E. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Dạng cơ bản:

. $\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A < B \end{cases}$

. $\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

. $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B \ge 0 \\ A > B^2 \end{cases}$

. $\sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B} \Leftrightarrow A < B$

2. Các dạng khác:

Đặt điều kiện, nâng cả 2 vế lên luỹ thừa tương ứng để khử căn. lưu ý điều kiện khi lũy thừa bậc chẵn.

. Đặt ẩn phụ.

. *Cần nhớ:*

+ Nếu $a \ge 0$ và $b \ge 0$, ta có: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

+ Với mọi $a, b \in R$, ta có: $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$

II. CÁC VÍ DỤ.

Ví dụ 1:

Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \ge 3\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

(ĐH Quốc Gia TPHCM năm 1997).

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 5x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \ \vee x \ge 2 \\ x \le 1 \ \vee x \ge 3 \\ x \le 1 \ \vee x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 4 \ \vee x \ge 4$ (1)

*$x \ge 4$: Ta có: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \ge 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$ (2)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \ge 2\sqrt{x-4}$ (3) (chia 2 vế cho $\sqrt{x-1} > 0$)

vì

$\left.\begin{matrix} x \ge 4 \Rightarrow x - 2 > x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > \sqrt{x-4} \\ x - 3 > x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} > \sqrt{x-4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} > 2\sqrt{x-4}$

$\Rightarrow x \ge 4$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow x \ge 4$ là nghiệm của (2).

* x = 1: (2) thỏa.

* x < 1: (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{4-x}$ (4)

(chia 2 vế (*) cho $\sqrt{1-x} > 0$)

Với $x < 1 \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} 0 < 2 - x < 4 - x \Rightarrow \sqrt{2-x} < \sqrt{4-x} \\ 0 < 3 - x < 4 - x \Rightarrow \sqrt{3-x} < \sqrt{4-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} < 2\sqrt{4-x}$

$\Rightarrow$ (4) không thỏa $\Rightarrow$ (2) không thỏa.

Tóm lại, nghiệm của bất phương trình cho là: $x \ge 4 \ \vee x = 1$

Ví dụ 2:

Tìm a để bất phương trình : $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ có nghiệm với a là tham số dương.

(ĐH Y DƯỢC TPHCM năm 1996).

Giải

$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ Điều kiện $\begin{cases} x \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

Đặt $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0, \quad \forall x > 1$

BBT:

x	1		$+\infty$
f'(x)	||	+	
f(x)	1	$\searrow$	0

Vì $\lim y_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = 0$

Dựa vào BBT để bất phương trình: $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>a$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 0<a<1$

<u>Ví dụ 3:</u>

Giải bất phương trình: $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9$

↑(ĐH DÂN LẬP VĂN LANG năm 1997).

Giải

Ta có: $(x-3)\sqrt{x^2+4}\le x^2-9 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x^2+4}\le (x-3)(x+3)$ (1)

TH 1: $x-3\ge 0\Leftrightarrow x\ge 3$: $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}\le x+3$

$\Leftrightarrow x^2+4\le x^2+6x+9 \Leftrightarrow x\ge -\frac{5}{6}$ (2)

Kết hợp với $x\ge 3$ ta được: $x\ge 3$

TH 2: $x-3\le 0\Leftrightarrow x\le 3$ (3)

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}\ge x+3$ (4)

. Nếu $x+3\le 0\Leftrightarrow x\le -3$ thì (4) thỏa $\forall x\le -3$ (5)

. Nếu $x+3\ge 0\Leftrightarrow x\ge -3$ thì (4) $\Leftrightarrow x^2+4\ge x^2+6x+9\Leftrightarrow x\le -\frac{5}{6}$ (6)

$\Rightarrow -3\le x\le -\frac{5}{6}$ (7)

(5) và (6) $\Rightarrow x\le -\frac{5}{6}$

Tóm lại, nghiệm của bất phương trình là: $x\le -\frac{5}{6}\vee x\ge 3$

<u>Ví dụ 4:</u>

Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-3}-\sqrt{x-1}<\sqrt{x-2} \quad (1)$$

(Trường TH Kỹ Thuật Y Tế 3 năm 1997).

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x-3\ge 0\\ x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow x-3<x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)}$

$\Leftrightarrow -x<2\sqrt{(x-1)(x-2)}$ (2)

(2) thỏa với $x\ge 3$

Vậy nghiệm bất phương trình là $x\ge 3$.

<u>Ví dụ 5:</u>

Cho bất phương trình: $(x^2+1)^2+m\le x\sqrt{x^2+2}+4$

1. Giải bất phương trình trên khi m = 3

2. Xác định tham số m để bất phương trình đã cho được thỏa với mọi x trên đoạn $[0,1]$.

(ĐH Quốc Gia TPHCM năm 1997 đợt 3, Khối A).

Giải

1. $(x^2+1)^2+m\le x\sqrt{x^2+2}+4$ (*)

Với m = 3: $(*)\Leftrightarrow (x^2+1)^2+3\le x\sqrt{x^2+2}+4$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2\le x\sqrt{x^2+2}$ (**)

. x < 0: (**) không thỏa $\Rightarrow$ bất phương trình VN.

. x = 0: (**) thỏa.

. x > 0: (**) $\Leftrightarrow x(x^2+2)\le \sqrt{x^2+2}$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+2)^2\le x^2+2\Leftrightarrow x^2(x^2+2)\le 1$

$\Leftrightarrow x^4+2x^2-1\le 0\Leftrightarrow 0\le x^2\le \sqrt{2}-1\Leftrightarrow 0\le x\le \sqrt{\sqrt{2}-1}$

Vậy nghiệm : $0\le x\le \sqrt{\sqrt{2}-1}$

2. Xác định m để bất phương trình cho thỏa $\forall x\in[0,1]$

$(*)\Leftrightarrow m\le -(x^2+1)^2+x\sqrt{x^2+2}+4$

$\Leftrightarrow m\le -x^4-2x^2+x\sqrt{x^2+2}+3$

$\Leftrightarrow m\le -x^2(x^2+2)+x\sqrt{x^2+2}+3$ (**)

Đặt $t=x\sqrt{x^2+2}$ với $0\le x\le 1\Rightarrow 0\le t\le \sqrt{3}$

(**) $\Leftrightarrow m\le -t^2+t+3$ (***)

Đặt $f(t)=-t^2+t+3,\ t\in\left[0,\sqrt{3}\right]$; $\Rightarrow f'(t)=-2t+1,\ f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

BBT:

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	0

(*) đúng $\forall x \in [0,1]$ thì (****) đúng $\forall t \in [0,\sqrt{3}] \Leftrightarrow m \le \sqrt{3}$.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ.

4.1. Cho bất phương trình: $mx - \sqrt{x-3} \le m+1$
1. Giải bất phương trình với m = 1
2. Với giá trị nào của m thì bất phương trình có nghiệm.
(ĐH HÙNG VƯƠNG KHỐI A năm 1999).

4.2. Giải bất phương trình: $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$
(ĐH Quốc Gia TPHCM năm 1999 Đợt 1 Khối D).

4.3. Định m để bất phương trình: $\sqrt{2x^2+1} < m - x$ có nghiệm (1)

4.4. Định m để bất phương trình: $-4\sqrt{(4-x)(2+x)} \le x^2 - 2x + m - 18$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2,4]$.

4.5. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < \sqrt{5-2x}$
(ĐH THỦY LỢI năm 2001).

4.6. Giải bất phương trình: $\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} \ge \frac{2}{x}$
(ĐH AN GIANG - KHỐI A năm 2001).

4.7. Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3} \ge \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$
(ĐH Ngoại Thương Khối A năm 2001)

HƯỚNG DẪN VÀ GIẢI TÓM TẮT

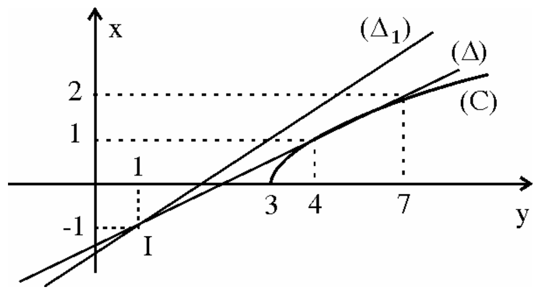
4.1.
1. $mx - \sqrt{x-3} \le m+1$ (1)

Với m = 1: (1) $\Leftrightarrow x - \sqrt{x-3} \le 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \le \sqrt{x-3} \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 \le 0 \\ x \ge 3 \end{cases}$ VN

2. (1) $\Leftrightarrow mx - m - 1 \le \sqrt{x-3}$

Đặt
$y = f(x) = mx - m - 1$
là đường thẳng (Δ)
quay quanh
điểm I (1, -1).
Vẽ đồ thị hàm
$y = \sqrt{x-3}$
$x = 3 \Rightarrow y = 0$
$x = 4 \Rightarrow y = 1$
$x = 7 \Rightarrow y = 2$



$\Rightarrow$ đồ thị (C) của $y = \sqrt{x-3}$ như hình vẽ.

Khi đường thẳng (Δ): y = mx - m - 1 tiếp xúc với đồ thị (C) phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C).

$mx - m - 1 = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ (mx-m-1)^2 = x-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ m^2x^2 - (2m^2+2m+1)x + m^2 + 2m + 4 = 0 \end{cases}$

$\Delta = (2m^2+2m+1)^2 - 4m^2(m^2+2m+4)$

$= 8m^2 - 4m - 1$

Khi (Δ) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1+\sqrt{3}}{4} (m > 0)$

$\Rightarrow$ hệ số góc của (Δ_1) tiếp xúc với (C) là $m = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow$ Bất phương trình có nghiệm khi $m < \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

4.2. $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$ (1) Điều kiện

$-x^2 + 4x \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4$

Đặt $t = \sqrt{-x^2+4x}$ $\quad (t \ge 0)$.

$(1) \Leftrightarrow -t^3 - t^2 + 4 < 2 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$

4.3. $\sqrt{2x^2+1} < m - x$ (1)

Đặt $f(x) = \sqrt{2x^2+1} + x,\ x \in R,\ f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + 1 = \frac{2x + \sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \ge 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1} + x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{2}|x| + x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2}+1)x = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-\sqrt{2})x = +\infty$

BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.4. Đặt $t = \sqrt{(4-x)(2+x)} = \sqrt{-x^2+2x+8}$

$t'_x = \frac{-x+1}{\sqrt{-x^2+2x+8}},\ t'_x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

BBT:

x	-2		1		4
t'_x		+	0	-	
t	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Phương trình cho $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 4t + 10 \le m$

$f'(t) = 2t - 4,\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (với $t \in [0,3]$

BBT:

t	0		2		3
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	10	$\searrow$	6	$\nearrow$	8

$\Rightarrow m \ge \max f(t) = 10$

4.5. $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < \sqrt{5-2x}$ (1)

Điều kiện $-2 \le x \le \frac{5}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < \sqrt{5-2x} + \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x + 2 < 5 - 2x + 3 - x + 2\sqrt{(5-2x)(3-x)}$

$\Leftrightarrow 2x - 3 < \sqrt{2x^2 - 11x + 15}$ (*) Ta nhận thấy bất đẳng thức đúng với

$\forall x \in \left[-2, \frac{3}{2}\right]$ với $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$: Hai vế của (*) đều không âm, nên bình

phương 2 vế:

$4x^2 - 12x + 9 < 2x^2 - 11x + 15 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 2$

Vậy bất đẳng thức cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le x < \frac{3}{2} \\ \begin{cases} \frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} < x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$

4.6. Điều kiện $x - \frac{1}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1} \ge 2$

$\Leftrightarrow x^3 + 1 + x^3 - 1 + 2\sqrt{x^6 - 1} \ge 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^6 - 1} \ge 2 - x^3$ (*)

Bất đẳng thức (*) đúng $\forall x \ge \sqrt[3]{2}$ (1)

với $1 \le x < \sqrt[3]{2}$ thì (*) $\Leftrightarrow x^6 - 1 \ge 4 - 4x^3 + x^6$

$\Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \le x < \sqrt[3]{2}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow x \ge \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$

4.7. $\sqrt{x+3} \ge \sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x}$ (1) Điều kiện $4 \le x \le 7$ (*)

(1) $\Leftrightarrow x + 3 \ge (\sqrt{2x-8} + \sqrt{7-x})^2$

$\Leftrightarrow x + 3 \ge x - 1 + 2\sqrt{(2x-8)(7-x)}$

$\Leftrightarrow 2 \ge \sqrt{(2x-8)(7-x)}$

$\Leftrightarrow 4 \ge (2x-8)(7-x)$

$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 5 \vee x \ge 6$ (**)

(*) và (**) $\Rightarrow 4 \le x \le 5 \vee 6 \le x \le 7$