**Loại 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.**

1. [Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định- năm 2015- Tỉnh Nam Định]

Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại .  lần lượt là các đường kính của  và . Gọi  là trung điểm của ;  là điểm thuộc đường phân giác của góc  sao cho  không vuông góc với  và  không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua  vuông góc với  lần lượt cắt các đường tròn ,  tại các điểm  khác .  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai ,  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai .

1.Gọi  là giao điểm của  với . Chứng minh rằng  là tiếp tuyến của đường tròn .

2. Chứng minh rằng 3 đường thẳng  đồng quy.

**Lời giải**



1. Không mất tính tổng quát giả sử  là điểm thuộc đường phân giác trong của góc .

Ta có tứ giác  là hình bình hành nên suy ra 

Lại có 

Do đó  thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có  thẳng hàng Mặt khác



Do đó  là tiếp tuyến của đường tròn 

2. Ta có  nên 4 điểm  cùng thuộc đường tròn đường kính .

Mà  nên suy ra  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .

Do đó  (1)

Mặt khác



 (2)

Từ (1) và (2) suy ra



Vậy 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn.

Gọi  là giao điểm của và 

Vì 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn nên ta có

 (3)

Ta có  (4)

Gọi  là giao điểm của  với 

Chứng minh tương tự câu 1) ta có  là tiếp tuyến của đường tròn 

Mặt khác tứ giác  là hình thang vuông tại  và  là trung điểm của  nên suy ra . Do đó  (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra  cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn  nên  thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng  đồng quy tại 

***\*) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm  ( nằm ngoài các đoạn  và  nằm trong các đoạn )***

1. [Trường THPT Lương Văn Tụy- Ninh Bình- Vòng 2]

Cho tam giác  nhọn có trực tâm ., là trung điểm của . Các đường phân giác của góc ,  cắt nhau tại . Chứng minh:

a, Góc  là góc vuông

b,  thẳng hàng.

1. [SỞ Bình Định- năm học 2012-2013]

Trong tam giác ,  là chân đường vuông góc hạ từ  xuống đường phân giác trong của góc   lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ các đỉnh  xuống đường phân giác trong của góc . Gọi  là giao điểm của các đường thẳng  và ,  là giao điểm của các đường thẳng  và ,  là giao điểm của các đường thẳng  và . Chứng minh rằng .

1. [Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - năm 2015- Tỉnh Hòa Bình]

Cho  và hai đường tròn  tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với . Gọi  là tiếp điểm của  và ;  là tiếp điểm của  với . Tiếp tuyến chung tại  của  cắt  tại **A.**  cắt  tại ;  cắt  tại .

Chứng minh rằng .

 cắt  ở ; cắt  tại . Chứng minh rằng  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác .

Chứng minh rằng  đồng quy.

**Lời giải**



a)  thuộc trục đẳng phương của  và  nên  suy ra  là tứ giác nội tiếp dẫn đến



b) Gọi  là giao điểm của  với .

Tam giác  vuông tại  có  là đường cao

 là tứ giác nội tiếp



Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

Dẫn đến 

Suy ra  là phân giác của 

Rõ ràng  là phân giác của  (do  )

Vì thế  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác 

c)Giả sử  cắt  tại , gọi  là bán kính của , .

Rõ ràng  là tâm vị tự ngoài của  và ,lại có 

Suy ra 

Dẫn đến  thẳng hàng (Menelauyt đảo)

Vậy  đồng quy.

1. [ **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI- CHUYÊN HẠ LONG]**

Cho hai đường tròn và  với  cắt nhau tại hai điểm phân biệt . Một đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn  và  lần lượt tại  và . Gọi  và  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ và  xuống .Các đường thẳngvà cắt các đường tròn  tại và.Chứng minh rằng thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



Gọi  là giao điểm của  và , khi đó  là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn  và . Đặt , khi đó ta có: 

Gọi  là giao điểm của  với và . Khi đó ta có:



Mà// // nên 

Suy ra  là trung trực của .

Mà  là trung trực của . Vậy tứ giác  là hình thoi

Do đó//  hay// .

Giả sử  biến  thành  khi đó// 

Mà thuộc  suy ra thuộc do đó .

Vậy  biến  thành .

Tương tự ta có  biến  thành . Suy ra  thẳng hàng.

1. Cho  đường tròn nội tiếp  tiếp xúc với các cạnh  tương ứng tại . Đường thẳng  cắt tại . Đường tròn đường kính  cắt  tại  (). Gọi  () tương ứng là giao của  với . Hai đường thẳng  và  cắt nhau tại . Đường tròn cắt  tại  và đường tròn  cắt tại . Chứng minh rằng đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là trung điểm đoạn . Ta có , do đó  điều này suy ra  là tiếp tuyến. Do đó .

Mặt khác  là tiếp tuyến của , do đó  cũng là tiếp tuyến của .

Vì vậy 

Suy ra  đi qua trung điểm của đoạn  ( bổ đề quen thuộc trong hình thang ).

Từ đây suy ra là 3 đường trung tuyến của , suy ra ĐPCM.



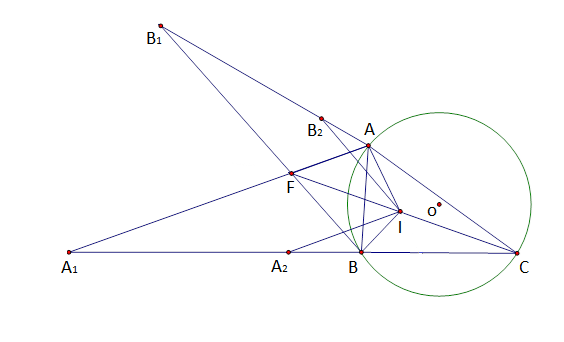
1. **[KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2016 - 2017** **]**

Cho tam giác  có . Đường tròn nội tiếp  tiếp xúc với và  tạitương ứng. Gọi  là trung điểm của  và  là điểm đối xứng với  qua . Đường thẳng vuông góc với  tại  cắt  tại là giao điểm thứ hai của  với . Chứng minh rằng .

1. **[ĐỀ XUẤT ĐỀ THI DUYÊN HẢI BẮC BỘ.Trường THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Tỉnh Hòa Bình. Năm học 2012-2013]**

Cho tam giác . Các phân giác ngoài của các góc  lần lượt cắt cạnh đối diện tại của tam giác  tại . CMR  thẳng hàng và thuộc đường thẳng vuông góc với  ở đây  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác 

**Hướng dẫn giải**





Qua  kẻ các đường thẳng vuông góc  lần lượt cắt  .

Có 

 chung



 trục đt của  và 



 là tâm đường tròn bàng tiếp  của **** thẳng hàng.

C

 thẳng hàng và 

1. **[Đề xuất lớp 11 Sở GD- ĐT Quảng Ninh- Trường THPT Chuyên Hạ Long]**

Giả sử đường tròn  nội tiếp tam giác  tiếp xúc với các cạnh  theo thứ tự . Đường thẳng qua  và song song với  cắt  tại . Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là giao điểm của  và . QuaN kẻ đường thẳng //  cắt ,  theo thứ tự từ . Vì hai tứ giácvà  nội tiếp nên  



Mặt khác . Do đó cân tại . Vậy  là trung điểm của thẳng hàng.

Lại có  là trực tâm 

Gọi  là giao điểm của  và 

là giao điểm của  và 



Mà nội tiếp nên(Đpcm).

1. **[ĐỀ NGHỊ THI CHỌN HSG VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LỚP 11 - Tr­êng T.H.P.T Chuyªn Th¸i B×nh.N¨m häc 2013-2014 ]**

Cho tam giác  vuông tại . Hình chữ nhật  thay đổi sao cho  thuộc ,  thuộc  và thuộc .Chứng minh rằng.

1) 

2)  luôn đi qua một điểm cố định.

**Hướng dẫn giải**

1) Lấy  theo thứ tự thuộc sao cho  (h.1).



(h.2.1)

Ta có: 



Do đó các tam giác  đồng dạng.

Vậy 

2) Đặt  (h.2.2).

Theo định lí Pappus: thẳng hàng .

Gọi  là hình chiếu của  trên ; theo thứ tự là trung điểm của , .

Dễ thấy  thẳng hàng;  thẳng hàng; .

Vậy 

Do đó  thẳng hàng.

Từ và suy ra  đi qua  (đpcm).



(h.2.2)

1. **[ ĐỀ THI ĐỀ XUẤT** **TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI**-**TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG ]**

Cho tam giác  với . Các đường trung tuyến và phân giác trong góc  cắt  tại  và  tương ứng. Đường thẳng qua  vuông góc với  cắt lần lượt tại và ; đường thẳng qua vuông góc với  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh  vuông góc với .

**Hướng dẫn giải**



Gọi  là giao điểm thứ hai của với đường tròn ngoại tiếp tam giác , dễ thấy  suy ra  vuông góc với .Đặt  và xét phép vị tự . Khi đó **** thuộc ,  thuộc  và hai tam giác và  có các cạnh tương ứng song song.

Gọi  là giao điểm của  với , ta có



suy ra tứ giác  nội tiếp. Từ đó 

Như vậy  nên K là trung điểm, hay  thuộc , suy ra  trùng . Do  song song với  mà  vuông góc với  nên  vuông góc với .

1. **[TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI** năm 2015.**LẦN THỨ XI ]**

Cho tam giác  có ba góc nhọn,  và nội tiếp đường tròn  Các đường cao  cắt nhau tại   Đường thẳng  cắt  tại  Lấy điểm  trên  sao cho  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại   Chứng minh rằng

a) Ba điểm  thẳng hàng.

b) Đường thẳng  vuông góc với đường thẳng 

1. **[ Đề 59- TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC-ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VIII- NĂM 2015.MÔN TOÁN - LỚP 11 ]**

Cho tam giác  nhọn không cân, nội tiếp đường tròn .  là điểm nằm trong tam giác sao cho . Đường tròn đường kính  cắt các cạnh  lần lượt tại  và cắt đường tròn  tại điểm  khác . Chứng minh rằng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**



Gọi  là đường kính của , dễ thấy  thẳng hàng và . Giả sử cắt  tại  cắt  tại .

Theo định lý Desargues để chứng minh  (hay ) đồng quy ta chỉ cần chứng minh  thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus ta được: 

Dễ thấy tứ giác EFBC nội tiếp nên 

Cũng từ  nội tiếp suy ra 

Tứ giác  là hình bình hành suy ra .

Suy ra .

Ta có 

Thay vào  ta được . Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác **** ta suy ra  thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

1. **[ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG- Trường THPT Chuyên BảoLộc-KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác  nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng  và  cắt nhau tại điểm  và các đường chéo  và  cắt nhau tại . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác  cắt nhau tại điểm thứ hai . Chứng minh rằng hai đường thẳng  và vuông góc.

**Hướng dẫn giải**



▪ Gọi  là giao điểm của và,  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác .

Ta dùng kí hiệu  tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác , tứ giác .

Ta có  lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn  và và và nên  đồng quy tại hay thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa  và .

Ta có 

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm  cùng thuộc một đường tròn ta gọi là .

▪ Tương tự, các điểm  cùng thuộc một đường tròn ta gọi là .

Ta có  lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn  và , , và  nên  đồng quy tại  hay  thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn, ta có  là đối cực của nên vuông góc với 

Mà  thẳng hàng;  thẳng hàng nên  và  vuông góc (điều phải chứng minh).

1. **[KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 –2016. ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11 ]**

Cho tam giác  nội tiếp đường tròn. Tiếp tuyến của  tại  cắt nhau tại . Gọi  là đường thẳng chứa phân giác trong góc của tam giác . Các đường trung trực của các đoạn thẳng  cắt  lần lượt tại  và . Gọi  là giao điểm của  và ,  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ,  là trực tâm của tam giác .

a. Chứng minh ,đối xứng với nhau qua .

b. Chứng minh  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



a) Chứng minh  là trung trực của

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi  là trung điểm của ,  là giao điểm (khác ) của với ,  là trung điểm của .

Vì hai tam giác  cân nên dễ thấy:



Suy ra, tam giác  cân tại  và tam giác  cân tại . Vậy  là trung trực của .

+) Chứng minh ,đối xứng với nhau qua 

Ta có: 

Vậy hai điểm  và  đối xứng với nhau qua .

b) Chứng minh  đối xứng với nhau qua 

Gọi  là đường kính của .

Ta có  nên mà  và  vuông góc với nhau suy ra  là phân giác góc .

Vậy  đối xứng với nhau qua .

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy  thẳng hàng khi và chỉ khi thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác  để chứng minh điều này.



Ta có điều phải chứng minh.

1. **[HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ- TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA-2006]**

Cho tam giác  với  là trực tâm tam giác,  là tâm đường tròn ngoại tiếp và  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi  là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  thẳng hàng khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Gọi là trọng tâm tam giác . lần lượt là trung điểm . Gọi là tam giác nhận là trung điểm các cạnh . Do đó  là trọng tâm tam giác .

Từ cách dựng suy ra  lần lượt là đường trung trực của *.* Do đó  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R*.

Gọi  là hình chiếu vuông góc của lên các đường . Do  là trọng tâm hai tam giác trên nên:

*Xét* *biến* thành

Có  là trung điểm  nên , . Vậy  thẳng hàng. Do đó .

Suy ra  và





Vậy thẳng hàng và biến  thành 

Tương tự có  biến  thành  biến  thành .

 thẳng hàng khi và chỉ khi thẳng hàng. Do  là hình chiếu vuông góc của  lên các đường nên theo định lí Simson  thẳng hàng  nằm trên đường tròn ngoại tiếp

1. [ HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**. TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM** ĐỀ THI MÔN TOÁN KHỐI 11NĂM 2015- **TỈNH QUẢNG NAM ]**

Cho  nhọn có . Hai đường phân giác trong và ngoài của  lần lượt cắt đường thẳng  tại  và ; hai đường phân giác trong và ngoài của  lần lượt cắt đường thẳng  tại . Giả sử hai đường tròn đường kính  và  gặp nhau tại một điểm  nằm bên trong . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**



Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng .

Khi đó hai điểm  và  nằm trên đường tròn tâm  bán kính .

Vì  nên ,

Suy ra .

Từ đó .

Do đó  Như vậy  suy ra 

Tương tự ta cũng có .

Ngoài ra 

Từ  ta đi đến .

Suy ra .

1. **[ TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X, NĂM HỌC 2013-2014. TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ -HÒA BÌNH** ]

Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm . Đường tròn tâm  tiếp xúc với hai cạnh lần lượt tại  và tiếp xúc trong với đường tròn tâm  tại điểm . Một đường thẳng song song với  tiếp xúc với đường tròn tâm  tại điểm  nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi  lần lượt là giao điểm thứ hai của  và  với . Chứng minh rằng  song song với 

b) Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải**

a) Gọi  là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm , và  là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm  với .

Xét phép vị tự  tâm  biến đường tròn tâm  thành đường tròn tâm , ta có phép vị tự  biến  lần lượt thành .

Theo tính chất của phép vị tự ta có EF.

Ta có  là ảnh của  qua , dẫn đến  mà , suy ra  là điểm chính giữa của cung . Chứng minh tương tự ta có  là điểm chính giữa của cung , là điểm chính giữa của cung .

b) Ta có









 (tính chất phép vị tự).

 (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và .



Lại có  theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra , dẫn đến . Từ đó ta có điều phải chứng minh

1. **[ THI HSG VĨNH PHÚC NĂM 2008-2009]**

Cho tứ giác lồi  nội tiếp trong đường tròn tâm . Gọi  là giao điểm của  với . CMR nếu ba trung điểm của  thẳng hàng thì  hoặc 

PHẦN HÌNH HỌC PHẲNG

**LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.**

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH TỈNH YÊN BÁI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh rằng ba điểm E, O, F thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



Ta có  cùng bù với góc , các đỉnh A, C lại thuộc hai phía của đường thẳng EF. Lấy K là điểm đối xứng của A qua EF.

Ta có  (do t/c đối xứng) suy ra  suy ra tứ giác ECKF nội tiếp

Suy ra  mà  (t/c đối xứng).

mặt khác  (cùng phụ  ), suy ra  mà hai góc này ở hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn cạnh DK. suy ra tứ giác ADKC nội tiếp suy ra K thuộc (O).

Vậy EF là đường trung trực của dây AK suy ra E, O, F thẳng hàng.

1. [TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY NINH BÌNH]

Cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F tương ứng là chân ba đường cao từ A, B, C của tam giác. I và J tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AEF và BF**D.** O và O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC và BJ**D.** Chứng minh: OO’ // IJ.

**Hướng dẫn giải**



Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CDE.

Ta có:  (vì J, K là tâm đường tròn nội tiếp hai tam giác)

Suy ra 

Ta có:



Suy ra tứ giác BJKC nội tiếp đường tròn. (1)

Tương tự AIKC nội tiếp đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Ta có:



Suy ra 

Từ (3) và (4) ta có OO’ // IJ.

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG** TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại N khác B, đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại M khác **C.** Trên cung BC không chứa A của đường tròn (O) lấy điểm G tùy ý (G khác B, C). Gọi J, K lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABG, ACG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GJK cắt đường tròn (O) tại điểm P khác G. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



Ta có G, J, M và G, K, N thẳng hàng. Hai tam giác PJM và PKN có

; .

Suy ra hai tam giác PJM và PKN đồng dạng. Do đó: .

Vì J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABG và M là điểm chính giữa cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG nên MJ = M**A.**

Tương tự NK = N**A.** Suy ra . Do đó PMAN là tứ giác điều hòa.

Vì PMAN là tứ giác điều hòa nội tiếp đường tròn (O) nên các tiếp tuyến của (O) tại M, N cắt nhau tại điểm Q trên PA hay ba điểm P, A, Q thẳng hàng.

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG]**

Cho tam giác  không cân tại  nội tiếp đường tròn . Gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đường tròn  tiếp xúc với các cạnh  và tiếp xúc trong với  tại . Đường tròn  tiếp xúc với các cạnh  và tiếp xúc trong với  tại .

**Hướng dẫn giải**

1. Gọi  lần lượt là tiếp điểm của  với các đường tròn  và là giao điểm của , . Chứng minh rằng  là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác .

2. Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng .



1. Gọi  lần lượt là giao điểm thứ 2 của  với 

Ta có  là các tam giác cân tại , mà  thẳng hàng nên suy ra . Do đó 

Chứng minh tương tự ta có 

Mà  cùng phía đối với  nên suy ra . Suy ra  là điểm chính giữa của cung  nên  thẳng hàng và .

Ta có  nên  suy ra tứ giác  nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có tứ giác  nội tiếp.

Mặt khác ta có 

Vậy  là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác .

2. Gọi  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  thì  tại .

Vì  nên tứ giác  nội tiếp.

Gọi . Do  và  là các tam giác cân có các góc ở đỉnh bằng  nên chúng đồng dạng. Suy ra . Do đó 

 do đó  thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn   hay  đồng quy tại  . Vậy 

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI TỈNH LÀO CAI TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Cho tam giác nội tiếp đường tròn . Trực tâm tam giác là . Gọi là điểm chính giữa cung của đường tròn ngoại tiếp tam giác giao tại , giao tại . Kẻ phân giác trong của góc . Gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .



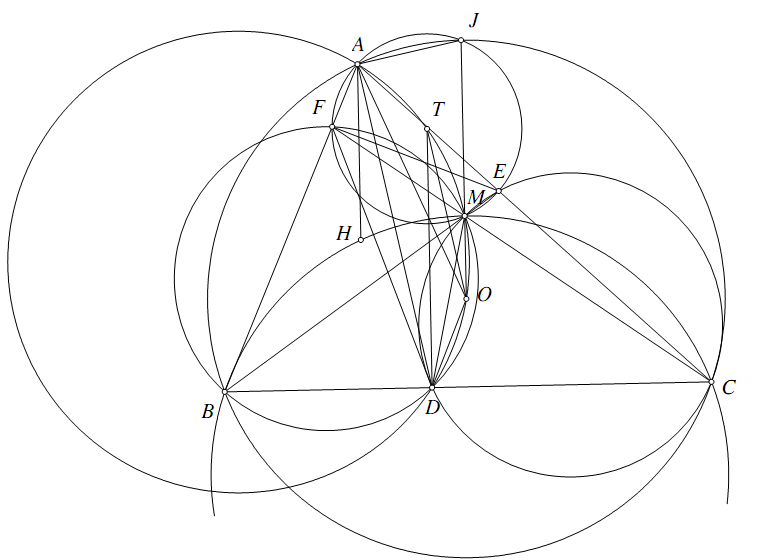
a) Chứng minh



b) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng



**Hướng dẫn giải**



a) Ta có nên tứ giác nội tiếp.



Suy ra , ta thhu được tứ giác nội tiếp, tương tự tứ giác nội tiếp.



Dễ có (đường tròn qua 3 điểm , gọi là tâm của . Ta có:



Suy ra .



b) Ta có nên và đối xứng với nhau qua .



Do và nên . Suy ra .



Ta có giao tại là tâm của phép vị tự quay biến thành nên . Do và nên .



Ta thu được , suy ra tứ giác nội tiếp. Mà nên là hình thang cân. Vậy , hay .



1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN** CHU VĂN AN **TỈNH LẠNG SƠN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII ]**

Cho tam giác *ABD* nội tiếp đường tròn (*O*). Gọi *M* là trung điểm của *BC* và *AM* cắt (*O*) tại ***D*.** Gọi *E, F, G, H* là trung điểm của *AB, BD, DC, C****A.*** Phân giác trong các góc  cắt *EG, FH* tương ứng tại *S, T*. Gọi .

**a.** Chứng minh rằng .

**b. **. Chứng minh rằng *AD* đi qua trung điểm của *PR*.

**Hướng dẫn giải**



a)

Ta có  nên

.

Hơn nữa, *ME, MG, MF, MH* là các đường trung tuyến trương ứng nên suy ra  Vì *MS, MT* là phân giác nên .

Chú ý *EFGH* là hình bình hành nên , theo định lí ***Thales*** thì suy ra , suy ra  (1).

Mặt khác, áp dụng định lí ***Ceva*** cho tam giác  với các đoạn *AM, CY, BX* thì ta được  nên suy ra (2).

Từ (1), (2) suy ra .

b)



Gọi *L* là trung điểm của *A****D.*** Thế thì các tứ giác *LHMF*, *LEMG*, *EFGH* là hình bình hành nên suy ra *EG*, *FH*, *LM* đồng quy tại trung điểm *K* mỗi đoạn thẳng.

Mặt khác, dễ thấy  suy ra , tức là *MT* là phân giác góc .

Tương tự thì *MS* là phân giác góc  nên suy ra . Do đó *MR* là phân giác ngoài của .

Tương tự thì *MP* là phân giác ngoài góc . Suy ra . Dễ thấy *AK* đi qua trung điểm của *EH* nên cũng đi qua trung điểm của *PR*.

**Nhận xét và bình luận và phát triển bài toán:**

+ Ý a) là kết quả của các tỉ số đồng dạng kết hợp với đường phân giác. Cùng với việc chú ý tới định lí Thales và hình bình hành *EFGH*.

+ Ý b) là một hệ quả kéo theo với việc nhận thấy  từ đó suy ra *MS, MR* là phân giác trong và ngoài của .

+ Ta có thể thu được kết quả rất thú vị sau: Gọi . Khi đó *MPQR* là hình chữ nhật.

***Chứng minh:*** Dễ thấy  với *XE, XG* là trung tuyến tương ứng, do đó

 nên *X, M* nằm trên đường tròn ***Apollonius*** dựng trên *E, G* với tỉ số . Do đó,  nên *M, X, S* cùng nằm trên đường tròn *Apollonius* đó. Hơn nữa, dễ thấy  suy ra , tức là *MT* là phân giác góc . Tương tự thì *MS* là phân giác góc  nên suy ra  (3). Do đó, *MR* là phân giác ngoài của  và *MS* là phân giác trong, nên đường tròn đường kính *MS* là đường tròn *Apollonius* dựng trên *E, G*. Do đó, tứ giác *MSXR* nội tiếp. Gọi *I* là trùng điểm của *MX. X*ét tứ giác toàn phần *XDMCAB*, thì *E, G, I* thẳng hàng (nằm trên ***đường thẳng*** ***Gauss*)**. Do đó, *SR* là đường kính đường tròn *Apollonius* đó. Vậy,  (3). Tương tự thì  (5). Từ (3), (4), (5) suy ra *MPQR* là hình chữ nhật.



1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM QUẢNG NAM NĂM 2014 KỲ THI OLYMPIC TOÁN KHU VỰC DUYÊN HẢI & ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM 2014]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

**Hướng dẫn giải**



▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có 

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C1).

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C2).

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C2),

(ABCD) và (C1), (C1) và (C2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).

1. **[Trường THPT Chuyên Hưng Yên ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN LỚP 11VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]**

Cho đường tròntâm  vàlà hai đường kính của đường tròn đó. Tiếp tuyến với đường tròntạicắttại Gọilà giao điểm thứ hai của đường thẳng với đường tròn Gọilà trung điểm của Chứng minh rằng

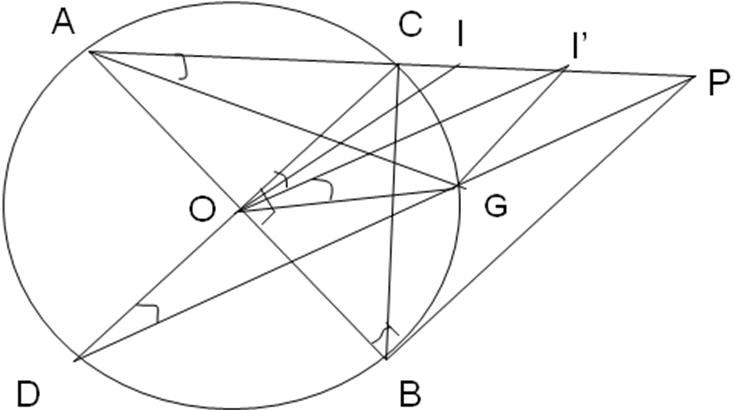
*a)* Các điểm  cùng nằm trên một đường tròn

*b)* Ba đường thẳng đồng qui.

**Hướng dẫn giải**

*a*). Ta có nên  Mà  suy ra 4 điểm 

nằm trên đường tròn đường kính 



*b*) Gọi là trung điểm của  Ta có nên 

Mà  Tam giác  vuông tại có suy ra

(c.c.c), do đó

Từ (1),(2),(3) ta có suy ra 4 điểm nằm trên một đường tròn

Ta có

Hơn nữasuy ralà trục đẳng phương của hai đường tròn và 

 là trục đẳng phương của hai đường tròn và  là trục đẳng phương của hai đường tròn và 

Vậy ba đường thẳng đồng qui tại *S* là tâm đẳng phương của ba đường trònvà

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ** HÒA BÌNH **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI &ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII, NĂM HỌC 2011-2012]**

. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA1, BB1, CC1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B1C1 và A1C1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A1B1 đi qua trung điểm của PQ.

**Hướng dẫn giải**

1. Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AA1, BB1, CC1 đồng quy tại trực tâm H. Đường vuông góc kẻ từ H tới đường thẳng B1C1 và A1C1 lần lượt cắt các đường CA và CB tại P và Q. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ C tới A1B1 đi qua trung điểm của PQ.



Xét phép vị tự V tâm C biến H thành C1. Gọi P1, Q1 lần lượt là ảnh của P, Q qua phép vị tự V tâm **C.** Từ tính chất của phép vị tự có , .

Gọi N, K, L lần lượt là hình chiếu của C, P1, Q1 trên A1B1. Khi đó ta có KLP1Q1 là hình thang vuông tại K và L, vì CNA1B1 nên ta chỉ cần chứng minh N là trung điểm của KL thì CN trở thành đường trung bình của hình thang và do đó nó đi qua trung điểm của P1Q1, và theo tính chất của phép vị tự thì nó cũng đi qua trung điểm của PQ.

Có  là tứ giác nội tiếp .

Chứng minh tương tự có . Suy ra  dẫn đến AC là đường phân giác ngoài của .

Chứng minh tương tự có BC là đường phân giác ngoài của . Do đó điểm C trở thành tâm đường tròn bàng tiếp góc  của 

Từ tính chất của đường phân giác suy ra được .

Chứng minh tương tự có .

Dẫn đến nếu gọi  là nửa chu vi  thì .

Do C là tâm đường tròn bàng tiếp góc  của  nên tính được 

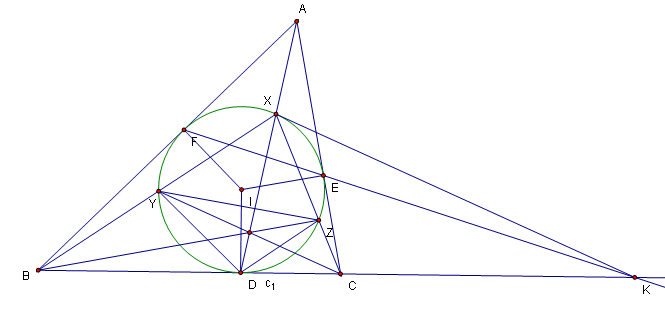
. Vậy N là trung điểm của KL. (đpcm)

1. **[Tr­êng THPT chuyªn BẮC GIANG tØnh BẮC GIANG TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG IX**

**MÔN: TOÁN 11 n¨m häc 2012 – 2013]**

Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đường tròn (*I*) tâm *I.* Gọi *D*, *E*, *F* là tiếp điểm của (*I*) với *BC*, *CA*, *A****B.*** *AD* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *X*, *BX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Y*, *CX* cắt (*I*) tại điểm thứ hai là *Z*. Chứng minh rằng *BZ*, *CY*, *AX* đồng quy.

**Hướng dẫn giải**



Kẻ tiếp tuyến tại X của (I) cắt BC tại K.

Trong tứ giác XEDF ta có tiếp tuyến tại F, E và XD đồng quy tại A nên tứ giác XEDF là tứ giác điều hòa. Mà KX, KD là tiếp tuyến của (I) tại X, D nên



Mặt khác AD, BE, CF đồng quy nên



Suy ra:



(1)



Theo định lí Céva thì BZ, CY, AX đồng quy



(do )



(luôn đúng theo (1))



Vậy BZ, CY, AX đồng quy (đpcm).

1. ***[Tr­êng THPT TrÇn Nguyªn H·n* VÜnh Phóc n¨m 2009 – 2010]**

Cho tam gi¸c ABC c©n tại **A.** Gọi H là trung điểm của BC, D là h×nh

chiếu vu«ng gãc của H trªn cạnh AC, M là trung điểm của H**D.**

Chứng minh AM vu«ng gãc với B**D.**

**Hướng dẫn giải**

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XII]**

Kí hiệu *A*1, *B*1, *C*1 là trung điểm các cạnh *BC*, *CA*, *AB* của tam giác nhọn *AB****C.*** *A*2, *B*2, *C*2 là hình chiếu của *A*, *B*, *C* trên *B*1*C*1, *C*1*A*1, *A*1*B*1. Trung điểm các đoạn *A*2*B*2, *C*2*A*2, *A*2*B*2 là *A*3, *B*3, *C*3. Chứng minh các đường thẳng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**



***Cách 1***: Gọi (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Ta có: .

Dựng hình bình hành  có:

, .

Do đó .

Vì  đi qua trung điểm *EF* nên đi qua trung điểm  đi qua *O*. Tương tự  đi qua O.

***Cách 2***: Dùng định lí Ceva dạng sin.

Đặt, 

Lâp tỉ số: .

.

Tương tự: 

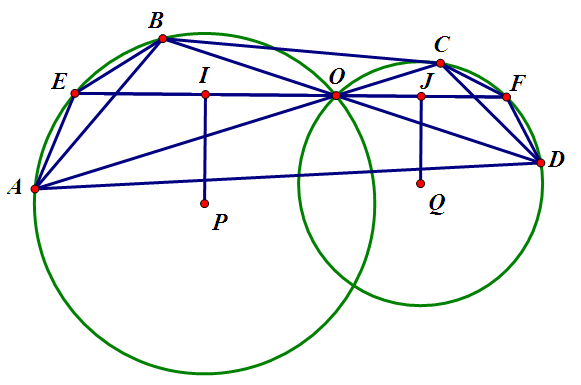
đồng quy.

1. **[CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG TRỊ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI BẮC BỘ LẦN THỨ VII – NĂM 2014]**

Cho tứ giác lồi ABCD có các đường chéo AC và BD cắt nhau tại O.

Gọi P, Q là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB và tam giác CO**D.** Chứng minh rằng AB + CD  4.PQ

**Hướng dẫn giải**



\* Đường phân giác góc  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB tại E  O.

Tứ giác AEBO nội tiếp => 

Nếu  thì EO > EA

Nếu  thì EO >EB = EA

Vậy ta luôn có EO > EA

\* Đường phân giác góc  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác COD tại F  O. Tương tự ta có FO > FD

\*Gọi I, J là hình chiếu của P, Q lên đường thẳng EF ta có:

AB < AE + EB  2EO

CD < CF + FD 2FO

=> AB + CD < 2EF = 4IJ  4PQ

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG** QUẢNG NINH **ĐỀ THI OLYMPIC TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ X MÔN: TOÁN - KHỐI: 11 Ngày thi: 01 tháng 08 năm 2014]**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB và tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác AB**C.**

a) Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng KL song song với EF.

b) Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

a. Xét phép vị tự  tâm P biến đường tròn (I) thành đường tròn (O) nên biến điểm E thành điểm K và biến điểm F thành điểm L nên KL//EF.

b. Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự  biến E, D, Q, F lần lượt thành K, C, M, L.

Do OK là ảnh của IE qua , dẫn đến  mà  nên , suy ra K là điểm chính giữa của cung A**C.**

Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung A**B.**



Nếu  thì ta có









Trường hợp  ta cũng chỉ ra được 

 (tính chất phép vị tự).

 (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.

Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra , dẫn đến . Từ đó ta có điều phải chứng minh.

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC THPT VÙNG DUYÊN HẢI ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ NĂM HỌC 2012 – 2013]**

Cho tam giác *AB****C.*** Đường tròn (I) tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC*, tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *P, Q, R*. Một đường tròn đi qua *B, C* tiếp xúc với (I) tại *X*. Một đường tròn đi qua *C, A* tiếp xúc với (I) tại *Y*. Một đường tròn đi qua *A, B* tiếp xúc với (I) tại *Z*. Chứng minh rằng các đường thẳng *PX,* *QY,* *RZ* đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

1. **[Ngân hàng đề Trường THPT Chuyên Hạ Long - Sở GD- ĐT Quảng Ninh]**

Giả sử đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự D, E, F. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt EF tại K. Gọi M là trung điểm của B**C.** Chứng minh rằng: IM DK.

**Hướng dẫn giải**

Gọi N là giao điểm của ID và EF. Qua N kẻ đường thẳng // BC cắt AB, AC theo thứ tự từ P,Q. Vì hai tứ giác IFPN và IQEN nội tiếp nên 



 1.0 đ

Mặt khác . Do đó cân tại I. Vậy N là trung điểm của PQ -> A, N, M thẳng hàng. 0.5 đ

Lại có -> N là trực tâm  0.5 đ

Gọi H là giao điểm của AM và IK

J là giao điểm của IA và EF

 1.0 đ

Mà nội tiếp nên(Đpcm). 1.0đ

1. **[**TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**TRƯỜNG THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG -LỚP 11]**

Cho tam giác *ABC* với *AB > A****C.*** Các đường trung tuyến và phân giác trong góc *A* cắt *BC* tại *M* và *N* tương ứng. Đường thẳng qua *N* vuông góc với *AN* cắt *AB, AM* lần lượt tại *P* và *Q*; đường thẳng qua *P* vuông góc với *AB* cắt đường thẳng *AN* tại *R*. Chứng minh *QR* vuông góc với *B****C.***

**Hướng dẫn giải**



Gọi *D* là giao điểm thứ hai của *AN* với đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*, dễ thấy  suy ra *DM* vuông góc với *B****C.***

Đặt  và xét phép vị tự. Khi đó *B’* thuộc *AB, C’* thuộc *AC* và hai tam giác *BCD* và *B’C’R* có các cạnh tương ứng song song.

Gọi *K* là giao điểm của *PN* với *B’C’*, ta có



suy ra tứ giác *RKPB’* nội tiếp. Từ đó 

Như vậy  nên *K* là trung điểm *B’C’*, hay *K* thuộc *AM*, suy ra *K* trùng *Q*. Do *B’C’* song song với *BC* mà *QR* vuông góc với *B’C’* nên *QR* vuông góc với *B****C.***

1. **[**TRẠI HÈ HÙNG VƯƠNG LẦN THỨ XI-**ĐỀ CHÍNH THỨC -LỚP 11]**

Cho tam giác  có ba góc nhọn,  và nội tiếp đường tròn  Các đường cao  cắt nhau tại   Đường thẳng  cắt  tại  Lấy điểm  trên  sao cho  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại   Chứng minh rằng

a) Ba điểm  thẳng hàng.

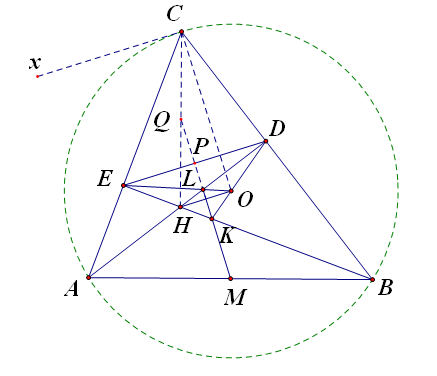
b) Đường thẳng  vuông góc với đường thẳng 

**Hướng dẫn giải**

1. [**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI ĐỀ THI ĐỀ XUẤT KỲ THI HSG VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VII MÔN TOÁN: KHỐI 11 Năm học: 2013-2014]**

Cho tam giác nhọn *ABC* không cân. Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC; D, E* lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh *A, B* của tam giác *AB****C.*** Các đường thẳng *OD* và *BE* cắt nhau tại *K*, các đường thẳng *OE* và *AD* cắt nhau tại *L*. Gọi *M* là trung điểm cạnh *A****B.*** Chứng minh rằng ba điểm *K, L, M* thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm *C, D, O, H* cùng nằm trên một đường tròn.

**Hướng dẫn giải**



Áp dụng đinh lý Mê-nê-la-uýt cho tam giác *HAB* và ba điểm *K, L, M* ta có: *K, L, M* thẳng hàng khi và chỉ khi  (1)

Ta lại có  (cùng cạnh đáy *OD*),  (cùng cạnh đáy *OE*) và .(Bởi vì  ,

ở đó *R* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và . Tương tự ).

Từ các kết quả trên ta có  khi và chỉ khi *OH // DE* hoặc *OH* đi qua trung điểm *E****D.***

Bằng cách vẽ tiếp tuyến  của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *C*, dễ dàng suy ra *DE // *, suy ra *CO* vuông góc với *DE*.

Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm của *DE, H****C.*** Dễ thấy tứ giác *CEHD* nội tiếp, suy ra *QP* vuông góc với *DE*. Suy ra *CO//QP*.

Nếu *HO* đi qua trung điểm *DE* suy ra *P* là trung điểm *HO*, suy ra *EHDO* là hình bình hành, suy ra *OD // EH* và *EO // H****D.*** Điều này trái với giả thiết *OD* cắt *BE* cà *OE* cắt *A****D.***

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi *OH // DE* khi và chỉ khi *CO* vuông góc với *OH* khi và chỉ khi *E, H, O, D* cùng nằm trên một đường tròn (vì ta luôn có tứ giác *CEHD* nội tiếp đường tròn đường kính *CH*).

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ VIII- NĂM 2015 MÔN TOÁN - LỚP 11]**

Cho tam giác  nhọn không cân, nội tiếp đường tròn .  là điểm nằm trong tam giác sao cho . Đường tròn đường kính  cắt các cạnh  lần lượt tại  và cắt đường tròn  tại điểm  khác . Chứng minh rằng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**



Gọi *AD* là đường kính của (*O*), dễ thấy *G,P,D* thẳng hàng và . Giả sử *PE,PF* cắt *DB,DC* tại *K*,*L*; *EF* cắt *BC* tại *T*.

Theo định lý Desargues để chứng minh *BE, CF, GP* (hay *PD*) đồng quy ta chỉ cần chứng minh *T,K,L* thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được:  (1)

Dễ thấy tứ giác *EFBC* nội tiếp nên  (2)

Cũng từ *EFBC* nội tiếp suy ra 

Tứ giác *PKDL* là hình bình hành suy ra .

Suy ra  (3).

Ta có  (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được . Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác *DBC* ta suy ra *T,K,L* thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

1. **[**TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẢO LỘC- **LÂM ĐỒNG- KỲ THI HSG KHU VỰC DH VÀ ĐBBB LẦN THỨ 9 ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN: TOÁN; LỚP: 11]**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các cặp cạnh đối không song song. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm E và các đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD và BFC cắt nhau tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng hai đường thẳng EK và FK vuông góc.

**Hướng dẫn giải**

▪ Gọi G là giao điểm của AD và BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABC**D.**

Ta dùng kí hiệu (ABC), (ABCD) tương ứng để chỉ đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, tứ giác ABC**D.**

Ta có AD, BC, FK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (ADF), (ABCD) và (BCF), (ADF) và (BCF) nên AD, BC, FK đồng quy tại G hay F, K, G thẳng hàng.

▪ Không mất tổng quát ta giả sử F nằm giữa K và G.

Ta có 

(ta có thể dùng góc định hướng cho mọi trường hợp).

Suy ra các điểm D, C, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C1).

▪ Tương tự, các điểm A, B, K, O cùng thuộc một đường tròn ta gọi là (C2).

Ta có AB, CD, OK lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (ABCD) và (C2),

(ABCD) và (C1), (C1) và (C2) nên AB, CD, OK đồng quy tại E hay O, K, E thẳng hàng.

▪ Xét cực và đối cực đối với đường tròn (O), ta có GF là đối cực của E

nên GF vuông góc với OE

Mà G, K, F thẳng hàng; O, K, E thẳng hàng nên EK và FK vuông góc (điều phải chứng minh).



1. **[KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ LẦN THỨ IX, NĂM HỌC 2015 – 2016 ĐỀ THI MÔN TOÁN – KHỐI 11]**

Cho tamgiác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại S. Gọi d là đường thẳng chứa phân giác trong góc A của tam giác AB**C.** Các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt d lần lượt tại M và N. Gọi P là giao điểm của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP, H là trực tâm của tam giác OMN.

a. Chứng minh H, I đối xứng với nhau qua d.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



+) Chứng minh OP là trung trực của MN

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi D là trung điểm của BC, E là giao điểm (khác A) của d với (O), F là trung điểm của MN.

Vì hai tam giác MAB và NAC cân nên dễ thấy:



Suy ra, tam giác PMN cân tại P và tam giác OMN cân tại O. Vậy OP là trung trực của MN.

+) Chứng minh I, H đối xứng với nhau qua d

Ta có:



Vậy hai điểm I và H đối xứng với nhau qua d.

+) Chứng minh AD, AS đối xứng với nhau qua AE

Gọi EK là đường kính của (O).

Ta có (DSEK) = - 1 nên A (DSEK) = -1 mà AE và AK vuông góc với

nhau suy ra AE là phân giác góc SA**D.**

Vậy AD, AS đối xứng với nhau qua AE.

+) Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục d ta thấy A, I, S thẳng hàng khi và chỉ khi A, H, D thẳng hàng. Ta dùng Melenauyt với tam giác OEF để chứng minh điều này.



Ta có điều phải chứng minh

1. **[TRƯỜNG THPT CHUYÊN BIÊN HÒA** HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ]

Cho tam giác ABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua A**B.** Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.

**Hướng dẫn giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác AB**C.** lần lượt là trung điểm BC, CA, A**B.** Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.



Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ.* Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R*.

Gọi là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ*. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:



*Xét V(G; -1/2)* *biến A, B, C, I, J, K* thành



Có là trung điểm BC nên ∟BC, ∟B**C.** Vậy thẳng hàng. Do đó vuông góc với B**C.**



Suy ra // AD và



Vậy Thẳng hàng và biến D thành



Tương tự có biến E thành biến F thành



D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi thẳng hàng. Do là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ* nên theo định lí Simson thẳng hàng O nằm trên đường tròn ngoại tiếp



1. Cho **tam** giác  có ba góc nhọn,  và nội tiếp đường tròn  Các đường cao  cắt nhau tại   Đường thẳng  cắt  tại  Lấy điểm  trên  sao cho  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại   Chứng minh rằng

a) Ba điểm  thẳng hàng.

b) Đường thẳng  vuông góc với đường thẳng 

a) Dễ thấy tứ giác  nội tiếp.

**Hướng dẫn giải**

Hơn nữa, 

nên ngũ giác  nội tiếp.

Do đó  là ba trục đẳng phương của  và  nên chúng

đồng quy tại  tức là ba điểm  thẳng hàng.

b) Nối  cắt  tại  suy ra  thẳng hàng.

Dễ thấy 

Từ đó suy ra  Do đó  (1).

Hơn nữa,  (2). Từ (1) và (2) suy ra . Mà  nên  là trung trực của  suy ra .

1. Tứ giác lồi  diện tích  và không có hai cạnh nào song song.Lấy điểm  nằm trên đường thẳng  sao cho  và nằm cùng **phía** so với đường thẳng  và .Tương tự cũng có các điểm  lần lượt nằm trên các đường thẳng  và .Chứng minh  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Gọi x là khoảng cách từ D đến AC và y là khoảng cách từ B đến A**C.**Ta có:



Lấy Q1 nằm trên đường thẳng BC sao cho .Khi đó 

,khi đó với mọi điểm O ta có  (1)

Tương tự ta cũng có các đẳng thức dưới đây:

 (2)

 (3)

 (4)

Khi đó:

 (từ (1) và (2) )

( từ (3) và (4) )

Suy ra 

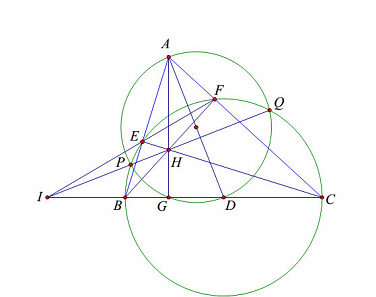
Hoàn toàn tương tự ta cũng có:  và .Suy ra P1,P2,P3,P4 thẳng hàng.

1. Cho  là trực tâm tam giác  không cân góc  nhọn. Hình chiếu vuông góc của  trên theo thứ tự là Gọi là trung điểm là giao điểm của hai đường tròn đường kính  và . Chứng minh  thẳng hàng và các đường thẳng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

Gọi G là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác AB**C.**

Ta có  suy ra H nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BC và A**D.** Suy ra H, P, Q thẳng hàng.



Gọi I là giao điểm của EF và B**C.** (DEF) là đường tròn Euler của tam giác ABC nên G nằm trên (DEF). Do đó 

Suy ra I, P, G thẳng hàng hay BC, EF, PQ đồng quy tại I.

1. Cho tam giác  với  là trực tâm tam giác,  là tâm đường tròn ngoại tiếp và  là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua ,  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh rằng  thẳng hàng khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác AB**C.**  lần lượt là trung điểm BC, CA, A**B.** Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ.* Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R*.

Gọi  là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ*. Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

*Xét V(G; -1/2)* *biến A, B, C, I, J, K* thành 

Có  là trung điểm BC nên ∟BC, ∟B**C.** Vậy  thẳng hàng. Do đó  vuông góc với B**C.**

Suy ra  // AD và 



Vậy Thẳng hàng và  biến D thành 

Tương tự có  biến E thành  biến F thành 

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi  thẳng hàng. Do  là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ* nên theo định lí Simson  thẳng hàng O nằm trên đường tròn ngoại tiếp  

1. Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại hai điểm  và  là đường kính của đường tròn . Vẽ tiếp tuyến của đường tròn  tại điểm cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là . Đường thẳng cắt đường tròn  tại , . Đường thẳng  cắt đường tròn  tại  . Giả sử  là một điểm bất kì trên đoạn thẳng . Đường thẳng  cắt đường tròn  tại  và đường thẳng  cắt đường thẳng  tại . Chứng minh rằng .

**Hướng dẫn giải**

****

Vì  là đường kính của đường tròn  và  là tiếp tuyến nên . Do đó  là đường kính của .

Ta lại có .

Nối , ta có . Suy ra 

Xét tam giác  và tam giác  có:

+

+

Suy ra hai tam giác  và  đồng dạng. Do đó 

Mặt khác  là tiếp tuyến của đường tròn  nên .

Suy ra 

Vì vậy 



1. Cho tam giác nhọn không cân. Gọi lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  hai đường cao .  cắt  tại ,  cắt  tại . Gọi  là trung điểm . Chứng minh rằng  thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm  cùng nằm trên một đường tròn.

**Hướng dẫn giải**

Sử dụng Menelaus cho tam giác HAB và 3 điểm K, L, M thẳng hàng

Vậy



Do đó hệ thức xảy ra khi và chỉ khi  hoặc OH đi qua trung điểm P của DE.

Qua C kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (C) thì d song song với DE.

Do CO vuông góc với d nên CO vuông góc với DE.

Nếu OH đi qua P thì P là trung điểm của OH, hay EDOH là hình bình hành, suy ra EO và HD song song (trái giả thiết).

Vậy K, L,M thẳng hàng khi và chỉ khi OH song song với DE, hay OH vuông góc với CO, tương đương C, D, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính CH.

1. Cho tam giác . Gọi  là điểm thỏa mãn  và giả sử . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên  là trung điểm của đoạn . Chứng minh rằng  vuông góc với 

**Hướng dẫn giải**

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó . Do  nên Vì 

=nên

⇒⇒

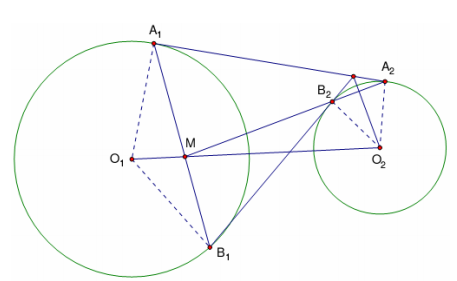
⇒ và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp⇒

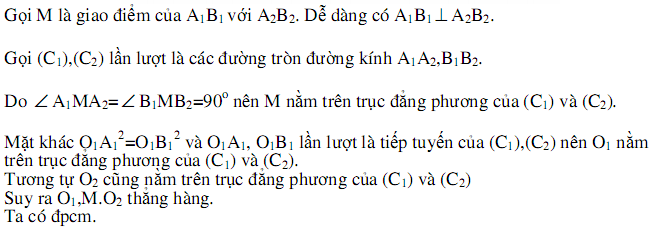
Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB⇒

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD ⇒ BH ⊥ CD⇒ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH ⊥ B**C.**

Cho hai đường tròn và  ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài , tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (, . Chứng minh rằng ba đường thẳng  đồng quy.





1. Cho tam giác  nhọn với  nội tiếp đường tròn . Gọi  là trung điểm của cạnh  và  là hình chiếu của trên . Gọi  là đường tròn đi qua  và tiếp xúc với  tại điểm  khác ***A*.**

a) Gọi  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  với . Chứng minh rằng  là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng đường thẳng  đi qua trọng tâm  của tam giác .

**Hướng dẫn giải**



Gọi  và  là tiếp tuyến tại *A* và *X* của đường tròn  và gọi  là đường tròn ngoại tiếp tam giác . Dễ thấy *a* cũng là tiếp tuyến của  tại *A* và a là trục đẳng phương của hai đường tròn  và .

Như vậy ba đường thẳng  và  lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn  và ;  và ;  và , do đó  và  đồng quy tại điểm *M*.

Ta có  nên *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ADX*. Chú ý là . Ta có

, suy ra . Do đó  là hình thang cân.

**b) (2,0 điểm)**

Gọi  là trung điểm của . Xét phép vị tự  biến ; ; ; , suy ra .

Mặt khác . Do đó , từ đó suy ra  thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

***Chú ý***: Muốn cho bài toán khó lên thì có thể chỉ hỏi phần (b).

1. Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn tâm ,   là chân đường cao xuất phát từ  và  là trực tâm của tam giác  Đường thẳng qua  vuông góc với  cắt cạnh  tại  Chứng minh rằng 



Gọi  là giao điểm của  và   là giao điểm của  và .

Theo định lý con bướm, suy ra  là trung điểm của đoạn 

Mặt khác  là trung điểm của , do đó tứ giác  là một hình bình hành. Suy ra 

Mà  do vậy 

1. Cho tam giác nhọn  nội tiếp đường tròn  có trực tâm là  và  là một điểm thay đổi trên cung nhỏ .  là điểm đối xứng của qua trung điểm của .

a) Chứng minh rằng trực tâm  của tam giác  nằm trên đường tròn .

b) Giả sử  cắt  tại , hạ  vuông góc với  tại . Chứng minh rằng ba điểm  và trung điểm của thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**



a) Chứng minh K thuộc đường tròn (O)

+ N là điểm đối xứng của M qua trung điểm I của AB nên tứ giác ANBM là hình bình hành, suy ra  và 

+ Vì K là trực tâm tam giác NAB nên ,

Do đó  và 

Từ đó suy ra tứ giác BKAM nội tiếp.

Vậy K thuộc đường tròn (O).

b)Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm của HK.

+ Gọi S là điểm đối xứng của K qua E; R là điểm đối xứng của K qua **D.** Ta có:  (do BC là đường trung trực của SK)

+ Mặt khác  (cùng chắn cung BC) nên .

+ Mà  nên 

Suy ra tứ giác BHCS nội tiếp nên 

+ Tương tự tứ giác ABHR nội tiếp nên 

+ Từ (1) và (2) ta có 

Suy ra S, H, R thẳng hàng.

+ Vì DE là đường trung bình của tam giác KRS, nên DE đi qua trung điểm của HK.

1. (Kỳ thi HSG trường THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng năm học 2014 – 2015) Hai đường tròn  tiếp xúc ngoài với nhau tại  và cùng tiếp xúc trong với đường tròn  tại  tương ứng sao cho  không thẳng hàng.  là tiếp tuyến chung tại  của  và .  là đường kính của  sao cho  vuông góc với  và  cùng phía so với . Chứng minh rằng  và  đồng quy.
2. (Đề thi đề xuất – trường THPT Chuyên Biên Hòa tỉnh Hà Nam – năm 2015) Cho  là tam giác nhọn với đường tròn nội tiếp . Gọi  là điểm của đường tròn bang tiếp góc  với . Gọi  là giao điểm của  với  ( nằm giữa  và . Giả sử  cắt đường cao  của  tại .

a. Chứng minh .

b. Gọi  là đường tròn có tâm nằm trên đường cao  đi qua  và tiếp xúc với đường tròn  tại . Các điểm  xác định tương tự. Chứng minh  đồng quy tại 1 điểm.

**Hướng dẫn giải:**

****

a. Gọi  là tiếp điểm của  với .

Giả sử  cắt  tại điểm thứ 2 là . Qua  vẽ đường thẳng song song với  cắt  tại điểm .

Ta có:  phép vị tự ; 

. Do đó  thẳng hàng 

Khi đó (cùng vuông góc với )

Mà  nên suy ra 

b. Từ câu a ta suy ra: đường tròn có tâm thuộc đường cao , đi qua  và tiếp xúc với  tại  thì . Do đó .

Tương tự nếu gọi  lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bang tiếp góc  của  với  thì   đồng quy đồng quy.

Mặt khác nếu ta gọi  là độ dài 3 cạnh của  và  là nửa chu vi thì ta có:

Theo định lý Ceva ta có  đồng quy.

1. (Đề thi chọn HSG trường THPT chuyên Thái Bình – 2015) Cho  nội tiếp đường tròn . Tiếp tuyến của  tại  cắt nhau tại . Trung trực của  cắt  là phân giác trong góc  của  thứ tự tại  và . Gọi  là giao của  và ,  là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác .

a. Chứng minh  đối xứng nhau qua  với  là trực tâm của .

b. Chứng minh  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải:**

Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi *D* là trung điểm của *BC, E* là giao của phân giác góc *A* với *(O)* khác ***A.*** *F* là trung điểm của *MN*.

a) +) Chứng minh *OP* là trung trực của *MN*

Vì hai tam giác cân *MAB* và *NAC* có các cặp góc tương ứng bằng nhau nên ta có: . Suy ra tam giác  và  cân tại *P* và *O*. Vậy *OP* là trung trực của *MN*.

+) Chứng minh *I, H* đối xứng nhau qua *d*

Ta có:



Ta được đpcm.

b)+) Chứng minh *AD, AS* đối xứng nhau qua *AE*

Gọi *EK* là đường kính của *(O)*. Ta có ** nên  mà *AE* và *AK* vuông góc với nhau suy ra  là phân giác . Ta có đpcm

Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục ta thấy *A, I, S* thẳng hàng khi và chỉ khi *A, H, D* thẳng hàng. Ta dùng định lý Menelaus với tam giác *OEF* để chứng minh điều này.



đpcm

1. (Đề thi đề xuất thi HSG trường THPT Chu Văn An – Hà Nội – 2015)  nhọn, nội tiếp đường tròn . Kẻ đường kính .  thuộc  thỏa mãn .  cắt  tại  khác . Chứng minh  thẳng hàng, với  là trực tâm .

**Hướng dẫn giải:**

*DP* cắt *AB* tại *E* thì *M* là trung điểm *DE* (vì *OM* là đường trung bình).

*BHCD* là hình bình hành nên *DH* cắt *DC* tại *I* là trung điểm mỗi đường.

Suy ra *MI* là đường trung bình của 

Kéo dài *CH* cắt *(O)* tại *Q*. Ta sẽ chứng minh  bằng cách chứng minh *Q, E, D* thẳng hàng.

Vì ** nên *BDCQ* là hình thang cân (hình thang nội tiếp).

Ta có  vì tam giác *QBH* cân tại *B*

 vì hình thang *BDCQ* cân

Nên . Mà *Q, H, C* thẳng hàng nên  thẳng hàng hay .

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Hưng Yên tỉnh Hưng Yên – 2015)

Cho  nội tiếp đường tròn . Đường phân giác của góc  cắt  tại  khác . Gọi  là điểm đối xứng với  qua .  cắt  tại  khác .  là một điểm thay đổi trên cạnh . Đường thẳng  cắt  tại  khác . Từ  kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại P. Đường tròn  ngoại tiếp  cắt  tại  và cắt  tại . Chứng minh  thẳng hàng và đường thẳng  luôn đi qua điểm cố định khi I thay đổi.

**Hướng dẫn giải:**

Gọi *D* là điểm chính giữa của cung  và *E* đối xứng với *B* qua *AD* nên .

A

M

**J**

F

B

K

D

C

E

**I**

P

Q

 vì 



 *DF* là trung trực của *E****C.***

(do )

Mà  (do )

Có 

 và *P*, *Q* cùng phía đối với  nên  thẳng hàng.

Đường thẳng *IK* cắt (*O*) tại *M* khác *K*

 vì 

 vì 



 do *AD* là trung trực của *BE* 

 *DM* là đường kính của (*O*)

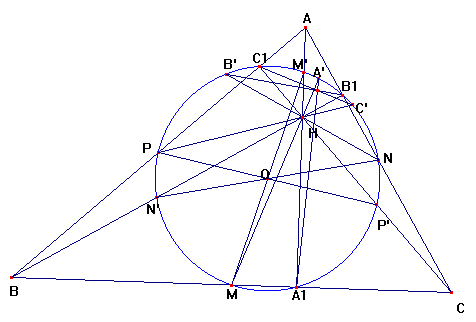
Mà *D* là điểm chính giữa cung  chứa *A* thì *M* là điểm chính giữa cung  không chứa *A* nên *M* cố định. Vậy đường thẳng *KI* luôn qua điểm *M* cố định khi *I* thay đổi.

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tình Lào Cai – trại hè Hùng Vương lần thứ X)

Cho đường tròn và hai đường kính , . Tiếp tuyến với đường tròn  tại  cắt tại ,  cắt đường tròn  lần nữa tại . Gọi  là giao điểm của  với . Chứng minh 3 điểm  thẳng hàng.

1. (Đề thi đề xuất HSG Vùng duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ lần thứ VI - trường THPT chuyên Lào Cai) Cho  có trực tâm , ba đường cao , , . Gọi , ,  lần lượt là trung điểm , , . Gọi  là đường tròn ngoại tiếp  (còn gọi là đường tròn Euler của ). Kí hiệu , ,  là các giao điểm thứ hai của , ,  và . Chứng minh rằng , ,  đồng quy tại một điểm  nằm trên đường thẳng đi qua trọng tâm và trực tâm  (còn gọi là đường thẳng Euler của ).

**Hướng dẫn giải:**

****

Ta kí hiệu đường tròn qua 3 điểm *T, U, V* là (*TUV*).

Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *M, N, P*. Ta biết rằng (*W*) đi qua 9 điểm: *M, N, P, *và trung điểm *AH, BH, CH*. Giả sử *M’, N’, P’* là điểm đối xứng với *M, N, P* qua *O*.

Xét phép nghịch đảo cực *H* và giữ bất biến (*W*). Phép nghịch đảo này biến  tương ứng thành các đường tròn .

Ta sẽ chỉ ra rằng trục đẳng phương của (*HNN’*) và (*HPP’*) là đường thẳng Euler của tam giác *ABC* (do đường thẳng này bất biến qua phép nghịch đảo nói trên). Thật vậy:

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HNN’*) là *NN’*;

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HPP’*) là *PP’*;

Do đó trục đẳng phương của (*HNN’*) và (*HPP’*) đi qua *H* và giao của *NN’* và *PP’*. Nhưng ta biết rằng tâm *O* của (*W*) cũng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác *AB****C.*** Do đó trục đẳng phương của (*HNN’*) và (*HPP’*) chính là đường thẳng Euler của tam giác *AB****C.***

Tương tự, trục đẳng phương của (*HPP’*) và (*HMM’*), trục đẳng phương của (*HMM’*) và (*HNN’*) cũng là đường thẳng Euler của tam giác *AB****C.***

Do đó ba đường tròn  cùng đi qua một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác *AB****C.*** Từ đó ta có điểu phải chứng minh.

1. (Đề đề nghị chọn HSG khu vực duyên hải đồng bằng Bắc Bộ 2015 – trường THPT chuyên Bắc Ninh) Cho  nhọn với . Giả sử  và  là các điểm trên cạnh  sao cho  và  nằm giữa  và . Giả sử  là điểm thuộc miền trong của  sao cho  và . Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải:**



Vẽ hình bình hành *BPCQ*, khi đó *PQ* và *BC* giao nhau tại trung điểm *M* của mỗi đường.

Do đó *DE* và *PQ* cũng giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường suy ra *PDQE* là hình bình hành. Suy ra  từ đó *A, E, Q* thẳng hàng.

Vẽ hình bình hành *BPAT*. Khi đó ta cũng suy ra *TACQ* là hinh bình hành.

Ta có .

Do đó tứ giác TAQB nội tiếp.

Ta thấy qua phép tịnh tiến véc tơ  thì tam giác *BQT* biến thành tam giác *PC****A.***

Do đó  (đpcm)

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Thái Nguyên, trại hè Hùng Vương lần thứ 10) Cho tam giác *ABC* nhọn (**) có *AH* là đường cao. *P*, *Q* là chân các đường vuông góc hạ từ *H* xuống *AB*, *A****C.*** Gọi *M* là giao của *PQ* và *BC, K* là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và *AM*, *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *BP****C.*** Chứng minh *K*, *H*, *I* thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải:**



Dễ dàng chứng minh được *PQCB* là tứ giác nội tiếp.

Ta có *M****B.****MC* = *MP*.*MQ*. Do hai tam giác *MHP* và *MQH* đồng dạng nên.

Vậy có  suy ra *AKPH* là tứ giác nội tiếp. Vậy 

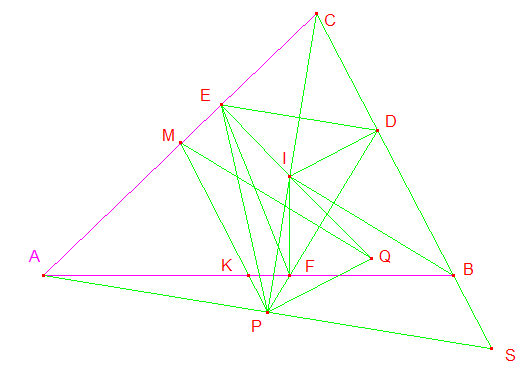
Ta có năm điểm *A*, *K*, *P*, *H*, *Q* cùng thuộc đường tròn tâm *J* là trung điểm của *AH*. Bây giờ ta lại có *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *PQCB* nên . Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* ta dễ dàng chứng minh được . Từ đó *OA* // *IJ*.

Lại có . Từ đó *AJIO* là hình bình hành. Dễ dàng suy ra *JHIO* cũng là hình bình hành. Mà *JO* vuông góc với *AK* (do *AK* là trục đẳng phương của hai đường tròn (*J*) và (*O*)). Vậy *HI* cũng vuông góc với *AK*. Lại có *KH* vuông góc với *AK* nên *K*, *H*, *I* thẳng hàng.

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Sơn La, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho  ngoại tiếp đường tròn tâm . Các cạnh  lần lượt tiếp xúc với đường tròn  tại . Gọi  lần lượt là các trung điểm các cạnh  và ,  là giao điểm của các đường thẳng  và .

a. Chứng minh rằng các điểm  thẳng hàng.

b. Gọi  là điểm thỏa  và . Chứng minh .

**Hướng dẫn giải:**

a. Kéo dài *AP* cắt *CB* tại *S*. Vì *M*, *K* là các trung điểm *AC* và *AB* nên *P* là trung điểm *AS*.

+ Trong tam giác *CAS* có *CP* là trung tuyến và phân giác nên 

+ Đặt . Có  (1)

+ 

.

 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: . Chú ý: .

Trong tam giác ABS có  thẳng hàng.

b. Có *CI* là trung trực của *ED* nên tam giác *PDE* cân tại *P*.

+

+ Giả sử  là điểm thỏa mãn  suy ra *Q*, *I*, *E* thẳng hàng.

+ Có  .

, (3)

Nhưng , (4)

+ Từ (3) và (4) suy ra tứ giác  nội tiếp



 hay 

+ Suy ra  tức  *Suy ra điều phải chứng minh.*

1. (Đề thi đề xuất chọn HSG vùng duyên hải đồng bằng Bắc Bộ năm 2015 - trường THPT chuyên Vĩnh Phúc) Cho tam giác  nhọn không cân, nội tiếp đường tròn .  là điểm nằm trong tam giác sao cho . Đường tròn đường kính  cắt các cạnh  lần lượt tại  và cắt đường tròn  tại điểm  khác . Chứng minh rằng  đồng quy.

**Hướng dẫn giải:**



Gọi *AD* là đường kính của (*O*), dễ thấy *G,P,D* thẳng hàng và . Giả sử *PE,PF* cắt *DB,DC* tại *K*,*L*; *EF* cắt *BC* tại *T*.

Theo định lý Desargues để chứng minh *BE, CF, GP* (hay *PD*) đồng quy ta chỉ cần chứng minh *T,K,L* thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được:  (1)

Dễ thấy tứ giác *EFBC* nội tiếp nên  (2)

Cũng từ *EFBC* nội tiếp suy ra 

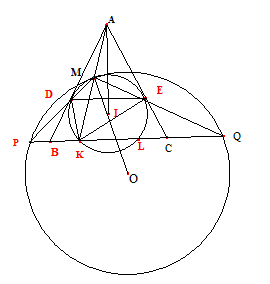
Tứ giác *PKDL* là hình bình hành suy ra .

Suy ra  (3).

Ta có  (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được . Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác *DBC* ta suy ra *T,K,L* thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Hà Giang, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho tam giác  cân tại . Một đường tròn  tiếp xúc với các cạnh  và cắt cạnh  lần lượt tại  và . Đoạn  cắt đường tròn  tại . Gọi  và  lần lượt là điểm đối xứng của  qua  và . Gọi  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng các điểm  và tâm đường tròn  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải:**

Gọi *I* là tâm của ; *D*, *E* theo thứ tự là tiếp điểm của  và *AB*, *AC*; (*O*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *MPQ*.

Dễ thấy tứ giác *MDKE* điều hòa. Do đó



Dễ thấy *DE* // *PK*, mà  nên .

Vậy. Từ đó  hay *M, D, P* thẳng hàng.

Chứng minh tương tự *M, E, Q* thẳng hàng.

Kết hợp với suy ra 

Do đó qua phép vị tự tâm *M* tỉ số k các điểm *M*, *D*, *E* theo thứ tự biến thành các điểm *M*, *P*, *Q*.

Vậy qua phép vị tự tâm *M* đường tròn biến thành đường tròn (*O*).

Do đó *M*, *I*, *O* thẳng hàng.

1. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Lai Châu, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho  nhọn, các đường cao  cắt nhau tại . Cho  là một điểm tùy ý trên cạnh  ( khác ). Kẻ đường kính  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  và đường kính  của đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải:**



Gọi *L* là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (*BKF*) và (*CKE*).

Ta có tứ giác *BFEC* nội tiếp. Do đó  *A* thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (*BFK*) và (*CEK*). Suy ra *A*, *L*, *K* thẳng hàng.

Vì tứ giác *BFHD* nội tiếp nên . Do đó tứ giác *DHLK* nội tiếp. Suy ra .

Mà  nên *M*, *H*, *L* thẳng hàng.

Tương tự *N*, *H*, *L* thẳng hàng. Từ đó suy ra *M*, *H*, *N* thẳng hàng.

**LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.**

**Câu [TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG]**

Cho tam giác  ngoại tiếp đường tròn tâm Đường tròn tiếp xúc với các cạnh  lần lượt tại  Gọi  là giao của  và là giao của  và, là giao của và***.*** Gọi lần lượt là trung điểm của  và. Chứng minh rằng vuông góc, với là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

 **Hướng dẫn giải**

Xét 2 đường tròn: và 

Ta có . (1) Gọi là bán kính đường tròn. Vì lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (*C*­1) với các cạnh  nên đồng quy.

Suy ra .

Ta có .

Khi đó:

, (2) Từ (1) và (2) suy ra  là trục đẳng phương của và 

⇒ 

**Câu ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ĐB&DHBB**

Cho tam giác nhọn nội tiếp đường tròn  và có**.** Giả sử là trực tâm tam giác, đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt  tại điểm thứ hai là (). Đường thẳng đi qua, vuông góc với cắt  tại F và cắt đường tròn  tại hai điểm 

a) Chứng minh tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử ta có hình vẽ như trên (các trường hợp khác tương tự).

Gọi K là giao điểm thứ hai của CH và đường tròn

Ta có D là trung điểm KH và D cũng là trung điểm IJ, suy ra tứ giác IHJK là hình bình hành.

Suy ra  (1).

Lại có tứ giác BHCE nội tiếp, suy ra . Mà .

Suy ra , như vậy tam giác  cân tại C,  nên D là trung điểm AE.

Suy ra tứ giác IAJE là hình bình hành và  (2).

Lại có  (3) (do tứ giác IAJK nội tiếp).

Từ (1), (2), (3) suy ra , như vậy tứ giác IHJE nội tiếp. Giả sử  và  là đường tròn ngoại tiếp các tứ giác IHJE và BHCE. Ta có HE chính là trục đẳng phương của  và . Lại có  (cùng là ).

Mà ;. Suy ra .

Suy ra F thuộc HE là trục đẳng phương của  và . Vậy H, E, F thẳng hàng.

**Câu TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH**

Cho tam giác  có đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với các cạnh  lần lượt tại các điểm. Đường thẳng AI cắt đường tròn tại M, N sao cho M nằm giữa A và N. Đường thẳng DM và EF cắt nhau tại K, đường thẳng NK cắt đường tròn tâm tại điểm thứ hai là P khác N. Đường thẳng AI và EF cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác  là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng: Các điểm thẳng hàng.

**Câu HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ**

Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại .  lần lượt là các đường kính của  và . Gọi  là trung điểm của ;  là điểm thuộc đường phân giác của góc  sao cho  không vuông góc với  và  không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua  vuông góc với  lần lượt cắt các đường tròn ,  tại các điểm  khác .  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai ,  cắt đường tròn  tại điểm thứ hai .

*1.* Gọi  là giao điểm của  với . Chứng minh rằng  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác .

2. Chứng minh rằng ba đường thẳng  và  đồng quy.

**Hướng dẫn giải**

1. Không mất tính tổng quát giả sử  là điểm thuộc đường phân giác trong của góc .

Ta có tứ giác  là hình bình hành nên suy ra 

Lại có 

Do đó  thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có  thẳng hàngMặt khác



Do đó  là tiếp tuyến của đường tròn 2. Ta có  nên 4 điểm  cùng thuộc đường tròn đường kính .

Mà  nên suy ra  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính .

Do đó  (1) Mặt khác



 (2)

Từ (1) và (2) suy ra



Vậy 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn. Gọi  là giao điểm của và 

Vì 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn nên ta có

 (3) Ta có  (4) Gọi  là giao điểm của  với 

Chứng minh tương tự câu 1) ta có  là tiếp tuyến của đường tròn 

Mặt khác tứ giác  là hình thang vuông tại  và  là trung điểm của  nên suy ra . Do đó  (5) Từ (3), (4), (5) suy ra  cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn  nên  thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng  đồng quy tại 

***\*) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm  ( nằm ngoài các đoạn  và  nằm trong các đoạn )***

II. Bài toán vecto và quan hệ vuông góc

1. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2011 toán 10)

**a.** Cho tứ giác lồi  và điểm  thỏa mãn hệ thức . Có kết luận gì về điểm , hãy chứng minh điều đó.

**b.** Cho tam giác  có các đường trung tuyến  và . Chứng minh rằng đường cao  nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính  và .

1. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

**a.** Cho tứ giác , với , , . Chứng minh rằng: 

**b.** Cho tam giác  và , ,  lần lượt là trung điểm các cạnh , , . Dựng ra phía ngoài tam giác các đoạn thẳng ,  sao cho ,  và , . Từ dựng đường thẳng  song song và cùng hướng với sao cho .

Chứng minh .

1. (THPT Chuyên Bắc Giang – Tỉnh Bắc Giang – Thi Toán Khối 11)

Cho tam giác . Gọi  là điểm thỏa mãn  và giả sử. Gọi  là hình chiếu vuông góc của  trên , là trung điểm của đoạn . Chứng minh .

Lời giải

|  |  |
| --- | --- |
| Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó . Do  nên Vì  =nên  ⇒⇒ |  |

⇒**** và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp⇒****

Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB⇒****

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD ⇒ BH ⊥ CD⇒ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH ⊥ B**C.**

1. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2001 lớp 10)

**a.** Cho tam giác  có ba điểm , ,  là trung điểm các cạnh , , . Tính giá trị biểu thức .

**b.** Cho tam giác  có , ; .  và  là phân giác trong cắt nhau tại . Tính .

1. ( Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2005-2006 lớp 12)

Cho tam giác  cân đỉnh . Gọi  là trung điểm của ,  là trọng tâm tam giác và  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh .

IV. Bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng và tính chất đồng quy

1. (THPT Chuyên Cao Bằng – Thi Olympic 2014 – Toán 11)

**Cho hai đường tròn  và  ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài , tiếp tuyến chung trong  của hai đường tròn (**, . **Chứng minh rằng , ,  đồng quy.**

1. (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Đề xuất đề thi học sinh giỏi Toán 11- 2015)

**Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn . Kẻ đường kính . thuộc  thỏa mãn .  cắt tại  khác . Chứng minh , ,  thẳng hàng với  là trực tâm tam giác .**

Lời giải

**DP cắt AB tại E thì M là trung điểm DE (vì OM là đường trung bình)**

**BHCD là hình bình hành nên DH cắt DC tại I là trung điểm mỗi đường**

**Suy ra MI là đường trung bình của ∆DHE → MI // EH**

**→ EH // BC**

**Kéo dài CH cắt (O) tại Q. Ta sẽ c/m Q ≡ P, bằng cách c/m Q, E, D thẳng hàng.**

**Vì BD // CQ nên BDCQ là hình thang cân (hình thang nội tiếp).**

**Ta có: vì ∆QBH cân tại B**

**vì hình thang BDCQ cân**

**Nên**

**Mà Q, H, C thẳng hàng, nên E, Q, D thẳng hàng, hay QP (đpcm**

1. (THPT Chuyên tỉnh Lào Cai – Trại hè Hùng Vương lần X)

**Cho đường tròn tâm  và hai đường kính , . Tiếp tuyến với đường tròn tại  cắt  tại ,  cắt đường tròn  lần nữa tại . Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh ba điểm , ,  thẳng hàng.**

1. ( THPT Chuyên Hưng Yên- Thi Môn Toán Khối 11 -2015)

**Cho tam giác  nội tiếp đường tròn . Đường phân giác trong của góc  cắt  tại  khác . Gọi  là điểm đối xứng với  qua .  cắt  tại  khác .  là một điểm thay đổi trên cạnh  . Đường thẳng  cắt  tại  khác . Từ  kẻ đường thẳng song song với cắt  tại . Đường tròn  ngoại tiếp  cắt  tại   và cắt  tại  . Chứng minh , ,  thẳng hàng và đương thẳng  luôn đi qua điểm cố định khi  thay đổi.**

Lời giải

|  |
| --- |
| **+) là điểm chính giữa của cung của và E đối xứng qua nên**  **(vì ).**  **(g.c.g) là trung trực** |
| **(do ).**  **Mà (do )**  **Có**  **và cùng phía đối với nên thẳng hàng.** |
| **+) Đường thẳng cắt tại khác**  **(vì ).**  **(vì ).** |
| **là đường kính của .**  **Mà là điểm chính giữa cung chứa thì không nên cố định. Vậy đường thẳng luôn qua điểm cố định khi thay đổi.** |

1. (THPT Chuyên tỉnh Thái Nguyên – Trại hè Hùng Vương lần X)

**Cho tam giác  nhọn  có  là đường cao. ,  là chân đường vuông góc hạ từ  xuống , . Gọi  là giao của  và ,  là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  và ,  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh , ,  thẳng hàng.**

Lời giải

**Dễ dàng chứng minh được *PQCB* là tứ giác nội tiếp.**

**Ta có *MB.MC* = *MP*.*MQ*. Do hai tam giác *MHP* và *MQH* đồng dạng nên.**

**Vậy có  suy ra *AKPH* là tứ giác nội tiếp. Vậy .**

**Ta có năm điểm *A*, *K*, *P*, *H*, *Q* cùng thuộc đường tròn tâm *J* là trung điểm của *AH*. Bây giờ ta lại có *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *PQCB* nên . Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* ta dễ dàng chứng minh được . Từ đó *OA* // *IJ*.**

**Lại có . Từ đó *AJIO* là hình bình hành. Dễ dàng suy ra *JHIO* cũng là hình bình hành. Mà *JO* vuông góc với *AK* (do *AK* là trục đẳng phương của hai đường tròn (*J*) và (*O*)). Vậy *HI* cũng vuông góc với *AK*. Lại có *KH* vuông góc với *AK* nên *K*, *H*, *I* thẳng hàng.**

****

1. (THPT Chuyên tỉnh Tuyên Quang – Trại hè Hùng Vương lần X)

**Cho hai đường tròn  và  tiếp xúc với nhau tại ,  nằm trong ,  là một dây cung của  tiếp xúc với  tại . Gọi  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác . Chứng minh rằng**

**a. Ba điểm** **,** **,**  **thẳng hàng.**

**b. Khi dây**  **thay đổi thì điểm**  **thuộc một đường tròn cố định.**

Lời giải

|  |
| --- |
| **a) Gọi M’ là giao điểm thứ hai của MA với (O) và B’ là giao điểm thứ hai của BA với (O’) (khác A).**  **Đặt . Ta thấy , suy ra O’M // OM’. Vì O’M ⊥ BC nên OM’ ⊥ BC, do đó M’ là điểm chính giữa cung . Vậy AM là phân giác của góc , hay I thuộc đường thẳng AM.** |
| **b) Theo tính chất của phân giác thì .**  **Mặt khác, theo tính chất của phương tích thì**  **.** |
| **Vì  nên**  **.**  **Do đó**  **,** |
| **Vậy . Do  nên  cố định.** |

1. THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Tỉnh Yên Bái – Thi Toán Khối 11)

**Cho tam giác  không cân tại . Gọi  và  theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác .  tiếp xúc với ,  tại , . Các điểm ,  thuộc  sao cho  song song  và  song song . Gọi ,  lần lượt là giao điểm của ,  với . Chứng minh rằng**

**a.** **,** **,**  **đồng quy tại một điểm, gọi đó là điểm** **.**

**b. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác** **,**  **cùng tiếp xúc với**  **và cùng đi qua một điểm thuộc** **.**

|  |
| --- |
| Lời giải    **a) Gọi *S* là giao điểm của *BC* và *EF*. Gọi *D* là tiếp điểm của (*I*) với *BC.* Ta có *DMFP* là tứ giác điều hòa** |
| **Mà *EM*//*DS*.**  **Do đó *EP* đi qua trung điểm của *DS*.**  **Tương tự *FQ* đi qua trung điểm của *DS*.**  **Vậy *BC*, *EP*, *FQ* đồng quy tại trung điểm của *DS*. Kí hiệu là *K*.** |
| **b) Kí hiệu (*XYZ*) là đường tròn ngoại tiếp tam giác *XYZ*.**  **Gọi *d* là tiếp tuyến vơi (*I*) tại *P*. Ta có:**  **.**  **Suy ra *d* tiếp xúc với (*BPK*) tại *P*. Vậy (*PBK*) tiếp xúc với (*I*).**  **Tương tự (*CQK*) tiếp xúc với (*I*).** |
| **Kí hiệu *EE*, *FF* theo thứ tự chỉ tiếp tuyến với (*I*) tại *E*, *F*. Gọi *L* là giao điểm khác *K* của (*BPK*) và (*CQK*). Ta có:**            **Suy ra *L* thuộc (*ABC*). Điều đó có nghĩa là đường tròn ngoại tiếp các tam giác *BPK* và *CQK* cùng đi qua một điểm thuộc (*O*).** |

1. (Sở GDĐT Nghệ An – Chọn đội tuyển dự thi HSG quốc gia lớp 12- 2006-2007)

**Cho tam giác . Gọi hai điểm , lần lượt là trung điểm các cạnh ,  và  là hình chiếu của  lên . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác , , đồng quy tại một điểm đồng thời đường thẳng đi qua điểm đó và điểm H đi qua trung điểm đoạn thẳng .**