**Loại 8: Các bài toán khác.**

1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ ( Bảng A-Vòng 1)- năm học 1999-2000]

Tập hợp M gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng sao cho với mọi điểm X thuộc M tồn tại đúng 4 điểm thuộc M có khoảng cách đến X bằng 1. Hỏi tập hợp Mcó thể chứa ít nhất là bao nhiêu phần tử?.

**Lời giải**

Rõ ràng có ít nhất hai điểm P,Q thuộc M sao cho PQ ≠ 1.

Ký hiệu MP={X∈M/PX=1}. Từ giả thiết |MP|=4 ta có: |Mp∩Mq|≤2.

Nếu tồn tại P, Q sao cho |Mp∩Mq|≤1 thì M chứa ít nhất 9 điểm.

Trường hợp với mọi P,Q sao cho PQ ≠ 1 và |Mp ∩ Mq| = 2.

Khi đó Mp∩Mq={R,S}, lúc đó MP={R,S,T,U} và Mq={R,S,V,W} và giả sử

M = {P,Q,R,S,T,U,V,W} ta có TQ ≠ 1, UQ ≠ 1, VP ≠ 1, WP ≠ 1.

Nếu TR,TS,UR,US khác 1: suy ra Mt∩Mq=Mu∩Mq={V,W} suy ra T hay U trùng với Q, vô lý.

Nếu TR,TS,UR,US có một số bằng 1: Không giảm đi tính tổng quát, giả sử TV = 1 lúc đó TS ≠ 1 và TV=1 hay TW=1. Giả sử TV=1 lúc đó TW≠1 suy ra TU = 1, và Mt = {P,R,U,V} và Mu={P,T,V,W} lúc đó UTV, RPT,UTV là các tam giác đều cạnh 1, ta có hình 1. Điều này mâu thuẫn vì VR>2.

Vậy M chứa ít nhất là 9 điểm. Dấu bằng xảy ra với hình2.

Vậy M có thể chứa ít nhất là 9 điểm.

A4

A8

A6

A5

A9

A7

A1 A2

A3

V

T

R

U

P

1. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác đều ABC:

M là điểm nằm trong tam giác sao cho . Hãy tính góc 

Một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) sao cho tứ diện SABC đều, gọi I, K là trung điểm của các cạnh AC và S**B.** Trên đường thấng AS và CK ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BI. Tính độ dài PQ biết cạnh của tứ diện có độ dài bằng 1.

1. [Trường THPT Trần Nguyên Hãn- Hải Phòng- năm học 2008-2009]

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho

MA+MB+MC nhỏ nhất.

**Lời giải**

Dùng phép quay quanh A với góc quay 600 biến M thành M’; C thành C’

Ta có MA+MB+MC = BM+MM’+M’C’

MA+MB+MC bé nhất khi bốn điểm B,M,M’,C’ thẳng hàng.

Khi đó góc BMA=1200, góc AMC=1200

Ta được vị trí của M trong tam giác ABC

1. [Trường THPT Chuyên Biên Hòa- Tỉnh Hà Nam]

Cho đường tròn(O) có đường kính AB, P là điểm bất kì trên đường tròn, K là hình chiếu của P trên AB, R đối xứng với P qua A**B.** H bất kì trên A**B.** RH cắt lại (O) tại Q. Gọi đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với HP,HQ và đường tròn (O)

Chứng minh:  =+

**Lời giải**



Gọi T là tiếp điểm của (I) và HQ

J là điểm∈ IH sao cho HJ = HT

PQ cắt AB tại X, AP cắt BQ tại W

AQ cắt PB tại J’

⇒ J’ là trực tâm Δ WAB

H,J,I,W thẳng hàng



tantan(==

=

==-tan

=1800 

Hai tam giác HKR và HTI đồng dạng với nhau nên ta có



**LOẠI 8: Các bài toán khác**

1. **[ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH** -2005]

Biết rằng số đo ba góc trong của tam giác  lập thành một cấp số nhân với công bội . Gọi  là đường tròn ngoại tiếp và  là trọng tâm của tam giác .

1) Tính độ dài đoạn  theo .

2) Biêt , hãy tính gần đúng số đo diện tích tam giác  (lấy đến  chữ số sau dấu phảy).

1. **[ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN TỈNH NAM ĐỊNH -2004]**

Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi  có: 

1) Nếu biết Hãy tính diện tích tứ giác theo .

2) Giả sử tứ giác  thay đổi, mà  không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác 

1. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐÒNG BẰNG BẮC BỘ** **NĂM HỌC 2013-2014]**

Cho  và một điểm  nằm ngoài . Chứng minh rằng các đường chéo của bất kì hình thang nào nội tiếp  mà hai cạnh bên kéo dài gặp nhau tại đều cắt nhau tại một điểm cố định

**Hướng dẫn giải**

****

Gọi  là giao điểm của  và  

Ta có 

Do 



 hay  cố định.

1. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN ]**

Cho tam giác đều  nội tiếp đường tròn .  là một điểm di động trên đoạn  ( khác ). Đường thẳng đi qua  và vuông góc với  cắt cung nhỏ  tại . Gọi  là hình chiếu của  trên .

a) Các tiếp tuyến của  tại  và  cắt tiếp tuyến tại  của  lần lượt tại . cắt  lần lượt tại  và . Chứng minh .

b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác  theo 

**Lời giải**

Có tứ giác  nội tiếp 

sđ;sđ

  tứ giác  nội tiếp 

Từ và ta có năm điểmcùng nằm trên một đường tròn



 và  đồng dạng

 hay 

Trên đoạn  lấy điểm  sao cho

  đều







Chu vi tam giác  là 

Đẳng thức xảy ra khi  là đường kính của  =>  là điểm chính giữa cung  =>  là trung điểm đoạn 

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác  là 

Gọi  là giao điểm của  và  

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác  là .

1. [TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI TRƯỜNG THPT CHUYÊN TỈNH SƠN LA ]

Cho tam giác  vuông tại  có  là đường cao.  là điểm tùy ý thuộc đoạn  ( khác  và ); gọi P là điểm thuộc  kéo dài sao cho  và  là điểm thuộc tia  kéo dài sao cho ;  cắt  tại . Chứng minh rằng 

**Hướng dẫn giải.**



Gọi và  lần lượt là giao điểm của ,  với đường tròn ngoại tiếp tam giác ; I là giao điểm của  và .

 là đường kính của  nên,  là hai đường cao của tam giác , do đó  là trực tâm của tam giác   thẳng hàng.



Suy ra hai tam giác ,  đồng dạng

Suy ra góc suy ra tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

Suy ra góc  và  (1)

Tương tự ta có: góc và . (2)

Từ (1) và (2) và ( do tứ giác  nội tiếp) nên.

1. **[THI HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2013 - 2014** ]

Gọi  là ba đường phân giác trong của tam giác  vuông ở . Đoạn thẳng  cắt  tại . Đường thẳng qua  song song với  cắt  lần lượt ở . Chứng minh rằng: 

1. **[THI HỌC SINH GIỎI TỈNH THÁI NGUYÊN GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LỚP 11NĂM HỌC 2011-2012 ]**

Qua một điểm nằm trong tam giác kẻ 3 đường thẳng song song với các cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành 6 phần, trong đó có 3 tam giác với các diện tích là ,; Tính diện tích của tam giác đã cho theo S1, S2, S3.

**Hướng dẫn giải.**

hay 

Tương tự, 

Từ đó 



Suy ra

Hay 

Thay số ta có: 

1. **[THI HSG TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH 2006-2007]**

T ìm điểm trong tam giác nhọn cho trước để  bé nhất

**Lời giải**.

Dựng tam giác ngoại tiếp tam giáccó các cạnh tỷ lệ 

 nhìn các đoạn các góc bù góc 

**A**

**B**

**C**

**M**

**X**

**Y**

**Z**

Sử dụng giao các cung chứa góc tìm được trong tam giác 

1. **[ĐỀ THI HSG VÒNG 1TRƯỜNG THPT TRƯNG VƯƠNG- BÌNH ĐỊNH]**

Cho các điểm nằm trên các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng trong ba tam giác ,,có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng một phần tư diện tích tam giác .

**Lời giải**

****

.Tương tự có



Từ đó suy ra điều phải chứng minh

1. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ.TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT – QUẢNG NGÃI NĂM 2016** ]

Cho tam giác  thay đổi nhưng luôn là tam giác nhọn có tổng các bình phương các độ dài các cạnh là không đổi. Gọi  là đường phân giác trong, lần lượt là hình chiếu vuông góc của  trên ,  là giao điểm của ,  là giao điểm của  và đường cao kẻ từ của tam giác . Tìm giá trị lớn nhất của tổng  khi tam giác  thay đổi.

**Lời giải**

Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên. Ta chứng minh  thẳng hàng bằng cách chứng minh  đồng quy.

Vì lần lượt thuộc các đoạn  nên





A

E

K

F

C

A’

D

B

Do đó theo định lý Ceva,  đồng quy hoặc song song. Mà ba đường thẳng này không thể song song nên chúng đồng quy hay  nằm trên đường cao của tam giác , do đó,  là trực tâm của tam giác .

Gọi  là hai đường cao còn lại của tam giác  và  lần lượt là độ

dài các cạnh  thìtheo tính chất tứ giác nội tiếp ta có



Tương tự, có 

Lại có 

nên



*= a2 + b2 + c2.*

Dấu “=” chỉ xảy ra khi ’, tức là tam giác  đều

Vậy giá trị lớn nhất của tổng  là .

1. **[Ngân hàng đề Hùng Vương-Trường CHUYÊN BẮC GIANG – năm-Tỉnh BẮC GIANG]**

Cho tam giác nhọn  không cân tại,  là trung điểm cạnh,  và  tương ứng là chân đường cao hạ từ,  của tam giác.  là giao điểm của hai tiếp tuyến tại ,  của đường tròn ngoại tiếp tam giác,  là giao điểm của  và,  là giao điểm của  và 

a) Chứng minh rằng  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  và  cắt nhau tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng trực tâm  của tam giác  nằm trên.

c) Chứng minh rằng D nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.

**Hướng dẫn giải**



a) là phân giác góc.

Do  và , từ đó  và  nằm trên trung trực của, do đó  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác 

b)Giả sử, khi đó  nằm trên cung nhỏ. Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  và  là trung điểm của. Ta có được  và  vuông góc.

Từ  và  vuông góc, ta được  và  song song.  là hình bình hành nên song song với, do đó , ,  thẳng hàng.

c) Chứng minh được góc  và  là đường trung trực của .

Chứng minh được góc  nên  là tứ giác nội tiếp.

Do đó góc , do đó  là tứ giác nội tiếp.

1. **[KỲ THI OLIMPIC HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X- NĂM 2014- TRƯỜNG CHUYÊN HÀ GIANG]**

Các đường phân giác trong của tam giác  có chu vi  cắt các đoạn thẳng  tương ứng tại **A.** Các đường thẳng qua A2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại A3, A4. Đường thẳng qua B2 song song với AC cắt BC, BA theo thứ tự tại B3, B4. Đường thẳng qua C2 song song với AB cắt CA, CB theo thứ tự tại C3, C4. Chứng minh rằng:

AB4+BC4+CA4+BA3+CB3+AC3 p

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Hướng dẫn giải**



Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.

Vì A3A4 || BC nên theo định lí Talet ta có: (1)

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C:

Tương tự:

Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác A1B1C1



Do đó:(2)

Từ (1) và (2) ta có:



Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:

(3)

Hoàn toàn tương tự:(4); (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra:AB4+BC4+CA4+BA3+CB3+AC3a +b+c= p(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

**LOẠI 8: Các bài toán khác**

1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, có trọng tâm G nằm trong hình tròn tâm I. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB của tam giác AB**C.** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức



**Hướng dẫn giải**

 Tìm giá trị nhỏ nhất:

T ừ BĐT: 

Từ đó 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. Do đó giá trị của biểu thức P bằng 1, đạt được khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

 Tìm giá trị lớn nhất:

G ọi p v à r theo thứ tự là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AB**C.** Ta có:



Ta lại có:



( Do )

Từ (1) và (2) và để ý rằng: (theo công thức đường trung tuyến trong tam giác), ta thấy



Vì I nằm trong hình tròn (I) nên .Từ (3) suy ra 

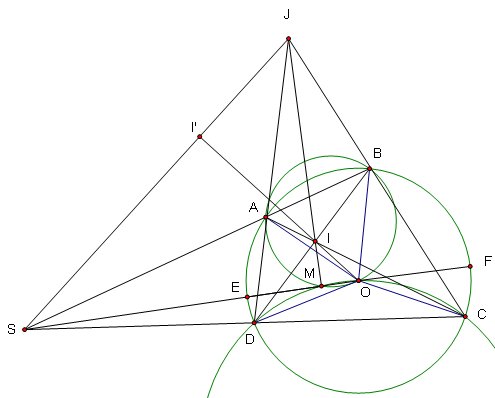
Do đó 

Đẳng thức xảy ra khi IG = r. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng đạt được khi G nằm trên đường tròn tâm I.

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG ĐỀ ĐỀ XUẤT TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]**

Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác sao cho  >  và . Giả sử BM và CM lần lượt cắt AC và AB tại P, Q, chứng minh rằng BP < CQ.

**Hướng dẫn giải**



Ta thấy AB, CD, MN lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (AOB) và (O); (AOB) và (COD); (COD) và (O) nên AB, CD, OM đồng quy tại tâm đẳng phương S. SO cắt (O) tại E, F.

Ta có  và O là trung điểm EF nên theo hệ thức Maclaurin, ta có (SMEF) = -1, do đó M thuộc đường đối cực của S (1)

Mà I cũng thuộc đường đối cực của S (2)

Từ (1) và (2) suy ra IM là đường đối cực của S, do đó góc IMO bằng 90o. Tương tự góc INO bằng 90o, ta có đpcm

1. Cho tam giác  có độ dài các đường cao và . Tính diện tích tam giác *.*

**Hướng dẫn giải**

Xét hai trường hợp:

+) B và C không tù. Khi đó



Suy ra 



+) B hoặc C tù

Do  nên  và C tù 

Còn  (giống trường hợp 1)  Suy ra 

1. Cho tứ giác  () ngoại tiếp đường tròn  và điểm  di chuyển trên đường tròn . Gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên các đường thẳng . Tìm vị trí của điểm sao cho  đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất?

**Hướng dẫn giải**



Gọi E, F, G, H lần lượt là tiếp điểm của các đường thẳng *AB, BC, CD, DA* với đường tròn  và gọi K là trọng tâm của tứ giác EFGH.

Ta có









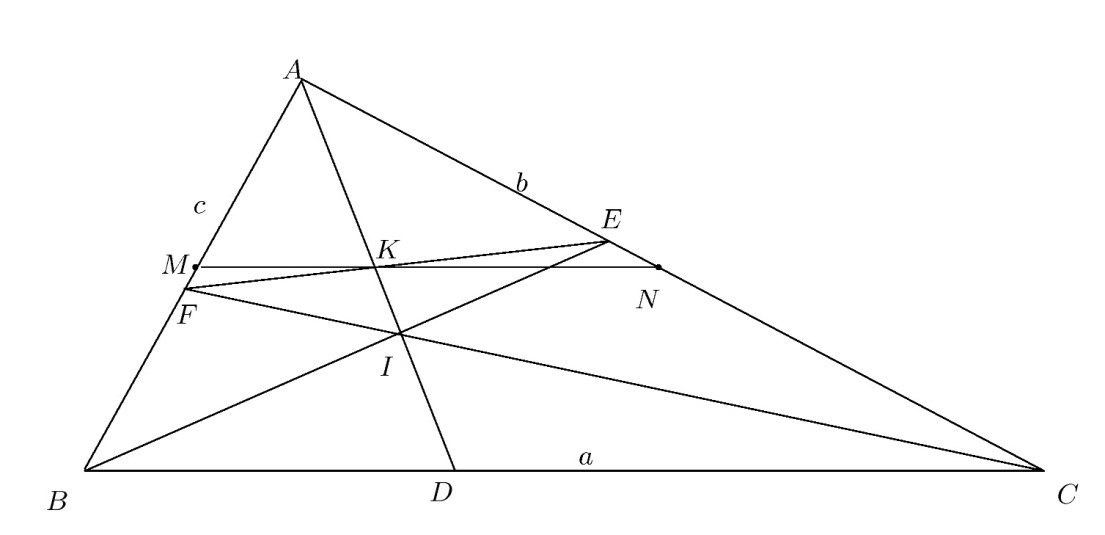
Do đó



đạt giá trị lớn nhất khi M là giao điểm của tia KO với đường tròn (O; R) và đạt giá trị nhỏ nhất khi M là giao điểm của tia OK với đường tròn (O;R).

1. Gọi  là ba đường phân giác trong của tam giác  vuông ở . Đoạn thẳng  cắt  tại . Đường thẳng qua  song song với  cắt  lần lượt ở . Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**



Đặt  ta có  suy ra .

Dùng tính chất đường phân giác tính được .

Dùng phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

.

Từ đó .

Suy ra: .

1. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Cho tam giác  có các góc  thỏa mãn hệ thức: 

Chứng minh tam giác  là tam giác đều.

1. (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2010 – 2011)Tam giác  có ba góc thỏa mãn hệ thức:



Hãy tính các góc của tam giác đó.

1. (Đề thi chọn HSG tỉnh Quảng Bình 2012 – 2013) Chứng minh rằng nếu các góc ,,của  thỏa mãn điều kiện:  thì .
2. (Đề thi đề nghị trường THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng – hội thi HSG duyên hải Bắc bộ lần thứ VII) Cho -giác đều nội tiếp đường tròn và đường thẳng  tùy ý. Qua các điểm  vẽ các đường thẳng song song với  cắt đường tròn  tại các điểm . Chứng minh tổng  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng .

**Hướng dẫn giải:**

Chọn hệ trục , sao cho gốc tọa độ là tâm đa giác, trục vuông góc với . Không mất tính tổng quát, giả sử có thể giả sử đa giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị (1).

Đặt  thì 

và ,.





Vậy

1. Gọi  là khoảng cách từ một điểm  bất ký nằm trong  có 3 góc nhọn đến các cạnh  Chứng minh rằng: ,  là độ dài các cạnh của tam giác,  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Dấu  xảy ra khi nào?
2. Tính các góc của  biết rằng:  và  không có góc tù.
3. Chứng minh rằng với mọi điểm thuộc mặt phẳng chứa , ta đều có: , trong đó S là diện tích của 
4. Chứng minh rằng nếu  là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3 thì:

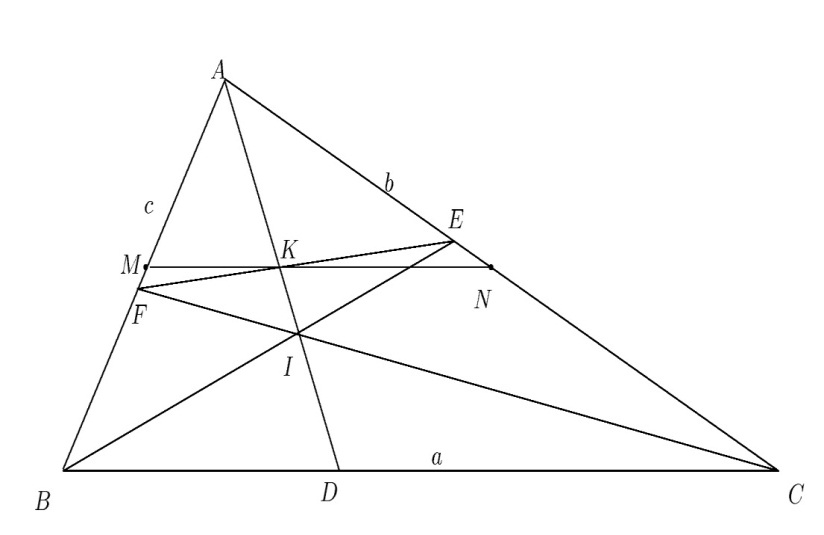


1. Hãy xác định dạng của tam giác  nếu các góc của tam giác  thỏa mãn đẳng thức sau:



**LOẠI 8: Các bài toán khác**

**Câu [Chu Văn An-Hà Nội]** Gọi  là ba đường phân giác trong của tam giác  vuông ở . Đoạn thẳng  cắt  tại . Đường thẳng qua  song song với  cắt  lần lượt ở . Chứng minh rằng:



**Hướng dẫn giải**

Đặt  ta có  suy ra . Dùng tính chất đường phân

giác tính được . Dùng phương pháp diện tích, hoặc công thức đường phân giác trong tính được

. Từ đó . Suy ra: .

**Câu TRƯỜNG THPT VÂN CANH**

Cho tam giác  có trung tuyến và đường phân giác trong**.** Đương tròn

ngoại tiếp tam giác  cắt  tại  và cắt  tại. Chứng minh 

**Câu Trường THPT Cẩm Giàng**

Cho hình thang  có đáy nhỏ  cm, đáy lớn  cm nằm trong mặt phẳng  không chứa**.** Từ kẻ hai đường thẳng song song lần lượt cắt  tại,. Gọi  lần lượt là giao điểm của  và; và 

1) Chứng minh.

2) Chứng minh 

3) Tìm  biết.

**Câu ĐỀ THI HOC SINH GIỎI TOÁN 11 NAM ĐỊNH**

Cho tam giác vuông góc tại**.** Trên đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  tại  ta lấy một điểm  sao cho .  là mặt phẳng song song với các cạnh  và  cắt các cạnh  lần lượt tại .

1) Chứng minh  là hình chữ nhật.

2) Xác định vị trí của mặt phẳng  sao cho diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất.

**Câu** Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi  có .

1) Nếu biết . Hãy tính diện tích tứ giác  theo.

2) Giả sử tứ giác  thay đổi, mà  không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác .

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG1**

Cho tam giác  đều nội tiếp đường tròn tâm , bán kính .

Gọi M là điểm tùy ý nằm trên đường tròn này.

a) Chứng minh:.

b) Chứng minh:.

c) Thay tam giác  đều bằng hình vuông 

Hãy tính 

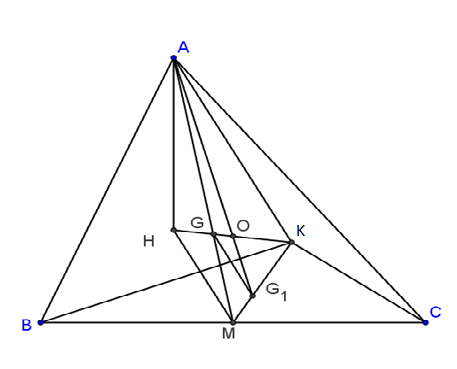
**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2**

a) Cho tam giác có  lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  là điểm sao cho . Gọi  lần lượt là trọng tâm các tam giác . Chứng minh:  đồng quy và .

b) Trong mặt phẳng cho ngũ giác đều nội tiếp đường tròn tâm  bán kính và điểm  tùy ý.Tìm vị trí của  để  ngắn nhất.

**Hướng dẫn giải**

Câu 3a *Trước hết ta chứng minh được  thẳng hàng và *



Gọi  là điểm đối xứng của A qua O.Ta có:BHCE là hình bình hành

Suy ra: 

Suy ra: **

Vì  thẳng hàng*; ;* nên  thẳng hàng và là trung điểm Gọi  là trung điểm .

Trong tam giác  ta có: song song ;và

Vậy ta chứng minh được  thẳng hàng và  Như vậy  đồng quy tại  và 

Bài 3b



Vì là ngũ giác đều nên ta có:  Ta có :

   **Vậy**  ngắn nhất khi  trùng với O.

**Câu a)** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  cho hai điểm .

Tìm trên trục hoành điểm M sao cho .

b) Cho tam giác  đều, cạnh bằng , trọng tâm là . Một đường thẳng  đi qua ,  cắt các đoạn thẳng  và  lần lượt tại hai điểm  và  sao cho . Tính diện tích tam giác .

**Hướng dẫn giải**

**a.** Gọi  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác**.**

Ta có:    hay 

• Với  thì . Đường tròn tâm I bán kính IA có phương trình  cắt trục hoành tại hai điểm  và .

**•** Với  thì . Đường tròn tâm I, bán kính IA không cắt trục hoành.

**b.** Đặt  với .

,  ,  Nên ta có: .

Vậy ta có hệ : 

**Câu a)** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ , cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: . Đường cao kẻ từ B có phương trình: , điểm  thuộc đường cao kẻ từ đỉnh **.** Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác **.**

**b)** Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt  sao cho bốn điểm đó không cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Chọn hệ trục sao cho , . Giả sử trong hệ trục đó ta có:     (\*)Do   Vậy từ (\*) suy ra m = 0, hay D nằm trên trục tung. Vậy (\*)

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN VÒNG 2 - NĂM 2012**

Cho tam giác  nội tiếp đường tròn  và có trọng tâm . Gọi  lần lượt là giao điểm của với đường tròn .

a) Chứng minh: .

b) Chứng minh: .

**Hướng dẫn giải**

a)     =  b)    Mặt khác:  áp dụng AM-GM:  Vậy 

**Câu KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2 – NĂM 2013**

Cho  là các đường trung tuyến của tam giác và  là điểm tuỳ ý trong mặt phẳng 

a) Chứng minh .

b) Chứng minh.

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh **.** Ta có

  Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được

 Khi đó

   Tương tự, ta có

  Do

 Nên

****

**b)** Chứng minh .

Với G là trọng tâm tam giác 

 Do đó

  Tương tự ta được

  Do

 Nên



**Câu KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013**

Cho đường tròn  tâm  bán kính  và tam giác  có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn . Gọi và  lần lượt là giao điểm thứ hai của đường cao kẻ từ và  với đường tròn .

a) Chứng minh rằng diện tích lục giác  bằng hai lần diện tích tam giác .

b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác  theo  sao cho lục giác  có diện tích lớn nhất.

**Hướng dẫn giải**



a) Chứng minh rằng diện tích lục giác  bằng hai lần diện tích tam giác .Gọi  là trực tâm tam giác .

Ta có:  và 

Khi đó 

Suy ra  đối xứng với  qua .

Qua phép đối xứng trục  biến  thành . Như vậy Qua phép đối xứng trục  biến  thành . Như vậy Qua phép đối xứng trục biến  thành . Như vậy **** với là diện tích tam giác .

b) Hãy xác định độ dài ba cạnh của tam giác  theo  sao cho lục giác  có diện tích lớn nhất Gọi a, b và c lần lượt là độ dài các cạnh và .

Ta có:  Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

   Mà  nên  Xét hàm số  

Khi đó 

Suy ra  Ta được 

Dấu đẳng thức xảy ra khi .

Vậy lục giác  có diện tích lớn nhất khi 

**Câu KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1**

Cho tam giác không cân  nội tiếp trong đường tròn  Các trung tuyến kẻ từ  lần lượt cắt  tại  và. Biết , chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

Gọi G là trọng tâm của tam giác; lần lượt là trung điểm của và**.**

đồng dạng suy ra 

 đồng dạng suy ra Do nên suy ra:

 (đpcm)

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1**

Cho tam giác không vuông  nội tiếp trong đường tròn. Các tiếp tuyến của  tại cắt nhau tại. Đường thẳng cắt tại. CMR: **.**

**Hướng dẫn giải**

 Dựng BH, CK vuông góc AM

Ta có:   Tương tự:   Suy ra: 

**Câu SỞ GD&ĐT LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1**

Cho tam giác  nội tiếp đường tròn. Đường phân giác trong góc  của tam giác  cắt  tại  và cắt đường tròn  tại. Gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên  và**.** Chứng minh tam giác và tứ giác có diện tích bằng nhau.

**Hướng dẫn giải**

 Ta có: AL là đường trung trực của đoạn MK

Gọi  Đặt 

,  Ta có: đồng dạng với 

 (1) Ta có: Tam giác AML vuông tại M  (2) Từ (1) và (2) 

**Câu SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1**

Cho tam giác có trực tâm. Đường tròn đường kính cắt BO tại M, đường tròn đường kính cắt  tại. Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

 Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC

Ta có  đồng dạng với **** (1) Ta có tam giác AMC vuông tại M, **** (2) Tương tự:  (3) Từ (1), (2),(3) ****

**Câu Trường THPT chuyên Long An**

Cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại. Gọi  lần lượt là trực tâm của các tam giác  và. Gọi  là trung điểm**.**

Chứng minh: vuông góc với 

**Hướng dẫn giải**



**Câu** Cho hình vuông**.** Trên các cạnh  ta lấy theo thứ tự các điểm  sao cho. Xác định vị trí của các điểm  sao cho tứ giác có chu vi nhỏ nhất*.*

**Hướng dẫn giải**

A

D

B

C

E

K

F

G

H

H

O

HAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD

⇒ HE = EF = FG = GH

⇒ EFGH là hình thoi.



⇒

⇒ 

⇒ 

⇒ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG. Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân: HE2 = 2OE2 ⇒ HE = OE

Chu vi EFGH = 4HE = 4OE. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất

Kẻ OK ⊥AB ⇒ OE ≥OK ( OK không đổi )

OE = OK ⇔ E ≡ K

Do đó minOE = OK

Như vậy, chu vi tứ giác nhỏ nhất khi và chỉ khi là trung điểm của AB,**.**

**Câu Trường THPT chuyên Long An**

Cho tứ giác nội tiếp  Gọi  thứ tự là trực tâm của các tam giác**.** Chứng minh rằng:

a) đồng qui.

b) Tứ giác là tứ giác nội tiếp

**Hướng dẫn giải**

a) Gọi a là khoảng cách từ O tới**.** Từ tính chất (\*) suy ra.Tứ giác AH1 H2B có và AH1 // BH2 (cùng vuông góc với CD ) là hình bình hành. Chứng minh tương tự thì cũng là các hình bình hành. Từ đó suy ra BH1, AH2, CH3, DH4 đồng qui tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Lấy O1 đối xứng với O qua I; suy ra là hình bình hành. Chứng minh tương tự ta có;;. Suy ra

 nội tiếp đường tròn 

**Câu** Cho tam giác  có diện tích bằng 1. Gọi  là điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng chứa tam giác**.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



(với  lần lượt là độ dài các đường cao vẽ từ ).

III. Bài toán cực trị

1. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

**a. Tìm điểm**  **trong tam giác**  **để**  **nhỏ nhất.**

**b. Xét các tứ giác lồi**  **có độ dài đường chéo** **,**  **cho trước và góc giữa hai đường chéo có độ lớn đã cho. Hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.**

1. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Tỉnh Lai Châu- Trại hè Hùng Vương lần X)

**Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm  bán kính  và một điểm  nằm trong đường tròn .Trong các tứ giác lồi  nôị tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo  và  vuông góc với nhau tại , hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo  và .**

Lời giải

|  |
| --- |
|  |
| **Gọi chu vi tứ giác ABCD là .Ta có**    **Theo định lí P tô lê mê thì:** |
| **Kẻ đường kính BE,ta có**    **Từ hai đẳng thức trên ta có** |
| **Chú ý rằng:**  **Thay hai đẳng thức trên và từ  ta được:** |
| **Gọi M,N theo thứ tụ là trung điểm của AC,BD thì**    **Ta có:**  **Do đó**    **Đặt ta có:** |
| **Từ suy ra: đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất)**  **đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất)  đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất).** |

1. (THPT Chuyên Hà Giang – Olympic Hùng Vương lần X - 2014)

**Cho tam giác  có chu vi . Các đường phân giác trong , ,  cắt các đoạn thẳng , ,  tương ứng tại , , . Đường thẳng qua  song song với  cắt ,  theo thứ tự , . Đường thẳng qua  song song với  cắt ,  theo thứ tự tại , . Đường thẳng qua  song song với  cắt ,  Theo thứ tự , . Chứng minh rằng . Đẳng thức xảy ra khi nào?**

Lời giải

****

**Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.**

**Vì A3A4 || BC nên theo định lí Talet ta có: (1)**

**Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C:**

**Tương tự:**

**Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác A1B1C1**

****

**Do đó:(2)**

**Từ (1) và (2) ta có:**

****

**Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:**

**(3)**

**Hoàn toàn tương tự:(4); (5)**

**Từ (3), (4) và (5) suy ra:AB4+BC4+CA4+BA3+CB3+AC3a +b+c= p(đpcm)**

**Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.**

VI. Các bài toán khác

1. ( THPT Chuyên Chu Văn An – Lạng Sơn - Thi Toán 11)

**Cho tam giác  vuông tại  và  là tâm đường tròn nội tiếp của nó. Gọi là đường cao từ đỉnh  của tam giác  và ,  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ,  tương ứng. Gọi  là trung điểm của . Chứng minh  là đường thẳng Euler của tam giác .**

Lời giải

****

***Chứng minh*: Ta có**

**và. Tương tự ta có . Gọi giao điểm của *AI, BI, CI* với *EF, FA, AE* tương ứng là *X, Y, Z*. Khi đó, *I* là trực tâm *AEF*.**

**Ta có**

**, suy ra . Hoàn toàn tương tự, ta có, nên ta có  *BEFC* nội tiếp, nên suy ra****. Vì tứ giác *EZYF* nội tiếp nên . Hơn nữa, gọi *M* là trung điểm của *YZ*, theo định lí Thales suy ra *I, M, O* thẳng hàng. Mặt khác, các tứ giác *AYXE, AZXF* nội tiếp nên ta có   nên *M* là tâm ngoại tiếp của *XYZ*, suy ra *M* là tâm *Euler* của *AEF*, suy ra *IM* là đường thẳng *Euler* của *AEF* nghĩa là *OI* là đường thẳng *Euler* của tam giác *AEF***

1. (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái – Toán 11)

**Cho tam giác  với trọng tâm  nội tiếp trong đường tròn tâm  bán kính . Các tia**

**, ,  cắt đường tròn tại , , . Chứng minh rằng**

.

Lời giải

|  |
| --- |
| **Gọi các trung tuyến của  là  và đặt**  **Xét phương tích của M đối với đường tròn ta có** |
| **Từ  và từ (2) ta có:**    **Mà  khi đó ta được**    **Tương tự ta tính được các tỷ số** |
| **Ta có**    **Do các dây  đều không lớn hơn  nên thay vào 4 ta có**    **Từ đó ta có:** |

1. (Sở GDĐT Quảng Ninh – Chuyên Hạ Long – 2013- Toán 11 )

**Cho tam giác  cân tại . Gọi  là trung điểm của . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  giao với phân giác góc  tại  nằm trong tam giác . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  giao với  tại  ,  giao với  tại .  giao với  tại . Chứng minh rằng  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .**

Lời giải

**Gọi D’ là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.**

**Ta có D’ nằm trên đường tròn ngoại tiếp 🛆BCD. Do tính đối xứng nên suy ra  suy ra **

**suy ra I nằm trên phân giác góc hay BI là tia phân giác góc (1) 1.0 đ**

**Ta có: **

**=>  suy ra 🛆AFD cân tại D. 1.0**

**Do IA.IF = IE.IB nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp . Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này. 1,0**

**Ta có nên **

**Suy ra  hay . Từ đó . Ta có (đpcm) 1.0**

****

1. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định – Chọn học sinh giỏi mở rộng 2013-2014 – Toán 11)

**Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn . Giả sử  cắt  tại ,  cắt  tại ,  cắt  tại . Đường thẳng  cắt  tại . Chứng minh  là phân giác của góc .**

Lời giải

|  |
| --- |
| **Trước hết có bổ đề (Định lý Brocard):**  ***Cho tứ giác  nội tiếp đường tròn  có  lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh đối  và  Gọi  là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó, ta có***  **Thật vậy, gọi  là giao điểm khác  của đường tròn ngoại tiếp tam giác .**  **Trước hết, ta thấy rằng  cùng nằm trên trục đẳng phương của  nên chúng thẳng hàng.**  **Ta cũng có  nên tứ giác  nội tiếp. Tương tự thì tứ giác  cũng nội tiếp. Suy ra  cũng chính là giao điểm thứ hai khác  của hai đường tròn  nên các điểm  cũng thẳng hàng vì cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này.**  **4**  **Mặt khác, cũng bằng cách xét các góc nội tiếp trong các tứ giác nội tiếp, ta có**  **.**  **Hơn nữa, đây là hai góc bù nhau nên mỗi góc bằng  hay .**  **Chứng minh tương tự, ta có  hay  là trực tâm của tam giác  và**  **Định lí được chứng minh.** |
| **Giải bài toán như hình vẽ dưới**  **Theo định lý trên ta có** |
|  |
| **Chứng minh các tứ giác KDCN và MKCB nội tiếp**  **Thật vậy: Theo hệ thức quen thuộc**  **Suy ra , hay tứ giác KDCN nội tiếp** |
|  |
| **Tương tự ta có MKCB nội tiếp** |
| **Suy ra**  **Suy ra điều phải chứng minh** |

1. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên – Trại hè lần X – Toán 11)

**Cho tam giác đều  nội tiếp đường tròn .  là một điểm di động trên đoạn  . Đường thẳng đi qua  và vuông góc với  cắt cung nhỏ  tại . Gọi  là hình chiếu của  trên .**

**a) Các tiếp tuyến của  tại  và  cắt tiếp tuyến tại  của lần lượt tại  và . ,  cắt  lần lượt tại  và . Chứng minh **

**b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác  theo .**

Lời giải

|  |
| --- |
| **Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)** |
| **sđ;sđ**  **tứ giác AMGO nội tiếp (5)** |
| **Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn** |
| **và  đồng dạng**  **hay OD.GF = OG.DE.** |
| **Trên đoạn MC lấy điểm A’ sao cho**  **MA’ = MA  đều** |
| **Chu vi tam giác MAB là** |
| **Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM => H là trung điểm đoạn AO**  **Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB** |
| **Gọi I là giao điểm của AO và BC**  **Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB =** |

1. (Sở SDĐT Hòa Bình – THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Đề chọn học sinh giỏi Toán 11)

**Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm . Đường tròn tâm  tiếp xúc với hai cạnh ,  lần lượt tại ,  và tiếp xúc trong với đường tròn tâm tại điểm . Một đường thẳng song song với  tiếp xúc với đường tròn tâm  tại điểm  nằm trong tam giác .**

**a. Gọi** **,**  **lần lượt là giao điểm thứ hai của**  **và**  **với** **. Chứng minh rằng** **.**

**b. Chứng minh rằng** .

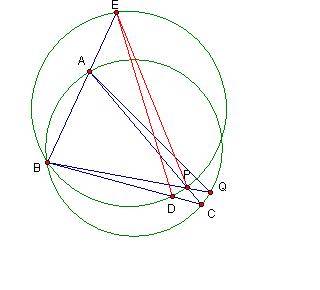
Lời giải

|  |
| --- |
| **a) Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.**  **Xét phép vị tự V tâm P biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự V biến E, Q, F lần lượt thành K, M, L.**  **Theo tính chất của phép vị tự ta có EF song song với KL.**  **Ta có OK là ảnh của IE qua V, dẫn đến  mà , suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.** |
| **b) Ta có**          **(tính chất phép vị tự).**  **(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.** |
| **Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.**  **Suy ra , dẫn đến . Từ đó ta có điều phải chứng minh.** |

1. ( THPT Chuyên Hùng Vương Tỉnh Phú Thọ – Trại hè Hùng Vương lần X)

**Tam giác  vuông có** . **Gọi  là một điểm trên cạnh ,  là một điểm trên cạnh  kéo dài về phía  sao cho**  **Gọi  là một điểm trên cạnh  sao cho , , ,  nằm trên một đường tròn.  là giao điểm thứ hai của  với đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng:** .

Lời giải

**Xét các tứ giác nội tiếpvà ta có:**

****

**(cùng chắn các cung tròn)**

**Mặt khác **

**Xét và có:**

****

**(do )**

****

**(do )**

**Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp ta có:**

****

**Từ( 1), (2), (3) suy ra .■**

1. (Trường PT vùng cao Việt Bắc – Trại hè Hùng Vương lần X)

**Cho tam giác  dều cạnh  và một đường thẳng  tùy ý. Gọi , ,  lần lượt là hình chiếu của , ,  trên . Chứng minh rằng**

.

Lời giải

|  |
| --- |
|  |
| **Gọi *E* là giao của *BC* và , *I*, *J* lần lượt là hình chiếu của *B*, *C* trên , *K* là hình chiếu của *C* trên .** |
| **Mặt khác, ta có** |
|  |