**CHUYÊN ĐỀ ÔN THI HSG TOÁN 11**

1. Ký hiệu  là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình



**Hướng dẫn giải**

Ta có 

pt





Vậy 

1. Tìm tất cả các đa thức  thỏa mãn điều kiện

.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử . So sánh bậc của *x* trong hai vế của (1) ta được

.

Khi  ta được đa thức hằng . Thay vào (1) ta được .

Vậy  và  là các đa thức hằng thỏa mãn yêu cầu.

Khi  ta giả sử  với .

So sánh hệ số cao nhất trong (1) ta được . Do  nên ta có .

Vậy ta có . Thế vào (1) kiểm tra thấy thỏa mãn.

Kết luận: ,  và .

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho (n - 1)! không chia hết cho n2.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét rằng khi n là số nguyên tố thì do (n - 1) < n nên (n - 1)! hiển nhiên không chia hết cho n, và do đó không chia hết cho n2.

Ta sẽ tìm n không nguyên tố thỏa (n - 1)! không chia hết cho n2.

Ta có:  . Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một ước số p của n sao cho bậc của p (số mũ lũy thừa của p trong phân tích thừa số nguyên tố) trong n! là bé hơn bậc của p trong n3

Giả sử  (với (p, k)=1). Theo lí luận trên ta có bất đẳng thức:  (\*)

Suy ra:   

 (\*\*). Suy ra:  

Ta xét 3 trường hợp và dùng các phép thử lại để làm rõ kết quả bài toán

 **TH1**: t = 1. Ta có: (\*\*) . Suy ra  hoặc  (Do  thì n trở thành số nguyên tố)

**+** Với k = 2:  (p nguyên tố).

Thử lại: p = 2 thì n = 4 (thỏa); : (\*)   (đúng)

+ Với k = 3:  (p nguyên tố)

Thử lại: p = 2 thì n = 6 (thỏa); p = 3 thì n = 9 (thỏa); :

(\*)  (sai)

 **TH2**: t = 2. Ta có (\*\*) . Suy ra  hoặc  (Do )

+ Với k = 1, ta được   .

Thử lại ta chọn: n = 4, n = 9.

**+** Với k = 2, ta được   .

Thử lại ta thấy n = 8 thỏa mãn.

 **TH3**: t = 3. Ta có (\*\*) .

Suy ra  (Do )

**+** Với k = 1, ta được    (thỏa)

Vậy tập tất cả các giá trị của số tự nhiên n thỏa  là  với p nguyên tố.

1. Cho  số nguyên lẻ . Chứng minh rằng phương trình  không có nghiệm hữu tỷ.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử phương trình  (1) có nghiệm hữu tỷ , .

Thay  vào (1) ta có  (2)

Suy ra , vì  nên .

Tương tự ta có .

Vì  là những số lẻ nên  lẻ.

Vế trái của (1) là tổng của  số lẻ vì vậy đẳng thức (1) không xảy ra nên phương trình không có nghiệm hữu tỷ.

1. Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trên trong đoạn . Gọi *T* là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S. Với mỗi tập hợp , ký hiệu  là trung bình cộng của tất cả các số thuộc . Đặt  (ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp ). Hãy tính giá trị của *m*.

**Hướng dẫn giải**

Với mỗi  đặt  ở đây tổng được lấy theo tất cả các tập hợp  mà .

Xét số a bất kỳ thuộc S, suy ra *a* có mặt trong  tập mà .

Suy ra 

Do đó 

Mà 

**Cách 2.** Xây dựng song ánh từ T vào T như sau

****

**Suy ra **

**Suy ra **

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  để phương trình  có nghiệm nguyên dương. Giải phương trình nghiệm nguyên dương với  nhỏ nhất tìm được.

**Hướng dẫn giải**

Tìm k (dùng kĩ thuật pt Markov).

+) Gọi  là một giá trị thỏa mãn. Với  đó, gọi  là nghiệm nguyên dương của pt đã cho sao cho  nhỏ nhất. KMTTQ coi .

Khi đó ta có đẳng thức .

+) Xét pt bậc 2: , dễ thấy pt có 1 nghiệm , nên có nghiệm , với (1) và (2).

Do  đều nguyên dương nên 2 đẳng thức trên chứng tỏ  cũng nguyên dương. Điều đó suy ra  cũng là một nghiệm nguyên dương của pt đã cho, do tính “nhỏ nhất” của  nên .

Kết hợp (2) được 

Lại có  nên , suy ra  hay .

+) Kết hợp (1)(2) được  là nguyên dương, từ đây  = 1 hoặc 2, tương ứng k chỉ có thể là 3 hoặc 4.

+)(**1đ)** Giải pt

Với k=3 là giá trị nhỏ nhất tìm được, pt cần giải tương đương



Để pt có nghiệm nguyên thì biệt thức là số chính phương hay

 .

Bẳng cách giải pt kiểu Pell ta được nghiệm (t,y) thỏa mãn

 tương ứng với 3 nghiệm riêng =(1,1), (4,2), (11,5) trong đó (để thỏa mãn y nguyên dương)

Từ đó ta có công thúc cụ thể cho giá trị y của nghiệm (x,y) (tất nhiên nguyên dương), còn giá trị  (đảm bảo là số nguyên dương).

1. Cho đa thức  với hệ số thực. Chứng minh rằng nếu tất cả các nghiệm của  là số thực và phân biệt thì .

**Hướng dẫn giải**

Xét đa thức  có tất cả các nghiệm là số thực và phân biệt. Hơn nữa phương trình bậc 2  cũng có các nghiệm thực phân biệt, suy ra 

Với  thì (1) đúng, cũng có nghĩa mọi đa thức thỏa mãn đề bài thì hệ số của *x* thỏa mãn (1).

Với mỗi , xét đa thức  cũng có tất cả các nghiệm là số thực và phân biệt.

Áp dụng BĐT cho  ta có .

Trong đó 

Suy ra 

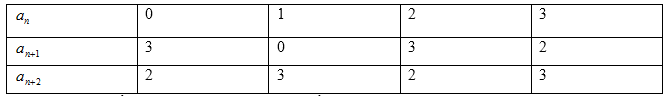
Hay 

Ta có điều phải chứng minh.

1. Cho dãy số . Chứng minh có nhiều nhất 1 số hạng của dãy là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

So sánh đồng dư của ,  và  theo modun 4 ta có (chú ý )



Một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vì vậy từ số hạng thứ 3 trở đi, dãy không có số chính phương nào.

Nếu cả  và  đều chính phương, giả sử ,

suy ra 

hơn nữa khi phân tích 2019 thành tích chỉ có 2 cách .

Trường hợp 1: , vô lí do 1009 không là lập phương.

Trường hợp 2: , vô lí do 335 không là lập phương.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là dãy trên có nhiều nhất 1 số chính phương.

1. Với *n* là số nguyên dương, một tập con của tập  được gọi là tốt nếu sau khi ta sắp xếp thứ tự tăng các phần tử của nó thì thu được các số lẻ, chẵn, lẻ, … theo thứ tự.

Ví dụ các tập con tốt là , tập . Tập không là tập con tốt do nó bắt đầu bởi số chẵn.

Tính số tập con tốt của tập .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là số tập con tốt của .

Ta lập hệ thức truy hồi của .

+ Nếu tập con tốt của  không lấy *n* thì ***.***

+ Nếu tập con tốt của  lấy *n* thì ***.***

Vậy ta có .

Hơn nữa 

Phương trình đặc trưng 

Suy ra 

Thay 2 giá trị đầu ta được 

Suy ra



1. Cho đa thức . Chứng minh rằng với mỗi  tồn tại số tự nhiên n sao cho ta luôn có .

**Hướng dẫn giải**

Cho x, y là hai số nguyên bất kỳ, ta chứng minh 

Thật vậy, hiển nhiên .

Biến đổi 

,

Do đó, nếu 

Nếu xảy ra (1) ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu xảy ra (2), thì có hai khả năng

, mà suy ra  là số chính phương mod 101 nên sử dụng ký hiệu Legendre có

 (mâu thuẫn)

, thu được , từ đó suy ra .

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có .

Xét 102 số . Theo nguyên lý Drichlet, tồn tại ,  sao cho .

Từ nhận xét trên rút được .

Vậy suy ra điều phải chứng minh

1. Với mỗi hoán vị  của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu  là tổng của ba số có 3 chữ số , , . Trong các  có hàng đơn vị bằng 0, gọi  là giá trị nhỏ nhất của nó và  là số các hoán vị  thỏa mãn . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Với mỗi hoán vị  của các chữ số 1, 2, …, 9, kí hiệu  là tổng của ba số có 3 chữ số , , . Trong các  có hàng đơn vị bằng 0, gọi  là giá trị nhỏ nhất của nó và  là số các hoán vị  thỏa mãn . Tính .

Để  đạt giá trị nhỏ nhất thì 3 chữ số hàng trăm là 1, 2, 3,  có chữ số tận cùng bằng 0 thì các chữ số hàng đơn vị có tổng là bội của 10. Và từ các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9 không có ba số nào có tổng bằng 10 và vì  nên 3 chữ số hàng đơn vị phải có tổng bằng 20, ta thấy , có ba bộ số có thể xếp vào 3 chữ số ở hàng đơn vị, tương ứng các chữ số còn lại sẽ là hàng chục. Do đó giá trị nhỏ nhất của  là 

Như vậy có 3 trường hợp, trong mỗi trường hợp có 6 cách chọn 3 chữ số hàng trăm, 6 cách chọn 3 chữ số hàng chục và 6 cách chọn 3 chữ số hàng đơn vị. Vậy số các hoán vị  thỏa mãn yêu cầu bài toán là .

Vậy .

1. Cho  là các số nguyên thỏa mãn điều kiện:



Chứng minh tổng  không là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

1. Cho trước các số nguyên dương  Chứng minh rằng phương trình



có vô số nghiệm nguyên dương.

**Hướng dẫn giải**

1. Một số nguyên dương  được gọi là có tính chất *P* nếu nó thỏa mãn với mọi số nguyên dương  tùy ý,  chia hết  thì  cũng chia hết . Chứng minh rằng có vô số hợp số có tính chất *P.*

**Hướng dẫn giải**

Kí hiệu  là số nguyên tố thứ . Với mọi  ta có , như vậy luôn tồn tại một số  là ước số nguyên tố nhỏ nhất của .

Đặt , ta sẽ chứng minh  có tính chất *P.* Thật vậy, giả sử .

Xét hàm Ơle , .

Chú ý rằng  nên suy ra .



 chia hết cho 

Hiển nhiên  là một hợp số, và dễ thấy với hai số nguyên tố  và  đôi một khác nhau sẽ cho ta hai hợp số  và  khác nhau. Vì tập các số nguyên tố là vô hạn nên cũng có vô hạn hợp số có tính chất *P*



b. Tìm đa thức  với hệ số thực thỏa mãn  và



**Hướng dẫn giải**

a. Đặt  thì  Giả sử  là nghiệm của  khi đó 

Suy ra,  mà  nên  có vô số nghiệm. Do đó,  hay 

b. Đặt  thì  và



Suy ra,  hay 

1. Trên bảng có một số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu có số . Hỏi có thể hay không sau một số lần thực hiện như thế thế ta thu được số ?

**Hướng dẫn giải**

Giả sử số đang có trên bảng là .

Khi đó số nhận được sau một phép biến đổi là 

Ta thấy . Như vậy nếu  thì .

Do , còn  không chia hết cho 7 nên qua các phép biến đổi đã cho từ  không thể thu được .

1. Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau



Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên *n* sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó 





 (1). Lại có , suy ra 

  (do (1))

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2)

Chọn , , từ (2) ta có

.

Vậy  chia hết cho , 

1. Với mỗi số nguyên dương m, kí hiệu C(m) là số nguyên dương k lớn nhất sao cho luôn tồn tại một tâp S gồm m số nguyên dương để mỗi số nguyên chạy từ 1 đến k hoặc thuộc S hoặc là tổng hai phần tử thuộc S (hai phần tử này không nhất thiết phân biệt). Chứng minh: 

**Hướng dẫn giải**

Trước tiên ta tính thử một vài giá trị ban đầu của C(m) để cảm nhận bài toán.

Dễ thấy: C(1)=2; C(2)=4; C(3)=8

Nhận xét: Việc tính C(m) quy về việc đếm số phần tử của tập A xác định bởi: 

+) Chứng minh: 



Chú ý: Để đánh giá số phần tử của tập S+S ta chia hai trường hợp x trùng y và x khác y. Rõ ràng {1;2;3;.;k} là một tập con của A nên ta được đpcm.

+)Chứng minh: 

Ta sẽ chỉ ra một tập B sao cho với mọi số nguyên chạy từ 1 đến m(m+6)/4 hoặc thuộc B hoặc là tổng hai số (không nhất thiết phân biệt) thuộc S(m). Khi đó C(m)>=m(m+6)/4.

Xét hai trường hợp sau:

TH1: m = 2n.

Xét tập B(m) = {1; 2; 3;.; n; 2n+1; 3n+2;.; (n+1)n+n} gồm m phần tử và dễ thấy tập

chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến (n+1)n + 2n và rõ ràng (n+1)n + 2n = 2n(2n+6)/4

TH2: m = 2n+1

Khi đó ta xây dựng tập B(m)={1;2;3;.; n+1;2n+3;3n+5;.;(n+1)n+2n+1}gồm m phần tử và tập 

chứa dãy số liên tiếp từ 1 đến (n+1)n+3n+2 và rõ ràng (n+1)n+3n+2 > (2n+1)(2n+7)/4

Từ hai TH trên ta được đpcm.

1. Cho *m* > 1 là một số nguyên. Chứng minh rằng với mọi số nguyên *n* có thể biểu diễn dưới dạng *n* = *a* + *b*, trong đó *a* là một số nguyên nguyên tố cùng nhau với *m* và *b* là một số nguyên sao cho .

**Hướng dẫn giải**

- Ta xét trường hợp thứ nhất với , trong đó  là số nguyên tố và. Giả sử  là một số nguyên. Khi đó, xảy ra hai trường hợp:

a) *p* không chia hết *n*. Trong trường hợp này thì *ƯCLN* và ta có thể chọn .

b) *p* chia hết *n*. Trong trường hợp này *p* không chia hết *n* - 1 (bởi vì ngược lại *p* sẽ chia hết 1). Từ đây suy ra *ƯCLN* và ta có thể lấy 

- Ta đi đến trường hợp tổng quát với  với các số nguyên tố phân biệt *p1*, *p2*, *p3*,., *pr* và các số nguyên dương . Giả sử *n* là một số nguyên. Bằng cách sử dụng trường hợp ở trên, với mỗi *k* sao cho

, thì có  để , *ƯCLN* và 

-Theo định lí Trung Hoa về phần dư thì tồn tại một số nguyên *b* sao cho  với k = 1, 2,., *r*

Vì  và  là các số nguyên tố phân biệt nên ta kết luận rằng ,

tức là .

1. Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6 x 5 bằng cách sau: Cho phép thay đổi vị trí của các số trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau đó hay không?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 29 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 |  | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 |  | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |

Bảng 2

Bảng 1

**Hướng dẫn giải**

Giả sử nhờ phép chuyển số theo qui tắc của đề bài, từ Bảng 1 ta có thể nhận được Bảng 2 **(\*)**

Ta coi ô trống của mỗi bảng là ô được điển số 0. Với mỗi bảng số nhận được trong quá trình chuyển số, ta liệt kê tất cả các số trong bảng theo thứ tự từ hàng trên xuống hàng dưới và trong mỗi hàng thì từ trái qua phải. Khi đó ứng với mỗi bảng số ta sẽ có một ***hoán vị*** của 30 số tự nhiên đầu tiên. Và do đó, điều giả sử (\*) tương đương với: Từ hoán vị (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29) (***gọi là hoán vị a***) có thể nhận được hoán vị (29, 2, 3, 4,.,11. 12, 0, 13, 14, 15,.27, 28, 1) (***gọi là hoán vị b***) nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ hai số trong hoán vị theo qui tắc: Mỗi lần, lấy hai số 0 của hoán vị rồi đổi vị trí của số 0 đó cho một số liền kề với số 0 đó. **(1)**

+) Giả sử (a1, a2, a3, ……, a30) là một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Ta gọi cặp số  là cặp số ngược của hoán vị vừa nêu nếu  và . Dễ thấy, sau một lần thực hiện phép đổi chỗ hai số kề nhau đối với hoán vị (a1, a2, a3, ……, a30) thì số cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm đi một đơn vị.

+) Khi chuyển chỗ hai số  và ( *n* 1 tùy ý) trong một hoán vị, cũng tức là chuyển  liên tiếp qua *n* số kề với nó và chuyển  liên tiếp qua *n* – 1 số kề với nó, nghĩa là chuyển 2*n* – 1 (một số lẻ lần) hai số kề nhau, do đó cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm một số lẻ đơn vị. **(2)**

+) Ta có: Số cặp số ngược của của hoán vị ***a*** là 12 và số cặp số ngược của hoán vị ***b*** là 67. Từ đó, kết hợp với (2), suy ra từ hoán vị ***a*** ta chỉ có thể nhận được hoán vị ***b*** sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ hai số nào đó. Điều này cho thấy, nếu từ Bảng 1 ta nhận được Bảng 2 thì số lần đổi chỗ hai số ở hai ô nào đó phải là số lẻ. **(3)**

+) Tô màu tất cả các ô vuông con của bảng 6 x 5 bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô kề nhau có màu khác nhau. Sau mỗi lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo cột hay theo hàng thì số 0 được chuyển từ ô có màu này sang ô có màu kia. Và vì thế do số 0 ở bảng 1 và số 0 ở bảng 2 nằm ở hai ô cùng màu nên từ bảng 1 ta chỉ nhận được bảng 2 sau một số chẵn lần đổi chỗ hai số ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0. Điều này mâu thuẫn với **(3)** và mâu thuẫn đó cho thấy: Từ Bảng 1 ta không thể nhận được Bảng 2 nhờ một số hữu hạn lần đổi chỗ ở hai ô kề nhau, trong đó có số 0 ở ô trống, theo quy tắc của đề bài

1. Ban đầu ta có bộ số  trong đó  là các số nguyên đôi một khác nhau. Thực hiện thuật toán sau: nếu có bộ số  với  nguyên thì được phép thay thế bởi bộ số . Chứng minh rằng việc thực hiện thuật toán trên sẽ dừng lại sau hữu hạn bước.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử ngược lại, ta nhận được bộ số với các thành phần là số nguyên.

Gọi  trong đó  là bộ số nhận được sau bước thứ .

Ta có: .

Do  nên tồn tại  sao cho .

Khi đó ta có: .

Đặt .

Ta có: .

Suy ra: .

Đặt .

Ta có:.

Suy ra: . Thế thì .

Tiếp tục quá trình lập luận như trên dẫn đến .

Vậy ta hoàn tất chứng minh.

1. Có bao nhiêu cách phân tích thành tích của 3 số nguyên dương, biêt các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

**Hướng dẫn giải**

Xét phân tích với

Với mỗi , có cách chọn số , để

từ đó chọn .

Vậy số cách chọn các bộ là 10+9+.+1 = 55 cách

số cách chọn các bộ và là 55.55 cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

1. và (a; b) (3; 3).
2. Khi đó a {0; 1; 2; 3; 4}; b {0; 1; 2; 3; 4 } và (a; b) (3; 3)

→ số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên.

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.

Vậy số cách phân tích là: cách

1. Cho bộ số .

**1)** Chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi  và . Hỏi có thể nhận được bộ số sau:  thỏa mãn  sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu ?

**2)** Nếu chúng ta thực hiện phép biến đổi trên các bộ 3 số như sau: thay hai số trong chúng, ví dụ a và b, bởi  và . Hỏi có thể nhận được bộ số sau khi thực hiện hữu hạn phép biến đổi từ bộ số ban đầu 

**Hướng dẫn giải**

Ta thực hiện theo cấu hình sau 

Dễ thấy:

Trong mọi cấu hình ta luôn có: Tổng bình phương các số là không đổi

Lại có: 

Vậy câu trả lời là phủ định.

1. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương m sao cho  chia hết cho m.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Ta chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương m, ta có: 

Với , khẳng định đúng

Giả sử khẳng định đúng với m nguyên dương nào đó, tức là tồn tại k nguyên dương sao cho .

Ta có:





với t là một số nguyên dương nào đó.

Như vậy, khẳng định được chứng minh

1. Tìm các số nguyên tố (không cần phân biệt) mà tích của chúng bằng mười lần tổng của chúng.

**Hướng dẫn giải**

1. Tìm tất cả các số tự nhiên *n* sao cho tìm được các số nguyên a, b, c thỏa mãn a + b + c = 0 và an + b n + cn là số nguyên tố

**Hướng dẫn giải**

1. Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn a2 + b2 + ab = c2 + d2 + cd. Chứng minh rằng: a + b + c + d là hợp số.

**Hướng dẫn giải**

1. Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho q chia hết cho p với mọi số nguyên dương n?

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tồn tại hai số p, q nguyên dương phân biệt sao cho q chia hết cho p với mọi số nguyên dương n, thế thì q > p.

Giả sử a là một số nguyên tố lớn hơn q và n là số tự nhiên thỏa mãn . Khi đó n = (p+1)a –p  (1)

Vì p < q < a nên (p, a) =(q, a)=1. Theo định lý nhỏ Fermat, ta có



Do đó (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (4)

Chứng minh tương tự, ta được 

Từ (1) và (3) suy ra  (5)

Từ (4) và (5) suy ra . Điều này không thể sảy ra vì 

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt p, q sao cho  chia hết cho  với mọi số nguyên dương n.

1. Cho các số nguyên dương  một bảng hình vuông kích thước  được gọi là bảng “hoàn thiện” nếu tất cả các ô của nó được điền bởi các số nguyên không âm (không nhất thiết phân biệt) sao cho tổng các số trên mỗi hàng và mỗi cột đều bằng  Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lập bảng “2015-hoàn thiện” kích thước 3x3 sao cho số nhỏ nhất trong các số ở các ô trên đường chéo chính nằm ở vị trí tâm của bảng? (Ô ở đường chéo chính của bảng là ô ở vị trí giao của dòng có số thứ tự tính từ trên xuống và cột có số thứ tự tính từ trái sang bằng nhau; ô ở tâm bảng 3x3 là ô ở dòng thứ 2 và cột thứ 2).

**Hướng dẫn giải**

Ta giải bài toán trong trường hợp lập bảng “hoàn thiện” kích thước 3x3.

Gọi lần lượt là các số điền được ở đường chéo chính và ô ở vị trí dòng 1 cột 2, khi đó các số còn lại ở các ô được xác định duy nhất như hình bên dưới

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Vì các số được điền là không âm và là số nhỏ nhất trong các số ở đường chéo chính nên các điều kiện sau phải thỏa



Các điều kiện trên có thể rút gọn lại thành



Khi đó .

Ta thấy rằng bộ bốn số không âm sắp theo thứ tự tăng dần xác định duy nhất bộ các số thỏa mãn  và tương ứng với một cách lập bảng “hoàn thiện”. Do vậy, số cách lập được là 

Áp dụng với được kết quả là 

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho cả hai số và đều là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

n=0thỏa mãn bài toán.

Xét n>0, nếu cả hai số  và  đều là số chính phương thì số  cũng là số chính phương. Mặt khác ta lại có



Thế nên ta phải có  hoặc , từ đó thay vào giải ra hai trường hợp ta được . Vậy có ba giá trị của n thỏa mãn là 0;1;52.

1. Chứng minh rằng trong bảy số chính phương tuỳ ý luôn có hai số khác nhau mà hiệu của chúng chia hết cho 20.

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy, với mọi số chính phương khi chia cho 20 chỉ có thể dư 1; 2; 4; 8; 16.

Nếu ta có 7 số chính phương thì theo nguyên lý Đirichlê, sẽ tồn tại ít nhất hai số chính phương khác nhau trong 7 số chính phương đó, có cùng số dư khi chia cho 20.

1. Cho *a, b, c* là các số thực thỏa mãn. Chứng minh rằng đa thức có một nghiệm trong đoạn.

**Hướng dẫn giải**

Đặt. Khi đó là hàm liên tục trên R và ta có

. Do vậy

.

Nếu một trong các số  bằng 0 thì hiển nhiên phương trình có một nghiệm trong đoạn

Nếu các số này đều khác 0 thì hai trong chúng phải khác dấu và do là hàm liên tục nên phương trình có một nghiệm thuộc một trong các đoạn  . Do đó nó có có một nghiệm thuộc đoạn 

1. Tìm đa thức P(x) thoả mãn điều kiện:



**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết: , thay y = x ta được P(0) = 0. Đặt P(x) = xQ(x) thì    .

Thay y = x ta được .

Ta có: 

Vậy 

Thử lại ta được  thoả mãn bài toán.

1. Tìm tất cả các số nguyên  sao cho tồn tại đa thức  với hệ số nguyên thỏa mãn



**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy nếu  là lập phương của một số nguyên thì  thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.Bây giờ ta xét trường hợp  không phải là lập phương của một số nguyên. Ta cần ba bổ đề sau

**Bổ đề 1.**Nếu , ,  là các số nguyên thỏa mãn  thì .

**Bổ đề 2.** Nếu  là một đa thức với hệ số nguyên thì tồn tại duy nhất bộ ba  các số nguyên sao cho 

**Bổ đề 3.** Nếu  là một đa thức với hệ số nguyên và

thì

Quay trở lại bài toán, giả sử  thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. Ta có



với là một đa thức với hệ số nguyên. Áp dụng bổ đề 3 cho  ta có , suy ra  (ta đang xét  không phải là lập phương của một số nguyên.) Ngược lại, với  ta có thể chọn  đểcó .

Vậy các giá trị  phải tìm là  hoặc  là lập phương của một số nguyên.

1. Cho  và  là các số nguyên dương khác . Tìm số nguyên dương  bé nhất sao cho trong mỗi  số nguyên phân biệt thuộc đoạn , tồn tại  số khác nhau có tổng bằng .

**Hướng dẫn giải**

Ta sẽ chứng minh giá trị nhỏ nhất của là , ở đây  nếu , là số chẵn và ,  trong các trường hợp còn lại.

Rõ ràng giá trị nhỏ nhất của  là tồn tại, ký hiệu nó bởi . Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử .

Đoạn  chứa  số không âm và không có ba số nào có tổng bằng , suy ra trong mỗi trường hợp . Khi , là số chẵn và  thì tập  gồm  số và không có ba số nào có tổng bằng . Do đó . Bây giờ ta đi chứng minh . Xét ba trường hợp

Trường hợp 1:  và  là hai số lẻ bằng nhau.

Bằng quy nạp theo ta chứng minh được

**Bổ đề.** Nếu  và  không chứa ba phần tử có tổng bằng thì .

Thật vậy, khẳng định hiển nhiên đúng với . Giả sử nó đúng với các số lẻ bé hơn . Xét tập  sao cho  không chứa ba phần tử có tổng bằng .

Đặt . Nếu  thì theo giả thiết quy nạp. Bây giờ ta xem là . Chắc chắn  chứa hai phần tử cùng dấu, giả sử hai phần tử đó âm, do đó . Suy ra với mỗi , nhiều nhất một phần tử trong  sẽ thuộc , suy ra  chứa nhiều nhất  phần tử dương, dấu bằng có thể xảy ra chỉ khi .

Nếu  thì bởi tính đối xứng,  chứa nhiều nhất  phần tử âm, do đó .

Nếu  thì do . Ta có  không thể chứa cả hai  và với . Mà  chứa và ,  chứa nhiều nhất  phần tử dương, và  có thể chứa . Suy ra .

Vậy bổ đề được chứng minh.

Bây giờ gọi  là một tập con bất kỳ của  sao cho . Ta sẽ chứng minh rằng  có ba phần tử có tổng bằng , và do định nghĩa của  ta có luôn . Cố định , và giả sử ngược lại rằng trong  không có ba phần tử nào có tổng bằng . Ta có , vì nếu trái lại trong  sẽ chứa ba số có tổng bằng  dạng . Áp dụng bổ đề cho tập  ta có , vô lý.

Trường hợp 2:  và  là hai số chẵn bằng nhau.

Gọi  là một tập con bất kỳ của  sao cho . Ta sẽ chứng minh rằng  có ba phần tử có tổng bằng , và do định nghĩa của  ta có luôn . Cố định , và giả sử ngược lại rằng trong  không có ba phần tử nào có tổng bằng . Ta có , vì nếu trái lại trong  sẽ chứa ba số có tổng bằng  dạng . Áp dụng bổ đề cho tập  ta có , vô lý.

Trường hợp 3: .

Gọi  là một tập con bất kỳ của  sao cho . Ta sẽ chứng minh rằng  có ba phần tử có tổng bằng , và do định nghĩa của  ta có luôn . Cố định , và giả sử ngược lại rằng trong  không có ba phần tử nào có tổng bằng . Ta có , vì nếu trái lại trong  sẽ chứa ba số có tổng bằng  dạng .

Nếu  chẵn thì , theo trường hợp 1 ta có , suy ra , vô lý.

Nếu  lẻ thì , theo trường hợp 1 ta có , suy ra , vô lý.

Bài toán được giải hoàn toàn.

1. Cho tập hợp . Tìm số k nguyên dương nhỏ nhất sao cho với mọi tập con gồm k phần tử của tập hợp X đều chứa ít nhất 5 số nguyên liên tiếp.

**Hướng dẫn giải**

Xét tập hợp 

Với k không lớn hơn 1613, thì chọn bất kỳ tập hợp B là tập con gồm k phần tử của A, cũng là tập con của X và B không thể chứa 5 số nguyên liên tiếp. (1,5 điểm)

Nếu k = 1614. Xét C là một tập con của X gồm 1614 phần tử  (1.5 điểm)

Nếu mỗi tập hợp trên chứa tối đa 4 phần tử thuộc C thì số phần tử của C không quá 4x403+1= 1613 ( vô lý). Vậy trong các tập hợp gồm 5 phần tử trên phải có 1 tập là con của C nên C chứa 5 số nguyên lien tiếp.

Vậy số k nhỏ nhất cần tìm bằng 1614.

1. Cho , a0 < a1 < a2 < …< an là các số nguyên và P(*x*) là đa thức bậc n có hệ số cao nhất bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại i ∈ {0, 1, …, n} sao cho .

**Hướng dẫn giải**

Khai triển đa thức P(x) theo công thức nội suy Lagrange có:

.

Xét hệ số của  có:



Đặt , vì a0 < a1 < a2 < …< an là các số nguyên nên có:



Lại có . Từ đó suy ra: 

 vì  để .

1. Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực thỏa mãn:



**Hướng dẫn giải**

Nếu degP = 0 thì , c là hằng số

Từ (1) 

Suy ra trường hợp này có hai đa thức:  thỏa đề ra

▪ Nếu degP = m với m lẻ thì đa thức  luôn có 1 nghiệm 

Từ (1) suy ra:  suy ra  cũng là nghiệm của 

Xét dãy số: 

Dễ dàng ta thấy là dãy tăng và bằng quy nạp theo n ta có: , 

Do đó đa thức  có vô số nghiệm: điều này vô lý.

Vì vậy degP(x) là chẵn

▪ Xét degP(x) = 2n, 

• Ta viết lại , 

Từ quan hệ (1) của bài toán, ta đồng nhất hệ số của ở cả hai vế phương trình hàm, ta được:



• Ta đặt  với  và 

Khi đó: 



, (2)

Vì: 

Mà  suy ra: VT(2) có bậc là: , VP(2) có bậc là *2k*

Nhưng: 

Do đó phải có , ta tìm được: 

▪ Vậy các đa thức cần tìm là: , 

1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực P(x) không đồng nhất không thỏa mãn: P(2014) = 2046, ****

**Hướng dẫn giải**

Giả sử P(x) thỏa mãn đầu bài. Khi đó ta có



Suy ra  Đặt x0=2014, ta có  do P(2014) = 2046.

Xét dãy {xn} như sau: x0=2014, 

Khi đó



Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được

(\*) Xét đa thức hệ số thực  Từ (\*) ta có Q(x) nhận xn làm nghiệm với mọi n=0,1,2…

Mặt khác do dãy  tăng nghiêm ngặt nên Q(x) 0 suy ra P(x) = x+32

Thử lại ta có P(x) thỏa mãn đầu bài.

Vậy: Có duy nhất đa thức P(x) = x + 32

1. Cho đa thức , với . Chứng minh rằng tồn tại sao cho  với mọi *m*.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét 821 là một số nguyên tố có dạng . Để chứng minh bài toán ta chứng minh  là một hệ đầy đủ với mọi *m*. Nghĩa là  thì 

Vì  nên .



 (1), với mọi *m*.

Ta chứng minh bổ đê sau; nếu  thì  với  là một số nguyên tố. Thật vậy.

Nếu 

Nếu  hay  và , theo Fermat ta có 

Từ 

Vậy từ (1) , và vì  nên . Vậy  là một hệ đầy đủ với mọi *m*.

Suy ra với mọi *m*, tồn tại sao cho  thỏa mãn .

1. Cho đa thức .

Đặt . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n thỏa mãn  chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x.

**Hướng dẫn giải**

***Bổ đề:*** 

*Chứng minh:*

Ta chỉ cần chứng minh 

Thật vậy

Do đó 

Nếu . Do đó 

Nếu .

Áp dụng định lý Fermat với 2003 là số nguyên tố ta có:



Mặt khác 

 (đpcm).

***Trở lại bài toán:***

Đặt A={0;1;2;.2002}. Với mỗi , xét dãy P1(x), P2(x).,P2004(x).

Theo nguyên lý Dirichle tồn tại các số m,k thỏa mãn  và  suy ra 

Áp dụng bổ đề ta có .

Vì vậy với mỗi  luôn tồn tại  thỏa mãn: .

Lấy một bội số chung n > 1 của n0, n1,.n2012. Ta sẽ chứng minh n là một giá trị thỏa mãn yêu cầu cầu của đề bài.

Thậy vậy với  ta dễ thấy 

Với mỗi số nguyên  luôn tồn tại suy ra 

Vì vậy  chia hết cho 2003 với mọi số nguyên x.

Vì tồn tại vô hạn bội chung n > 1 của n0, n1,.n2012 nên có vô hạn n thỏa mãn bài toán (đpcm).

1. Tìm các chữ số  sao cho  chia hết cho 2017

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Ta có



Vì (1139, 2017) = 1 nên

.

Vì  nên . Do đó

.

Từ đây suy ra các chữ số .