Loại 6: Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 1. [Đề chọn HSG lớp 11]

Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=R^2$ và điểm M (a,b) nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 đến đường tròn (T_1, T_2 là các tiếp điểm). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

Câu 2. **[Đề ôn thi đội tuyển festival. Đề số 3]**

Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết $B(2;-1)$, đường cao và phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt có phương trình là $(d_1): 3x-4y+27=0$ và $(d_2) x+2y-5=0$.

LOẠI 6:Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 3. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2015 – 2016]**

Cho tam giác ABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến BM có phương trình $2x+y+1=0$ và phân giác trong CD có phương trình $x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải

Ta có: $C(t;1-t)$

Trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2};\frac{3-t}{2}\right)$

Ta có $M \in BM \Leftrightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right)+\frac{3-t}{2}+1=0 \Leftrightarrow t=-7$. Vậy $C(-7;8)$.

Từ $A(1;2)$ kẻ AK vuông góc CD tại I $(K \in BC)$.

Phương trình đường thẳng AK: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$

Ta có tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm AK $\Rightarrow K(-1;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C

LOẠI 7:Hình học Oxy về đường tròn.

Câu 4. **[SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH LONG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH LỚP 11 NĂM HỌC 2014 – 2015]**

Trong mặt phẳng, với hệ toạ độ Oxy cho đường tròn (C_1): $x^2+y^2=13$, đường tròn (C_2): $(x-6)^2+y^2=25$. Gọi giao điểm có tung độ dương của (C_1) và (C_2) là A, viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Hướng dẫn giải

(C_1) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=\sqrt{13}$

(C_2) có tâm $I(6;0)$, bán kính $R_2=5$

Giao điểm của (C_1) và (C_2) là $A(2;3)$ và $B(2;-3)$ (Vì A có tung độ dương nên A(2;3).

Đường thẳng d qua A có phương trình: $a(x-2)+b(y-3)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$ hay $ax+by-2a-3b=0$.

Gọi $d_1=d(O,d); d_2=d(I,d)$

Yêu cầu bài toán trở thành: $R_2^2-d_2^2=R_1^2-d_1^2 \Rightarrow d_2^2-d_1^2=12$

$$\frac{(4a-3b)^2}{a^2+b^2}-\frac{(2a+3b)^2}{a^2+b^2}=12 \Rightarrow b^2+3ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-3a \end{array}\right.$$

Với $b=0$, chọn $a=1$, suy ra phương trình d là: $x-2=0$

Với $b=-3a$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-3$, suy ra phương trình d là: $x-3y+7=0$.

Bài 1: (ĐỀ THI HSG – THPT Dương Xá – NH: 2008 – 2009)

Cho họ đường thẳng $(d_m): y=\frac{m+1}{m^2+m+1}x+\frac{m^2}{m^2+m+1}$. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ sao cho không có bất kỳ đường thẳng nào thuộc họ (d_m) đi qua.

Hướng dẫn giải:

Gọi (x_0, y_0) là điểm cần tìm, khi đó phương trình sau: $y_0=\frac{m+1}{m^2+m+1}x_0+\frac{m^2}{m^2+m+1}$

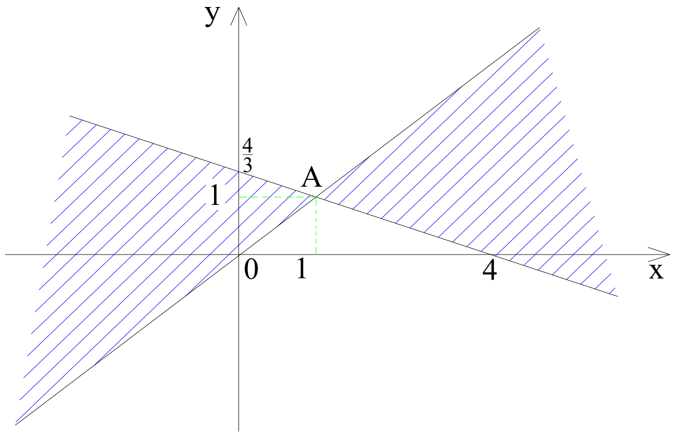
$\Leftrightarrow m^2(y_0-1)+m(y_0-x_0)+y_0-x_0=0$ (1) vô nghiệm

TH1: $y_0=1$. $(1) \Leftrightarrow m(1-x_0)+1-x_0=0$ luôn có nghiệm m

TH2: $y_0\neq 1$, khi đó (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(y_0-x_0)(-x_0-3y_0+4)<0$

$$\Leftrightarrow \text{(I)}\begin{cases} y_0-x_0<0 \\ -x_0-3y_0+4>0 \end{cases} \text{hoặc (II)} \begin{cases} y_0-x_0>0 \\ -x_0-3y_0+4<0 \end{cases}$$

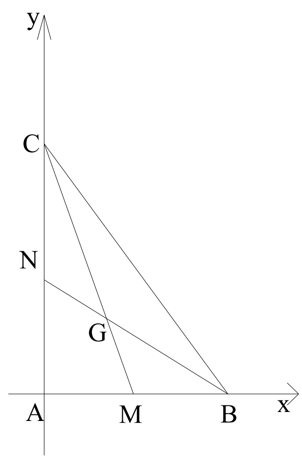
Từ đó suy ra các điểm thỏa mãn là phần không bị gạch trong hình nhưng không bao gồm cạnh và không bao gồm đỉnh $A(1;1)$



Bài 2: (ĐỀ THI HSG – THPT Dương Xá – NH: 2008 – 2009) Cho ΔABC vuông tại A có hai đường trung tuyến BM, CN. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BM, CN. Chứng minh rằng khi đó $\cos\alpha \geq \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



$A(0;0), B(b;0), C(0;c), M\left(\frac{b}{2};0\right), N\left(0;\frac{c}{2}\right), G\left(\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$

$\vec{GM}\left(\frac{b}{6};-\frac{c}{3}\right)$; $\vec{GB}\left(\frac{2b}{3};-\frac{c}{3}\right)$; $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GB} = \frac{2b^2}{18} + \frac{c^2}{9} = \frac{b^2+c^2}{9}$

$\left|\overrightarrow{GM}\right| = \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{6}$; $\left|\overrightarrow{GB}\right| = \frac{\sqrt{4b^2+c^2}}{3}$

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{GB} = \left|\overrightarrow{GM}\right|\left|\overrightarrow{GB}\right|\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2(b^2+c^2)}{\sqrt{b^2+4c^2}\sqrt{4b^2+c^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có $\sqrt{(b^2+4c^2)(4b^2+c^2)} \le \frac{5(b^2+c^2)}{2}$

Suy ra $\cos\alpha \ge \frac{4}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b^4+4c^2 = 4b^2+c^2 \Leftrightarrow b = c$

Bài 3: (Kỳ thi HSG cấp tỉnh Trà Vinh năm học 2014 – 2015) Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $E(2;2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua E và cắt hai trục Ox, Oy tại hai điểm A, B sao cho:

a. ΔOAB có chu vi nhỏ nhất.

b. Khoảng cách từ O đến d lớn nhất.

Bài 4: (Đề thi chọn HSG tỉnh Vĩnh Long – NH : 2015 – 2016) Cho ΔABC có đỉnh $A(1;2)$, đường trung tuyến BM có phương trình $2x+y+1=0$ và phân giác trong CD có phương trình $x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C(t;1-t)$. Trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2};\frac{3-t}{2}\right)$

Ta có $M \in BM \Leftrightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right) + \frac{3-t}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -7$. Vậy $C(-7;8)$.

Từ $A(1;2)$ kẻ AK vuông góc CD tại I $(K \in BC)$.

Phương trình đường thẳng AK: $x-y+1=0$.

Tọa độ điểm I: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow I(0;1)$

Ta có tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm AK $\Rightarrow K(-1;0)$

Phương trình đường thẳng BC đi qua C và K là: $4x+3y+4=0$

Bài 5: (Đề thi đề nghị trường THPT chuyên Lê Quý Đôn TP. Đà Nẵng – hội thi HSG duyên hải Bắc bộ lần thứ VII) Cho n-giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n\geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và đường thẳng d tùy ý. Qua các điểm A_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ vẽ các đường thẳng song song với d cắt đường tròn (O) tại các điểm $B_k\left(k=\overline{1,n}\right)$. Chứng minh tổng $S_n=A_1B_1^2+A_2B_2^2+...+A_nB_n^2$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.

Hướng dẫn giải:

Chọn hệ trục Oxy, sao cho gốc tọa độ là tâm đa giác, trục Ox vuông góc với d. Không mất tính tổng quát, giả sử có thể giả sử đa giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị ($R=1$).

Đặt $\left(\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OA_1}\right)=\alpha$ thì $A_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right)$

và $B_k\left(\cos\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right);-\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right), \forall k=1,2,...,n$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}A_kB_k^2=4\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\alpha+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)=2n+\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2\alpha+\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha+\frac{(2k-3)\pi}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{n}\right)\right)=0$$

Vậy $S_n=2n+T_n=2n.$

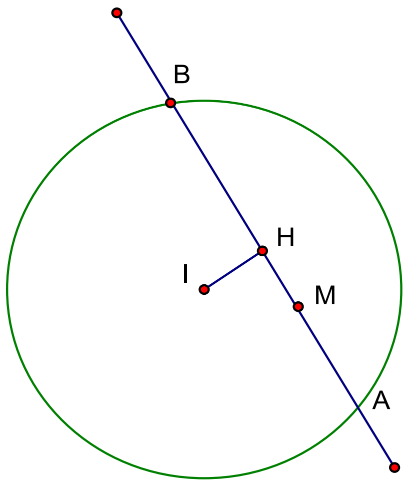
Câu 5. **[ĐỀ THI HSG TỈNH NGHỆ AN NĂM 2013-2014]** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;3)$. Biết $M(4;6)$ thuộc cạnh BC và $N\left(\frac{17}{2};\frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng DC. Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

LOẠI 6:Hình học Oxy về đường thẳng.

Câu 6. Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-3=0$ và điểm $M(0;\frac{1}{\sqrt{3}})$. Chứng minh rằng M nằm trong đường tròn, hãy viết phương trình đường thẳng qua M cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B sao cho $AB=3MA$.

(Quảng Xương II)

Hướng dẫn giải:



Tâm $I(1;0)$ bán kính $R=2$

Ta có $IM^2=\dfrac{4}{3}<R^2=4$ suy ra M nằm trong đường tròn

Gọi H là trung điểm AB suy ra $2HM=MA$, ta tính được $IH=1$

Suy ra đường thẳng cần tìm qua M và khoảng cách từ I tới đt cần tìm bằng 1.Ph. trình đt d có dạng: $a(x-0)+b(y-\dfrac{1}{\sqrt{3}})=0$

Ta có $d(\mathrm{I},\mathrm{d})=1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|a(1-0)+\mathrm{b}(0-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\sqrt{3}a \end{array}\right.$

Tìm được 2 đt d là: $x=0$ và $x-\sqrt{3}y-1=0$

Câu 7. a) Viết PT đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(\mathrm{d}_1): 2\mathrm{x}-\mathrm{y}+1=0$ và $(\mathrm{d}_2): \mathrm{x}-2\mathrm{y}-3=0$ đồng thời chắn trên hai trục tọa độ những đoạn bằng nhau.

b) Cho $\Delta\mathrm{ABC}$, biết $\mathrm{A}(8;9)$, $\mathrm{B}(1;2)$, $\mathrm{C}(2;0)$. Viết phương trình đường phân giác trong của đỉnh A **(Trường THPT Kim Bôi)**