Loại 5: Hình học Oxy về điểm.

Câu 1. [SỞ THỪA THIÊN HUẾ (Vòng 1)- năm học 2003-2004]

Tìm hai điểm A, B lần lượt ở trên elip (E) và đường tròn (C):

$(E):\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{18}=1$, (C): $(x-11)^2+(y-13)^2=34$.

sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

Lời giải

(C) là đường tròn tâm I(11;13) bán kính $R=\sqrt{34}$.

Nhận xét rằng $A\in(E)$, $B\in(C)$ nên đoạn AB ngắn nhất thì ba điểm I, A, B thẳng hàng.

$A(x_0;y_0)\in(E):\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{18}=1$ nên $\begin{cases}x_0=5\sqrt{2}\cos t\\ y_0=3\sqrt{2}\sin t\end{cases}$

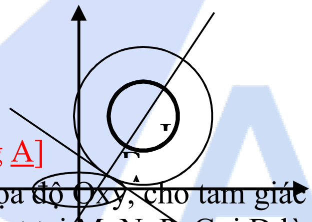
$IA^2=(x_0-11)^2+(y_0-13)^2=(5\sqrt{2}\cos t-11)^2+(3\sqrt{2}\sin t-13)^2$.

$IA^2=290+50\cos^2 t+18\sin^2 t-110\sqrt{2}\cos t-78\sqrt{2}\sin t$.

$IA^2=136+110\left(\cos t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+78\left(\sin t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ge 136$.

Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: $t=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow A(5;3)$.

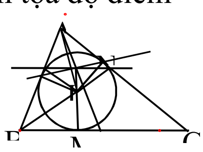
Vậy độ dài AB nhỏ nhất là: $d=2\sqrt{34}-\sqrt{34}=\sqrt{34}$ khi A(5;3) và từ đó suy ra được B(8;8).



Câu 2. [Đề HSG 11-Bảng A]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Biết M(-1;1), phương trình NP là x+y-4=0 và phương trình AD là 14x-13y+7=0. Tìm tọa độ điểm **A.**

Lời giải



Kéo dài IM cắt NP tại K. Kẻ đường thẳng qua K song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F.

Ta có: các tứ giác KEPI và KNFI nội tiếp nên

$\widehat{KEI}=\widehat{KPI};\widehat{KNI}=\widehat{KFI}$

Mà $\widehat{KPI}=\widehat{KNI}$ suy ra $\widehat{KEI}=\widehat{KFI}$

Do đó, K là trung điểm EF

Suy ra A, K, D thẳng hàng

hay K là giao điểm của NP và AD

Tọa độ K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y-4=0\\ 14x-13y+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow K\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right).$$

Phương trình IM đi qua M và K là $x-2y+3=0$.

$I(2a-3;a)\Rightarrow IA:x-y-a+3=0\Rightarrow A(32-13a;35-14a)$.

$$IA = |35 - 15a|\sqrt{2}; d(I, NP) = \frac{|3a - 7|}{\sqrt{2}}; IM = \sqrt{5}|a - 1|$$

Ta có: $d(I,NP).IA = IP^2 = IM^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \Rightarrow I(1;2) \\ a = 3 \Rightarrow I(3;3). \end{array}\right.$

Vì I và M cùng phía với NP nên ta có I(1;2). Khi đó A(6;7)

Câu 3. [Trường THPT Đô Lương 3- Nghệ An- năm học 2012-2013]

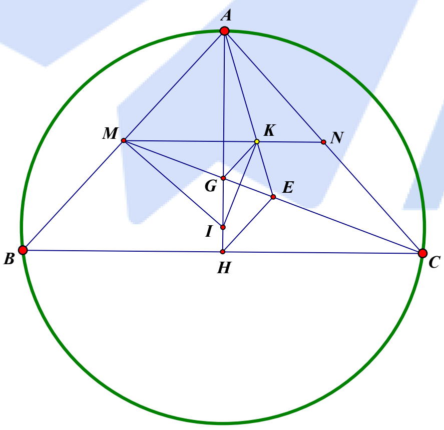
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC và đường thẳng (d): x-y+1=0. Gọi D(4;2), E(1;1), N(3;0) lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, chân đường cao kẻ từ B và trung điểm cạnh A**B.** Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết rằng trung điểm M của cạnh BC nằm trên đường thẳng (d) và điểm M có hoành độ lớn hơn 3.

LOẠI 5:Hình học Oxy về điểm

Câu 4. **[CHỌN HSG NĂM HỌC 2015-2016-VĨNH PHÚC]**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của AB. Đường thẳng $CM: y - 3 = 0$ và $K\left(-3;\frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ACM. Đường thẳng AB đi qua điểm $D(1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết điểm M có hoành độ dương và tâmđường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng $2x - y + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB**C.** Trước hết ta chứng minh $MC \perp IK$. Thật vậy, gọi H, N lần lượt là trung điểm BC, AC; $G = AH \cap CM$. Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC.Mặt khác K là trọng tâm tam giác ACM nên $KG \parallel HE$. Suy ra $KG \parallel AB$. Mà $IM \perp AB$ nên $KG \perp IM$.

Rõ ràng $AH \perp MK$ nên G là trực tâm tam giác MIK. Suy ra $MC \perp IK$.

$DM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4\ (l) \\ m = 2\ (tm) \end{array}\right.$

Đường thẳng KI qua K và vuông góc với CM nên có phương trình: $x + 3 = 0$.

Tọa độ I thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-3;-2)$.

Gọi $M(m;3) \in MC$, $m > 0$. Ta có $\overrightarrow{DM} = (m-1;-1)$; $\overrightarrow{IM} = (m+3;5)$.

Suy ra $M(2;3)$, $\overrightarrow{DM} = (1;-1)$. Từ đó suy ra $AB: x + y - 5 = 0$. Gọi $C(c;3) \in CM$.

Do $K\left(-3;\dfrac{7}{3}\right)$ là trọng tâm ACM nên $A(-11-c;1)$. Mà $A\in AB$ suy ra

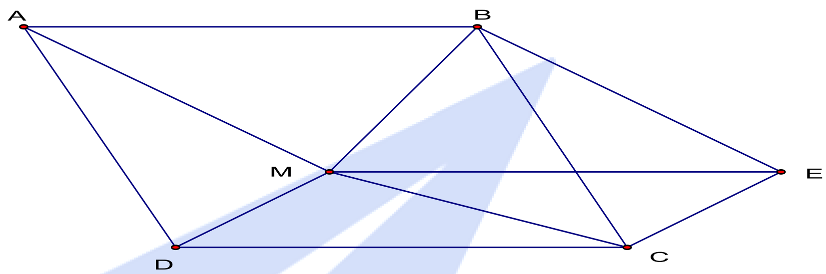
$-11-c+1-5=0 \Leftrightarrow c=-15$.

Từ đó $A(4;1), B(0;5), C(-15;3)$. Thử lại ta thấy $AB \neq AC$. Suy ra không tồn tại A, B, C.

LOẠI 5:Hình học Oxy về điểm.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-5;2)$. $M(-1;-2)$ là điểm nằm bên trong hình bình hành sao cho $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ và $MB\perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan\widehat{DAM}=\dfrac{1}{2}$.**(Cụm Quỳnh Lưu 2016-2017)**

Hướng dẫn giải:



Gọi E là điểm thứ tư của hình bình hành $MABE$, dễ thấy $MECD$ cũng là hình bình hành nên $\widehat{MEC}=\widehat{MDC}$.

Mà $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ suy ra $\widehat{MEC}=\widehat{MBC}$ hay tứ giác $BECM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BMC}+\widehat{BEC}=180^o \Rightarrow \widehat{BEC}=180^o-90^o=90^o$

Ta có $\Delta AMD=\Delta BEC\ (c.c.c)\Rightarrow \widehat{AMB}=\widehat{BEC}\ =90^o$ hay ΔAMD vuông tại M

Vì $\tan\widehat{DAM}=\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow DM=\dfrac{1}{2}MA$.

Ta có $MA=4\sqrt{2}\Rightarrow MD=2\sqrt{2}\Rightarrow AD^2=MA^2+MD^2=40$.

Giả sử $D(x;y)$ ta có $\begin{cases}AD^2=40\\ MD^2=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+5)^2+(y-2)^2=40\\ (x+1)^2+(y+2)^2=8\end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên được hai nghiệm: $(-3;-4)$, $(1;0)$.

Vậy có hai điểm D thỏa mãn đề bài là: $D(-3;-4)$, $D(1;0)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $B(4;-3)$ và tâm đường tròn nội tiếp là J. Gọi P,N,M lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (J) với các cạnh AB, AC, BC. Điểm $H(-2;3)$ là giao điểm của NP với BJ. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ΔABC biết phương trình $AC: 2x-y+9=0$. **(Cụm Quỳnh Lưu –Hoàng Mai 2016-2017)**

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\Delta BPH=\Delta BMH$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{APN}=\widehat{HMC}\\ \widehat{APN}=\widehat{ANP}=\widehat{HNC}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{HMC}=\widehat{HNC}$

$\Rightarrow$ tứ giác $MNHC$ nội tiếp, mà tứ giác $MJNC$ nội tiếp đường tròn đường kính JC nên H

thuộc đường tròn đường kính $JC \Rightarrow BH \perp HC$

+) Viết được phương trình $CH \Rightarrow C = AC \cap CH \Rightarrow C(-4;1)$

+) Lấy C' đối xứng C qua $BH \Rightarrow C' \in AB \Rightarrow C'(0;5)$

+) Viết được phương trình $AB \Rightarrow A = AC \cap AB \Rightarrow A(-1;7)$

Câu 7. **[THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH NGH Ệ AN- 2015-2016]**

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho tam giác ΔABC có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi D D là trung điểm của cạnh BC. Biết $M(-1;1)$, phương trình NP là $x + y - 4 = 0$ và phương trình AD là $14x - 13y + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 8. (THPT Diễn Châu 2 –Nghệ An- thi học sinh giỏi trường 2016-2017 toán 10).

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 2 = 0;\ d_2: 3x + 2y - 10 = 0$ và điểm $M(1;\ 2)$.

a. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B sao cho: $MA = MB$.

b. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và tạo với d_1, d_2 một tam giác cân đỉnh $I = d_1 \cap d_2$.

Câu 9. (THPT Diễn Châu 2 –Nghệ An- thi học sinh giỏi trường 2016-2017 toán 10).

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$ và đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm B, C.

a. Tìm tọa độ B, C và tính độ dài BC.

b. Tìm điểm A thuộc đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu 10. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2005-2006 lớp 12)

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm $I\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$. Phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 11. (Đề thi chọn học sinh giỏi 11)

Cho tam giác ABC có $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 4)$, $C(6;\ 0)$ và các điểm M trên cạnh AB, N trên cạnh BC, P và Q trên cạnh AC sao cho $MNPQ$ là hình vuông. Tìm tọa độ các điểm M, N, P, Q.

Câu 12. (Đề thi chọn học sinh giỏi 11)

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 22. Phương trình BD: $2x - y - 3 = 0$, điểm $M(-3;\ 2)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(4;\ 3)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật biết điểm B có hoành độ là một số nguyên.

Lời giải

Gọi B(b; 2b – 3), $b \in Z$, $\overrightarrow{MB} = \left(b+3; 2b-5\right)$, $\overrightarrow{NB} = \left(b-4; 2b-6\right)$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{NB} = 0 \Leftrightarrow (b+3)(b-4)+(2b-5)(2b-6)=0$

$\Leftrightarrow 5b^2 - 23b + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{18}{5} \end{array}\right.$

Do b nguyên nên b = 1

Vậy B(1; - 1) PT AB: 3x + 4y + 1 = 0, PT BC: 4x – 3y – 7 = 0

$S_{ABCD} = AD.DC = \dfrac{|11d-11|}{5}.\dfrac{|2-2d|}{5} = \dfrac{22(d-1)^2}{25}$

$S_{ABCD} = 22 \Leftrightarrow \dfrac{22(d-1)^2}{25} = 22$

$\Leftrightarrow (d-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=6 \\ d=-4 \end{array}\right.$