỏa mãn mọi điều kiện của bài ra.

1. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số

thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i/ 

ii/ 

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Với , ta có 



: vô lý.

Với , ta có 

và 

Ta có 



Điều mâu thuẫn trên dẫn đến 

Với  ta xây dựng được vô số hàm  thỏa yêu cầu bài toán như sau

Cho , đặt 

và 

Khi đó, chứng minh quy nạp thì hàm số xác định trên và



hơn nữa theo chứng minh trên

,

Khi đó 



Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

1. Tìm hàm  liên tục trên và thỏa mãn:



**Hướng dẫn giải**

+)Cho x = y = 0 từ (\*) ⇒ f(0) = 0.

+)Thay x bởi y và y bởi x ta được:



suy ra , ∀x,y∈R ⇒ f(x) là hàm số chẵn.

+)Cho, CM quy nạp ta được f(nx) = n2f(x), ∀x∈R,∀n∈N\*



hay f(rx) = r2f(x), ∀x∈R,∀r∈Q+,

+) Vì f(x) là hàm chẵn nên f(rx) = r2f(x), ∀x∈R,∀r∈Q.

+) Vì f(x) liên tục trên R nên f(αx) = α2f(x), ∀x∈R, ∀α∈R ⇒ f(α) = aα2

Vậy f(x) = ax2, với a = f(1), x ∈ R.

1. Cho hàm sao cho:



a) Chứng minh f là hàm tăng không nghiêm ngặt trên R+

b) Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

**Hướng dẫn giải**

a) Thay x=y=0 ta có f(0)=0.

Xét hàm g(x) = x2 + f(4y)x là hàm đồng biến trên R+ vì f(4y)>=0. Mà:

 nên với mỗi số dương a bất kỳ luôn tồn tại x0 để a= g(x0) > 0 . Do đó f(y+a) = f(g(x0)+y) >= f(y) với mọi số a dương. Chứng tỏ f là hàm tăng không nghiêm ngặt.

b) Xét hai trường hợp sau:

TH1: Tồn tại t > 0 để f(t) = 0.



Kết hợpvới f(x) là hàm không giảm nên f(x) = 0 với mọi x không âm. Vì nếu ngược lại tồn tại u > 0 để f(u) > 0 thì luôn tồn tại n nguyên dương để nt > u nhưng f(nt) = 0 mâu thuẫn với tính không giảm của hàm f.

TH2: Với mọi số dương t có f(t) > 0. Theo chứng minh trên suy ra f là hàm tăng ngặt

Thay y bởi y2 ta có: f(x2) + f(y2) = f(x2 + y2 + xf(4y2))

Thay x bởi y, y bởi x2:



Vì f tăng ngặt nên: 

Thử lại ta được k=1.

KL: Bài toán có hai nghiệm là



1. Tìm tất cả hàm f: R→R\* liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện:

 ∀x∈R.

**Hướng dẫn giải**

Ta có (1) ⇔ f(x)+f(x2+2x) = f(x).f(x2+2x)

⇔ [f(x)-1].[f(x+1)2-1]=1

Thế x bởi x-1 ta [f(x-1)-1].[f(x2-1)-1]=1

Đặt g(x)=f(x-1)-1 ⇒ g liên tục trên R; g(x)≠1 ∀x∈R và g(x) g(x2)=1 ∀x∈R (2)

Từ (2) ta có g(x) ≠0 1 ∀x∈R

Thay x bởi –x  g(-x).g(x2)=1-g(x).g(x2) g(-x)=g(x)

Vậy g là hàm chẵn x nên ta chỉ cần xét với x>0 trên R.

Từ (2) ta có: g(x) = = g(x4)⇒ g(x)=g(x1/4) ∀x>0

Lấy a>0 tùy ý, xét dãy (xn) xác định như sau:

x0=a; xn+1=xn1/4∀n∈N⇒Lim xn=1

Và có g(xn)=g(xn1/4)=g(xn+1) ∀x∈N⇒ g(xn)=g(xn-1)=…=g(x0)=g(a)

Vì g liên tục nên ta có g(x) =Lim g(xn)=g(Lim xn) = g(1)

Thay x=1 vào (2) ⇒g2(1)=1 ⇒ g(1)=1 (vì g≠1) ⇒g(x) =1 ∀a>0 bất kì

⇒g(x)=1 ∀x∈R ⇒f(x)=2 ∀x∈R

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn:

.

**Hướng dẫn giải**



Trong (1) lấy x = y = 0 được f(0) = 0.

Trong (1) lấy y = -1 ta có



Trong (2) lấy x = -1 ta được:



+ Nếu  thì từ (2) suy ra f đồng nhất 0 và hàm này thỏa mãn bài toán.

+ Nếu  thì trong (2) lại lấy x = 1 ta thu được .

Từ đó (2) trở thành : 

Trong (1) ta cho y = 1:



Kết hợp (1) và (3) ta được:



Từ (4) lần lượt lấy x = 1, x = -1 ta có: 



Như vậy hàm f là một hàm số lẻ.

Trong (4) thay  y bởi -y và sử dụng tính lẻ của hàm f:



Cộng vế theo vế (4) và (5) :



Mà f(0) = 0 nên ta có 



Và bây giờ ta sẽ  tính biểu thức  theo hai cách:





Từ hai điều trên thu được:



Thử lại thỏa. Kết luận của bài toán là: .

1. Tìm tất cả các hàm số  sao cho với mọi  khác 0 và ta có

.

**Hướng dẫn giải**

Đặt  ta được PTH:  (1)

+ Cho y=1: . Suy ra  (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra  (3), với mọi .

+ Trong (3) thay x bởi , ta được:  (4).

+ Từ (1), (4) suy ra . Từ đây suy ra  (5), với mọi .

+ Từ (3) suy ra  với mọi  (6).

+ Hoán đổi vai trò của *u*,*v* trong (5) suy ra nếu  thì  (mâu thuẫn). Do đó  và ta được:  với mọi .

Theo kết quả cơ bản ta được . Vậy  là hàm duy nhất cần tìm.

1. Tìm tất cả các hàm thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:
2. Với mọi cặp *a, b* nguyên dương không nguyên tố cùng nhau, ta có 
3. Với mọi bộ *a, b* nguyên dương tồn tại một tam giác không suy biến có độ dài ba cạnh là và ** **.**

**Hướng dẫn giải**

Từ đk 2, với mọi bộ a, b nguyên dương, ta có





Nếu f(2)=1. Do

Quy nạp chứng minh f(n)=1 với mọi n nguyên dương.

Cho .

Nếu  , bằng quy nạp chứng minh được 

Do 

Quy nạp chứng minh  với mọi 

Cho

Lấy r là số nguyên lớn nhất sao cho 2r không vượt quá n.

Nếu 2r=n thì theo chứng minh trên có f(n)=n

Nếu n= 2r+s với .



.

Do  nên f(1) bằng 1, 2 hoặc 3.

Vậy f(n)=1 với mọi n nguyên dương hoặc; 