Loại 7: Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Bảng B- Vòng 2)- năm học 1999-2000]

Cho parabol (P): $y^2=2x$ và đường tròn (C):$x^2+y^2-8x+12=0$.

Chứng minh rằng có vô số tam giác với ba đỉnh trên (P) mà các cạnh tiếp xúc với (C).

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm I(4,0), bán kính R = 2.

Lấy $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ tùy ý ($y_1 \neq y_2$) thuộc (P), phương trình đường thẳng AB là:

AB: $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

Do A, B $\in$ (P) nên $y_1^2 = 2x_1$, $y_2^2 = 2x_2$ do đó: AB: $2x - (y_1 + y_2)y + y_1.y_2 = 0$.

Tìm điều kiện tiếp xúc:

AB tiếp xúc (C)$\Leftrightarrow \dfrac{|8+y_1y_2|}{\sqrt{4+(y_1+y_2)^2}} = 2 \Leftrightarrow (8+y_1y_2)^2 = 4\left[4+(y_1+y_2)^2\right]$ (1).

Tương tự, nếu $C(x_3; y_3)$ thuộc (P) và $y_1 \neq y_3$, ta có:

AC tiếp xúc (C)$\Leftrightarrow (8+y_1y_3)^2 = 4\left[4+(y_1+y_3)^2\right]$ (2).

Do đó nếu AB và AC tiếp xúc (C) ta được (1) và (2). Điều này chứng tỏ y_1 và y_3 là hai nghiệm của phương trình ẩn y:

$(8+y_1y)^2 = 4\left[4+(y_1+y)^2\right]$ hay $(y_1^2-4)y^2 + 8y_1y + 48 - 4y_1^2 = 0$ (3)

Với $y_1 \neq \pm 2$, (3) là phương trình bậc hai có Δ' > 0 nên (3) luôn có hai nghiệm y_2 và y_3:

$y_2 + y_3 = \dfrac{8y_1}{4-y_1^2}$ và $y_2.y_3 = \dfrac{48-4y_1^2}{y_1^2-4}$

Do đó, thế vào ta được: $(8+y_2y_3)^2 = 4\left[4+(y_2+y_3)^2\right]$ .Vậy theo điều kiện tiếp xúc ta được BC tiếp xúc (C). Và từ các kết quả trên chứng tỏ rằng có vô số tam giác thỏa đề bài.

Câu 2. [Trường THPT Quế Võ 1- năm học 2008-2009- Bắc Ninh]

Lập phương trình đường tròn (C) qua điểm A(-1; -2) và tiếp xúc với đường thẳng *d*: $7x - y - 5 = 0$ tại điểm M(1; 2).

Lời giải

Viết được pt đường thẳng Δ đi qua tâm I của đường tròn (C) và vuông góc với đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1+7t \\ y = 2-t \end{cases}$ từ đó suy ra I(1+7t;2-t)

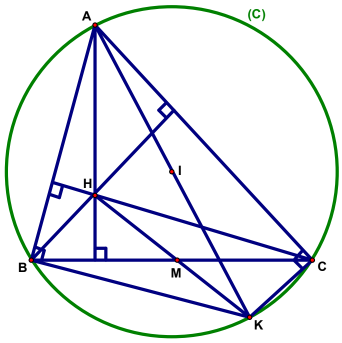
+) (C) tiếp xúc với d khi và chỉ khi IM=R $\Leftrightarrow IM^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=50t^2$

+) (C) có dạng $(x-1-7t)^2+(y-2+t)^2=50t^2$

+) A $\in$ (C) $\Rightarrow$ t=-1. Vậy (C): $(x+6)^2+(y-3)^2=50$.

Câu 3. (Đề thi chọn HSG vòng tỉnh Vĩnh Long – NH: 2016 – 2017) Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có đỉnh $A(2;-2)$, trọng tâm $G(0;1)$ và trực tâm $H\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ của B,C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}.\overrightarrow{AG}\Rightarrow M\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\frac{-3}{2};3\right)$ hay $\vec{n}=(1;-2)$ là pháp vectơ của đường thẳng BC.

Phương trình $BC: x-2y+6=0 \Leftrightarrow x=2y-6$

Vì B và C đối xứng với nhau qua M nên gọi $B(2m-6;\ m)$ thì có $C(4-2m;\ 5-m)$.

$\overrightarrow{AB}=(2m-8;\ m+2)$; $\overrightarrow{HC}=\left(\frac{7}{2}-2m;\ 4-m\right)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0$

$\Rightarrow (m-4)(5-5m)=0 \Leftrightarrow m=4;\ m=1$. Vậy có $B(2;4),\ C(-4;1)$ hoặc $B(-4;1),\ C(2;4)$

Kẻ đường kính AK của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC

Tứ giác $BHCK$ có $BH//KC$ và $BK//HC$ nên $BHCK$ là hình bình hành. Suy ra: HK và BC cắt nhau tại M là trung điểm của BC và M cũng là trung điểm của HK.

Ta có $H\left(\frac{1}{2};1\right), M\left(-1;\frac{5}{2}\right)\Rightarrow K\left(-\frac{5}{2};4\right)$. Bán kính $R=\frac{1}{2}AK=\frac{15}{4}$

LOẠI 7:Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của của đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ qua phép đối xứng trục Đ$_\Delta$, với $\Delta: x+y-2=0$ (**Trường THPT Quế Võ**)

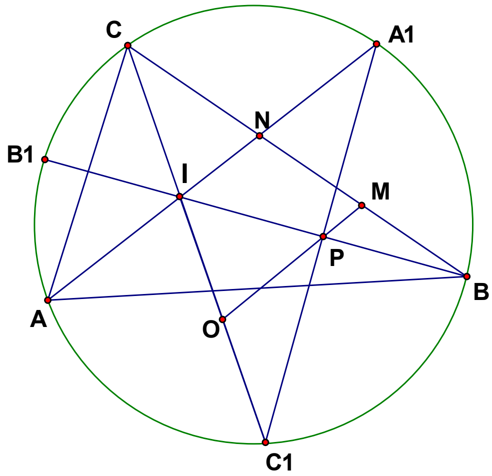
LOẠI 8: Các bài toán khác

Câu 5. Cho ΔABC. Phân giác trong của các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng CC_1 tại điểm I; đường thẳng AA_1 cắt đường thẳng BC tại điểm N; đường thẳng BB_1 cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm P. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IPC_1. Đường thẳng OP cắt đường thẳng BC tại điểm M. Biết rằng $BM=MN$ và $\widehat{BAC}=2\widehat{ABC}$. Tính các góc của tam giác ABC. **(chuyên Vĩnh Phúc)**

HDG:* Dễ thấy $\widehat{IPC_1}=90^0$, do đó O là trung điểm của IC_1.

* $\widehat{IOP}=2\widehat{IC_1P}=\widehat{CAB}=\widehat{CC_1B}\Rightarrow BC_1//OP$

* Do BM=MN; $OI=OC_1\Rightarrow IN//C_1B$ Do đó $\widehat{CIA_1}=\widehat{BAC}$, mà $\widehat{CIA_1}=\frac{1}{2}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)$



Vậy $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right) \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACB}$

Cùng với $\widehat{BAC} = 2\widehat{ABC}$ ta được $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 72^0; \widehat{ABC} = 36^0$