**CHỦ ĐỀ 2. QUAN HỆ VUÔNG GÓC. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN**

## **Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa và các phép toán:**

* Định nghĩa, tính chất và các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.
* Phép cộng, trừ vectơ:
* ***Quy tắc ba điểm***: Cho ba điểm *A, B, C* bất kì, ta có: .
* ***Quy tắc hình bình hành***: Cho hình bình hành *ABCD*, ta có: .
* ***Quy tắc hình hộp:*** Cho ***hình*** hộp , ta có: .
* Lưu ý:
* ***Điều kiện để hai vectơ cùng phương***:

Hai vectơ  và  () .

* Điểm *M*chia đoạn thẳng *AB*theo tỉ số *k* (), điểm *O*tùy ý.

Ta có:  

* ***Trung điểm của đoạn thẳng***: Cho *I*là trung điểm của đoạn thẳng *AB*, điểm *O* tùy ý.

Ta có:  

* ***Trọng tâm của tam giác***: Cho *G* là trọng tâm *ABC*, điểm *O* tùy ý.

Ta có:  

1. **Sự đồng phẳng của ba vectơ:**

* ***Định nghĩa***: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
* ***Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:*** Cho ba vectơ , trong đó  và  không cùng phương.

Khi đó:  đồng phẳng 

* Cho ba vectơ  không đồng phẳng,  tùy ý.

Khi đó: 

1. **Tích vô hướng của hai vectơ:**

* ***Góc giữa hai vectơ trong không gian***: Ta có: .

Khi đó: 

* ***Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:***

Cho . Khi đó: 

* Với  hoặc , quy ước: 
* Với ****, ta có: 

### KỸ NĂNG CƠ BẢN

***Dạng 1:* Chứng minh đẳng thức. Phân tích vectơ. Áp dụng công thức tính tích vô hướng.**

* Áp dụng các phép toán đối với vectơ (phép cộng hai vectơ, phép hiệu hai vectơ, phép nhân một vectơ với một số).
* Áp dụng các tính chất đặc biệt của hai vectơ cùng phương, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

**Ví dụ**: Cho hình lăng trụ ,  là trung điểm của  . Đặt ,, . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. .** **B. . C.** . **D. .**

**Hướng dẫn :**

Cần lưu ý tính chất  là trung điểm của thì . Khi đó :  .

***Dạng 2:* Chứng minh hai đường thẳng song song, ba điểm thẳng hàng, đường thẳng song song với mặt phẳng, các tập hợp điểm đồng phẳng**

* Ứng dụng điều kiện của hai vectơ cùng phương, ba vectơ đồng phẳng

**Ví dụ** : Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A*, *B*, *C*, *D* tạo thành hình bình hành là:

**A. .** **B. .**

**C. .** **D. .**

**Hướng dẫn**:

Để A, B, C, D tạo thành hình bình hành thì  hoặc . Khi đó

**A. .**

**B.** **** : Với  là trọng tâm của tứ giác (hoặc tứ diện) .

**C.**  .

**D.** .

Vậy chọn **A.**

## *Bài 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG*

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:**

Vectơ  được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* nếu giá của  song song hoặc trùng với đường thẳng *d.*

1. **Góc giữa hai đường thẳng:**

* Cho ,  và ,  cùng đi qua một điểm. Khi đó: 
* Giả sử  lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b và .

Khi đó: 

* Nếu  hoặc  thì .

1. **Hai đường thẳng vuông góc:**

* .
* Giả sử  lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b. Khi đó: 
* Cho . Nếu  thì .

***Lưu ý***: Hai đường thẳng vuông góc với nhau chỉ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

### KỸ NĂNG CƠ BẢN :

**Xác định góc giữa hai đường thẳng, chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

**Ví dụ** :Cho hình hộp *ABCD.A’B’C’D’* có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

**A. .**  **B. .**  **C. .**  **D. .**

**Hướng dẫn**

Theo tính chất hình hộp, các cạnh bên vuông góc các cạnh đáy nên 

## *Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG*

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:** 
2. **Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:** 
3. **Tính chất:**

* Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng:là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp tất cả các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.
* 
* 
* 
* 
* 
* 

1. **Định lý ba đường vuông góc:**

Cho  và ,  là hình chiếu của *b* lên . Khi đó: 

1. **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:**

* Nếu  vuông góc với  thì góc giữa ** và  là .
* Nếu  không vuông góc với  thì góc giữa ** và  là thì góc giữa ** và  với  là hình chiếu của *d* trên .
* Chú ý: góc giữa ** và  là  thì .

### KỸ NĂNG CƠ BẢN

**Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**

**Ví dụ** : Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

**A.** Nếu đường thẳng  thì  vuông góc với hai đường thẳng trong .

**B.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì .

**C.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  thì  vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong .

**D.** Nếu và đường thẳng  thì .

**Hướng dẫn** :

**A.** Đúng vì .

**B.** Sai vì Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  thì .

**C.** Đúng vì .

**D.** Đúng vì 

## *Bài 4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG*

### KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Góc giữa hai mặt phẳng:**

* Nếu  thì góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc giữa hai đường thẳng  và 
* Giả sử . Từ điểm , dựng  thì góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc giữa hai đường thẳng  và .
* Chú ý: Gọi góc giữa hai mặt phẳng  và  là  thì .

1. **Diện tích hình chiếu của một đa giác:**

Gọi *S* là diện tích của đa giác ***ℋ*** nằm trong  và *S’* là diện tích của đa giác ***ℋ’*** là hình chiếu vuông góc của đa giác ***ℋ*** lên . Khi đó  với  là góc giữa hai mặt phẳng  và .

1. **Hai mặt phẳng vuông góc:**

Nếu hai mặt phẳng  vuông góc mặt phẳng  thì góc giữa hai mặt phẳng  và  bằng 900.

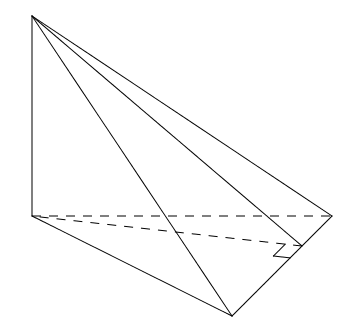
***Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau:*** 

1. **Tính chất:**

* 
* 
* 

### KỸ NĂNG CƠ BẢN

**Dạng 1 : Góc giữa hai mặt phẳng**

**Ví dụ :** Cho hình chóp *S.ABC* có  và đáy là tam giác vuông ở *A****.*** Khẳng định nào sau đây ***sai***?

**A. **.

**B.** .

**C.** Vẽ ,  thì góc  là góc giữa hai mặt phẳng  và 

**D.** Góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc 

**Hướng dẫn :**

**A.** Đúng vì  .

**B.** Đúng vì , 

**C.** Đúng vì .

 nên góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc giữa hai đường thẳng  và , là góc .

**D.** Sai do cách xác định như câu **C.**

# BÀI TẬP

**NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU**

1. Trong không gian cho tứ diện đều. Khẳng định nào sau đây là ***sai***:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Trong không gian cho hình hộp . Khi đó 4 vectơ nào sau đây đồng phẳng?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện .  lần lượt là trung điểm của  và . Chọn mệnh đề ***đúng***:

**A. .** **B. .**

**C. .** **D.** ..

1. Trong không gian cho hai đường thẳng  và  lần lượt có vectơ chỉ phương là . Gọi  là góc giữa hai đường thẳng  và . Khẳng định nào sau đây là ***đúng***:

**A.** 

**B.** .

**C.** Nếu  và  vuông góc với nhau thì .

**D.** Nếu  và  vuông góc với nhau thì .

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

**A.** Nếu  thì bốn điểm  đồng phẳng

**B.** Tam giác  có  là trung điểm cạnh  thì ta có đẳng thức: 

**C.** Vì  nên suy ra  là trung điểm của 

**D.** Vì  nên 4 điểm  đồng phẳng.

1. Cho tứ diện  có trọng tâm . Chọn mệnh đề ***đúng***:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho tứ diện đều . Mệnh đề nào sau đây là ***sai?***

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Trong không gian cho 3 vectơ không đồng phẳng. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

**A.** Các vectơ  đồng phẳng.

**B.** Các vectơ  đồng phẳng.

**C.** Các vectơ  không đồng phẳng.

**D.** Các vectơ không đồng phẳng.

1. Cho lăng trụ tam giác . Đặt , , . Biểu diễn vectơ  qua các vectơ . Chọn đáp án ***đúng:***

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

**A.** Nếu  thì 4 điểm  đồng phẳng.

**B.** 

**C.** Nếu  thì  là trung điểm của .

**D.** Cho  và . Nếu mặt phẳng  và  vuông góc với nhau thì hai đường thẳng  và  cũng vuông góc với nhau.

1. Cho hình lăng trụ ,  là trung điểm của **.** Đặt ,, . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. . B. .**

**C. .** **D. .**

1. Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A, B, C, D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D. **.

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt = ; = ; = ; = . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. .**  **B. .**

**C. .**  **D. .**

1. Cho tứ diện *ABCD****.*** Gọi *M* và *P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD.*Đặt ,, .Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. .** **B. .**

**C. .** **D. .**

1. Cho hình hộp  có tâm **.** Gọi  là tâm hình bình hành **.** Đặt ,, , . Chọn khẳng định **đúng**?

**A. .** B..

**C. .** **D. .**

1. Cho chóp  có đáy là hình vuông cạnh , , . Tính góc  giữa đường  và mặt phẳng ?

**A. . B. . C. . D..**

1. Cho  có  và  cùng vuông góc với đáy,  đều cạnh  ,  Tính góc  giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho  đều và hình vuông  nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.**  .

1. Cho  có đáy hình thang vuông tại  và  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết  tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 600. Tính góc giữa  và mặt phẳng ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có , đáy là tam giác vuông tại , , . Tính góc giữa hai mặt phẳng  và  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho  có đáy là hình vuông cạnh ,  tạo đáy góc 450,  vuông góc với đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho chóp  có đáy là hình vuông cạnh  vuông góc với mặt phẳng đáy và  tạo với mặt phẳng đáy góc 450. Tính góc giữa  và .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho  có  đôi một vuông góc. Biết rằng  Hỏi góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho  có đáy là hình chữ nhật,  vuông góc mặt phẳng đáy,  hợp với mặt phẳng đáy góc 450 và hợp với  góc 300. Tính góc giữa  và mặt phẳng đáy?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho chóp tứ giác  có đáy là hình chữ nhật cạnh  Các cạnh bên đều có độ dài  Tính góc giữa  và  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D**.

1. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

**A.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong .

**B.** Nếu đường thẳng  thì  vuông góc với hai đường thẳng trong .

**C.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng nằm trong  thì .

**D.** Nếu  và đường thẳng  thì .

1. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm **.** Qua  có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1**.**

1. Qua điểm  cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

1. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề ***sai*** ?

**A.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau**.**

**B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song**.**

**C.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song**.**

**D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song**.**

1. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là *3, 4, 5* thì độ dài đường chéo của nó là:

**A. .** **B.** 50. **C. .** **D.** 12.

1. Cho hình chóp  có và  vuông ở **. ** là đường cao của **.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai***?

**A. .** **B. .** **C.** . **D. .**

1. Cho điểm *A* nằm ngoài mặt phẳng **.** Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên ***.*** *M, N* là các điểm thay đổi trong **.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

**A.** Nếu  thì **. B.** Nếu  thì ***.***

**C.** Nếu  thì ***.* D.** Nếu  thì ***.***

1. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông gó**C.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.** Ba mặt phẳng  đôi một vuông gó**C.**

**B.** Tam giác *BCD* vuông**.**

**C.** Hình chiếu của ** lên mặt phẳng  là trực tâm tam giác *BC****D.***

**D.** Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

1. Cho đoạn thẳng *AB* là *(P)* là mặt phẳng trung trực của nó**.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**VẬN DỤNG THẤP**

1. Cho hình lập phương . Phân tích vectơ  theo các vectơ **.** Chọn đáp án **đúng**:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hình lập phương  có cạnh bằng **.** Tích vô hướng của hai vectơ  và  có giá trị bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình hộp  có: **.** Giá trị của  là:

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

1. Cho tứ diện , gọi  là trung điểm của các cạnh  và ,  là trọng tâm của tứ diện  và  là một điểm bất kỳ trong không gian. Giá trị  thỏa mãn đẳng thức  là:

**A.** 4. **B.** . **C.** . **D.** 2..

1. Cho lăng trụ tam giác . Đặt , , , Gọi  là điểm thuộc  sao cho ,  là trọng tâm của tứ diện . Biểu diễn vectơ  qua các vectơ . Chọn đáp án ***đúng*** :

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** ..

1. Cho chóp  có  đều cạnh  vuông cân tại  và 

Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

1. Cho chóp  có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh  vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho lăng trụ đều  có   Hỏi  bằng bao nhiêu để góc giữa  và  bằng 600 ?

**A.**  **B.** . **C.**  **D.** 

1. Cho chóp  có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh ,  là tam giác vuông cân tại  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy hình thoi cạnh  vuông góc mặt phẳng đáy là  Tính góc giữa  và  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật,, gọi ,  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên  và . Chọn mệnh đề **đúng :**

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp  có . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên . Khi đó khẳng định nào **đúng**?

**A.**  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**B.**  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

**C.**  là trọng tâm tam giác .

**D.**  là trực tâm tam giác .

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, tam giác  đều,  vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng  đi qua điểm  và vuông góc đường thẳng cắt các đường ,  lần lượt tại , .

1. .

2. 

3.  không đồng phẳng.

4. .

5. Thiết diện cắt hình chóp  bởi mặt phẳng  là hình bình hành.

Có bao nhiêu nhận định **sai**?

**A.** 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Tính cosin của góc giữa hai mặt bên liền kề nhau.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi  là trung điểm cạnh . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  và .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tam giác cân  có đường cao , mặt phẳng đáy , ,  0. Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên . Tam giác  vuông tại . Gọi  là góc giữa  và . Chọn khẳng định **đúng**.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho tam giác đều  cạnh . ,  lần lượt là đường thẳng đi qua ,  và vuông góc .  là mặt phẳng đi qua  và hợp với  một góc bằng .  cắt ,  tại  và . , . Đặt . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

1. Cho hình tứ diện  có hai mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng . Gọi  và  là hai đường cao của tam giác ,  là đường cao của tam giác , bảy điểm , , , , , ,  không trùng nhau. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

1. Cho hình chóp tứ giác đều  có  là tâm của hình vuông , , . Gọi  là mặt phẳng qua  và vuông góc với mặt phẳng . Thiết diện của  và hình chóp  là hình gì?

**A.** Hình thang vuông. **B.** Tam giác cân.

**C.** Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

1. Cho tứ diện đều  có các cạnh có độ dài bằng ,  là trung điểm đoạn . Gọi  là góc giữa  và . Chọn khẳng định **đúng?**

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

# ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**I – ĐÁP ÁN 7.2**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| A | B | A | D | A | C | A | C | A | A | B | D | A | C | C | A | A | D | A | B |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| B | A | A | B | D | C | A | D | D | A | C | C | B | C | D | A | D | C | A | A |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |  |  |  |  |  |
| B | D | D | C | A | A | C | A | A | D | A | B | A | C | D |  |  |  |  |  |

**II –HƯỚNG DẪN GIẢI**

1. Trong không gian cho tứ diện đều. Khẳng định nào sau đây là ***sai***:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Tứ diện là đều nên  không thể vuông góc với .

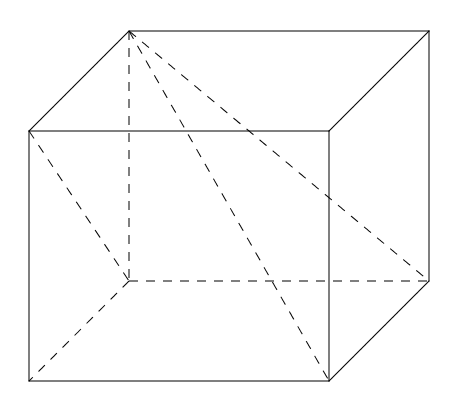
1. Trong không gian cho hình hộp . Khi đó 4 vectơ nào sau đây đồng phẳng?

**A.** . **B.** .

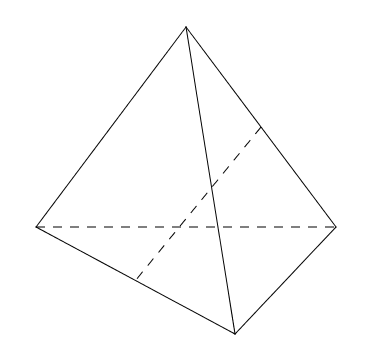
**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Từ hình vẽ ta thấy các vectơ  cùng thuộc mặt phẳng .



1. Cho tứ diện .  lần lượt là trung điểm của  và . Chọn mệnh đề ***đúng***:

**A. .** **B. .**

**C. .** **D.** ..

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta có:



1. Trong không gian cho hai đường thẳng  và  lần lượt có vectơ chỉ phương là . Gọi  là góc giữa hai đường thẳng  và . Khẳng định nào sau đây là ***đúng***:

**A.** 

**B.** .

**C.** Nếu  và  vuông góc với nhau thì .

**D.** Nếu  và  vuông góc với nhau thì .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: . (Theo tính chất tích vô hướng của hai vectơ)

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

**A.** Nếu  thì bốn điểm  đồng phẳng

**B.** Tam giác  có  là trung điểm cạnh  thì ta có đẳng thức: 

**C.** Vì  nên suy ra  là trung điểm của 

**D.** Vì  nên 4 điểm  đồng phẳng.

**Hướng dẫn giải**

Bằng quy tắc 3 điểm ta nhận thấy rằng  đúng với mọi điểm  nằm trong không gian chứ không phải chỉ riêng 4 điểm đồng phẳng.

1. Cho tứ diện  có trọng tâm . Chọn mệnh đề ***đúng***:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Vì  là trọng tâm của tứ diện nên suy ra**:**











1. Cho tứ diện đều . Mệnh đề nào sau đây là ***sai?***

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Vì tứ diện  là tứ diện đều nên có các cặp cạnh đối vuông góc.

Vậy .

1. Trong không gian cho 3 vectơ không đồng phẳng. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

**A.** Các vectơ  đồng phẳng.

**B.** Các vectơ  đồng phẳng.

**C.** Các vectơ  không đồng phẳng.

**D.** Các vectơ không đồng phẳng.

**Hướng dẫn giải**

Vì  không đồng phẳng nên :

*  không đồng phẳng,
*  không đồng phẳng.
*  không đồng phẳng.

Các vectơ  hiển nhiên là đồng phẳng.

1. Cho lăng trụ tam giác . Đặt , , . Biểu diễn vectơ  qua các vectơ . Chọn đáp án ***đúng:***

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

**A.** Nếu  thì 4 điểm  đồng phẳng.

**B.** 

**C.** Nếu  thì  là trung điểm của .

**D.** Cho  và . Nếu mặt phẳng  và  vuông góc với nhau thì hai đường thẳng  và  cũng vuông góc với nhau.

**Hướng dẫn giải**

 thỏa mãn biểu thức  (với  là duy nhất) của định lý về các vectơ đồng phẳng.

1. Cho hình lăng trụ ,  là trung điểm của **.** Đặt ,, . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. . B. .**

**C. .** **D. .**

**Hướng dẫn giải**

Cần lưu ý tính chất  là trung điểm của thì .

Khi đó**:**

.

1. Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A, B, C, D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành là:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D. **.

**Hướng dẫn giải**

Để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành thì  hoặc .

Khi đó

* 
* **:**  là trọng tâm của tứ giác (hoặc tứ diện) . (Loại)
*   (Loại)
*  (Loại)

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt = ; = ; = ; = . Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. .**  **B. .**

**C. .**  **D. .**

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là tâm hình bình hành , khi đó . Vậy .

1. Cho tứ diện *ABCD****.*** Gọi *M* và *P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD.*Đặt ,, .Khẳng định nào sau đây đúng?

**A. .** **B. .**

**C. .** **D. .**

**Hướng dẫn giải**

.

1. Cho hình hộp  có tâm **.** Gọi  là tâm hình bình hành **.** Đặt ,, , . Chọn khẳng định **đúng**?

**A. .** B..

**C. .** **D. .**

**Hướng dẫn giải**

Do  là tâm hình bình hành *ABCD* nên





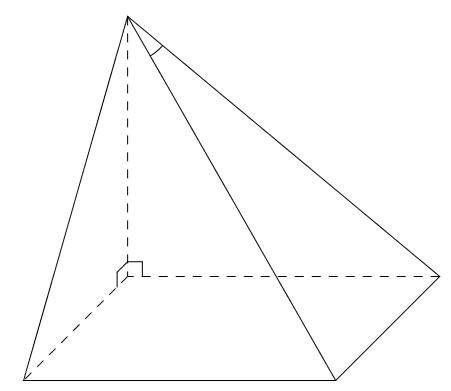




1. Cho chóp  có đáy là hình vuông cạnh , , . Tính góc  giữa đường  và mặt phẳng ?

**A. . B. .**

**C. . D..**

**Hướng dẫn giải**

Ta có . Tức  là hình chiếu vuông góc của  lên 

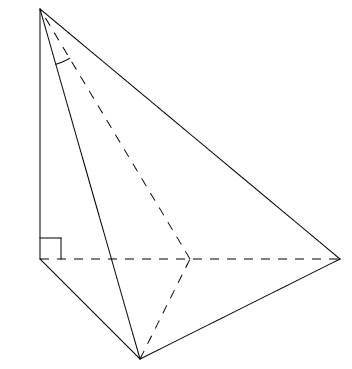
 Góc giữa  và  là .

; 

1. Cho  có  và  cùng vuông góc với đáy,  đều cạnh  ,  Tính góc  giữa  và  ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Lấy  là trung điểm  Dễ chứng minh  suy ra  là hình chiếu vuông góc của  lên .

 Góc giữa  và  là góc 

1. Cho  đều và hình vuông  nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.**  .

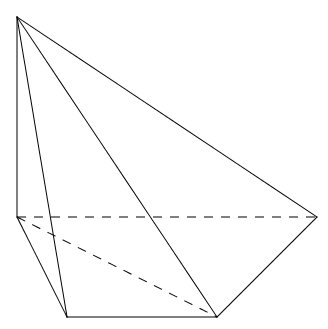
**Hướng dẫn giải**

|  |  |
| --- | --- |
| Lấy  là trung điểm  khi đó  Góc giữa  và  là |  |

1. Cho  có đáy hình thang vuông tại  và  vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết  tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 600. Tính góc giữa  và mặt phẳng ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Dễ chứng minh  và  nên , vậy góc giữa  và  là .

Dễ thấy góc giữa  tạo mặt phẳng đáy là góc  nên 



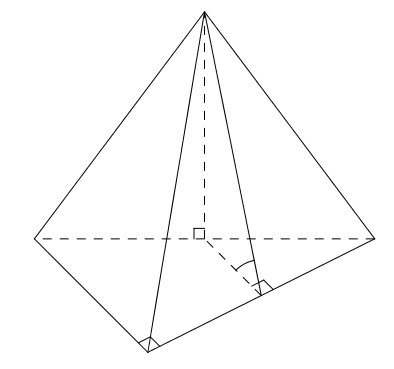


1. Cho hình chóp  có , đáy là tam giác vuông tại , , . Tính góc giữa hai mặt phẳng  và  ?

**A.**  **B.** 

**C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Từ giải thiết có ., nếu ta hạ  thì *H* là tâm đường tròn ngoại tiếp  là trung điểm 

Ta có:  Góc giữa  và  là 

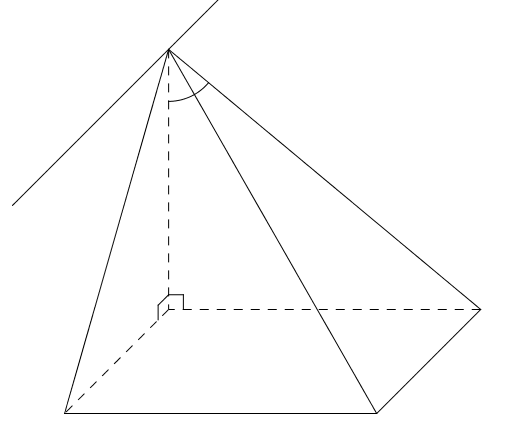
 

1. Cho  có đáy là hình vuông cạnh ,  tạo đáy góc 450,  vuông góc với đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Ta thấy giao tuyến của  và  là đường  qua  và song song với 

Dễ chứng minh  nên góc giữa  và  là .

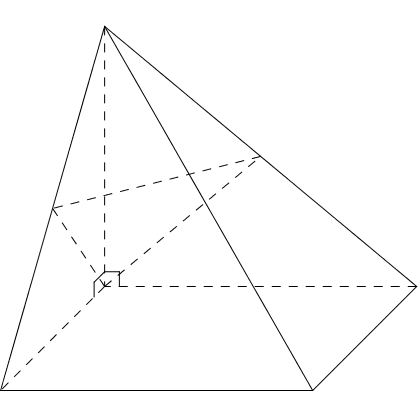
Ta dễ thấy góc giữa  và mặt phẳng đáy là góc .Từ đó dễ dàng tính được.

.

1. Cho chóp  có đáy là hình vuông cạnh  vuông góc với mặt phẳng đáy và  tạo với mặt phẳng đáy góc 450. Tính góc giữa  và .

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Dễ chứng minh được góc giữa  và đáy là  nên 

Lấy  là trung điểm  Dễ chứng minh  suy ra góc giữa  và  là góc giữa .

.

1. Cho  có  đôi một vuông góc. Biết rằng  Hỏi góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

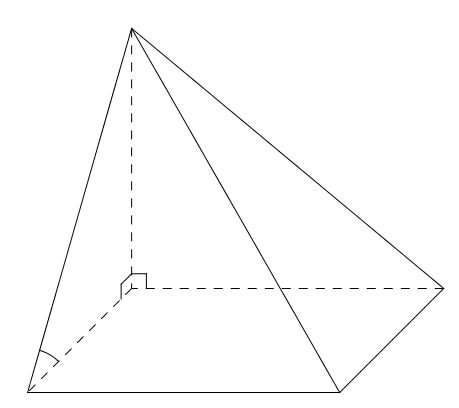
Hạ  Góc giữa  và  là 

.

1. Cho  có đáy là hình chữ nhật,  vuông góc mặt phẳng đáy,  hợp với mặt phẳng đáy góc 450 và hợp với  góc 300. Tính góc giữa  và mặt phẳng đáy?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy rằng 











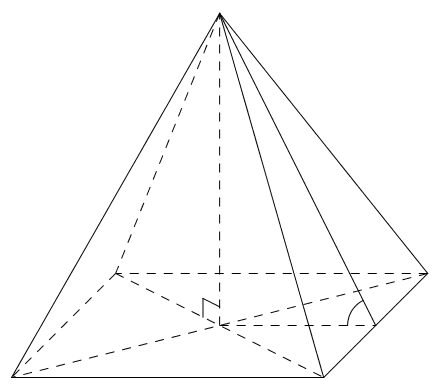


Xét  có  nên .

1. Cho chóp tứ giác  có đáy là hình chữ nhật cạnh  Các cạnh bên đều có độ dài  Tính góc giữa  và  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D**.

**Hướng dẫn giải**

Hạ  Do các cạnh bên bằng nhau nên  là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy, tức  là tâm đáy. Lấy  là trung điểm  nên góc giữa  và  là 

.

.

1. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

**A.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong  thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong .

**B.** Nếu đường thẳng  thì  vuông góc với hai đường thẳng trong .

**C.** Nếu đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng nằm trong  thì .

**D.** Nếu  và đường thẳng  thì .

**Hướng dẫn giải**:

* Đường thẳng  có thể vuông góc với hai đường thẳng song song nằm trên mặt phẳng  nên đáp án này **sai.**
* Nếu đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  thì lúc đó nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng  nên nó vuông góc với hai đường thẳng thì hiển nhiên **đúng.**
* đường thẳng  vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì nó sẽ vuông góc với mặt phẳng  và do đó  vuông với mọi đường thẳng nằm trong  là hiển nhiên **đúng.**
* Đường thẳng  vuông góc với mặt phẳng  thì  song song hoặc trùng với giá của véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng  do đó nếu đường thẳng  thì  là **đúng.**

1. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm **.** Qua  có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1**.**

**Hướng dẫn giải**

Qua điểm  có vô số đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước chúng nằm trong mặt phẳng qua  và vuông góc với đường thẳng Δ.

1. Qua điểm  cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Hướng dẫn giải:**

Qua điểm  cho trước có duy nhất một mặt phẳng đi qua  và vuông góc với một đường thẳng cho trước

1. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề ***sai*** ?

**A.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau**.**

**B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song**.**

**C.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song**.**

**D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song**.**

**Hướng dẫn giải**:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song **nếu hai đường thẳng này đồng phẳng.** Trong trường hợp không đồng phẳng chúng có thể chéo nhau trong không gian**.**

Các đáp án khác đều đúng hiển nhiên

1. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là *3, 4, 5* thì độ dài đường chéo của nó là:

**A. .** **B.** 50. **C. .** **D.** 12.

**Hướng dẫn giải:**

Độ dài đường chéo của hình hộp là

Vậy đáp án đúng là **.**

1. Cho hình chóp  có và  vuông ở **. ** là đường cao của **.** Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai***?

**A. .** **B. .** **C.** . **D. .**

**Hướng dẫn giải**:

Ta có  nên .

Mà  vuông tại *B***:** .

; .

Nếu  thì  vuông tại *A* (Vô lý)**.**

Vậy  là **sai.**

1. Cho điểm *A* nằm ngoài mặt phẳng **.** Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên ***.*** *M, N* là các điểm thay đổi trong **.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

**A.** Nếu  thì **.**

**B.** Nếu  thì ***.***

**C.** Nếu  thì ***.***

**D.** Nếu  thì ***.***

**Hướng dẫn giải**

Theo tính chất mối liên hệ giữa đường xiên  và hình chiếu **.** Đường xiên dài hơn có hình chiếu dài hơn và ngược lại**.** Mệnh đề **sai** là “Nếu  thì ”**.**

1. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông gó**C.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

**A.** Ba mặt phẳng  đôi một vuông gó**C.**

**B.** Tam giác *BCD* vuông**.**

**C.** Hình chiếu của ** lên mặt phẳng  là trực tâm tam giác *BC****D.***

**D.** Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

**Hướng dẫn giải**:

* Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên ; ; do đó ba mặt phẳng ; *; * đôi một vuông góc.
* Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên **.** 



Tương tự 

Do đó H là trực tâm của tam giác .

* Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên



Vậy hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

* + Vậy tam giác *BCD* vuông là **sai**.

1. Cho đoạn thẳng *AB* là *(P)* là mặt phẳng trung trực của nó**.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**:

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B*  Nếu 

Mặt phẳng  là mặt phẳng trung trực của   do đó Nếu .

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B*  Nếu 

Nếu  là sai vì *MN* có thể là đoạn thẳng đi qua *A* và vuông góc với *AB* lúc đó .

**VẬN DỤNG THẤP**

1. Cho hình lập phương . Phân tích vectơ  theo các vectơ **.** Chọn đáp án **đúng**:

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Lưu ý phép cộng vectơ đối với hình vuông  : .

Ta có: 

1. Cho hình lập phương  có cạnh bằng **.** Tích vô hướng của hai vectơ  và  có giá trị bằng:

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



1. Cho hình hộp  có: **.** Giá trị của  là:

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Hướng dẫn giải**

Ta có . Vậy .

1. Cho tứ diện , gọi  là trung điểm của các cạnh  và ,  là trọng tâm của tứ diện  và  là một điểm bất kỳ trong không gian. Giá trị  thỏa mãn đẳng thức  là:

**A.** 4. **B.** . **C.** . **D.** 2..

**Hướng dẫn giải**

Vì  là trọng tâm tứ diện nên:









Vậy .

1. Cho lăng trụ tam giác . Đặt , , , Gọi  là điểm thuộc  sao cho ,  là trọng tâm của tứ diện . Biểu diễn vectơ  qua các vectơ . Chọn đáp án ***đúng*** :

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** ..

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  là trọng tâm của tứ diện  nên :













1. Cho chóp  có  đều cạnh  vuông cân tại  và 

Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

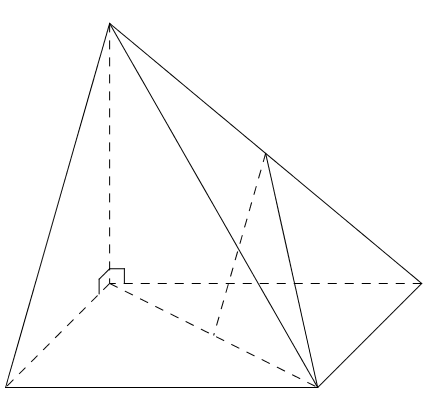
**Hướng dẫn giải**

Lấy  là trung điểm  Dễ thấy  nên  là hình chiếu vuông góc của  lên . Góc giữa  và  là 

.

1. Cho chóp  có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh  vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Lấy  là trung điểm  Khi đó góc cần tìm là góc giữa  và 

Ta có  là trung tuyến 



Xét  có :

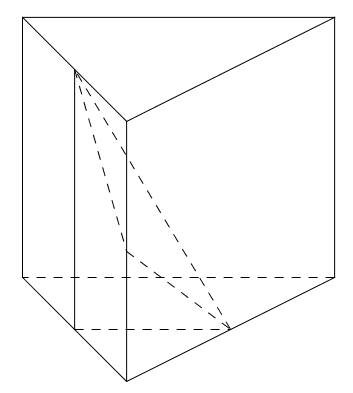




1. Cho lăng trụ đều  có   Hỏi  bằng bao nhiêu để góc giữa  và  bằng 600 ?

**A.**  **B.** . **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Lấy  là trung điểm  khi đó 

Suy ra góc cần tìm là góc giữa 

. Lấy  là trung điểm 

.

Suy ra **,** từ đó tính được 

1. Cho chóp  có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh ,  là tam giác vuông cân tại  và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa  và  ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

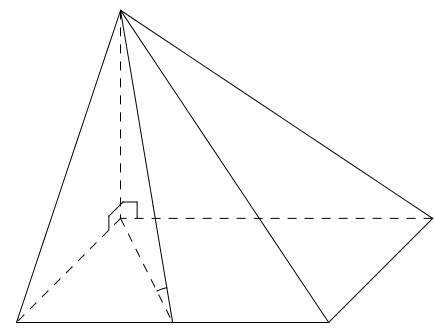
**Hướng dẫn giải**

Ta có  nên góc giữa  và  là góc giữa  và , vậy góc cần tìm là  Dễ chứng minh  vuông tại  nên .

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy hình thoi cạnh  vuông góc mặt phẳng đáy là  Tính góc giữa  và  ?

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Hướng dẫn giải**

Lấy  là trung điểm  Do  nên  đều. Dễ chứng minh  Góc cần tìm là .

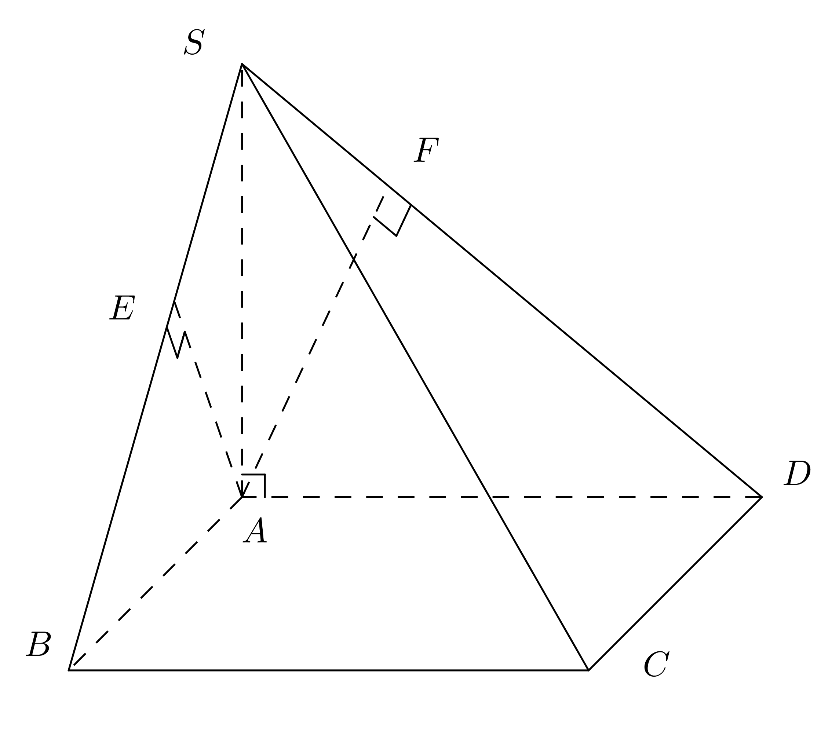
.

.

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật,, gọi ,  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  lên  và . Chọn mệnh đề **đúng :**

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

;

 ;



Tương tự ta cũng có .

Vậy .

1. Cho hình chóp  có . Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên . Khi đó khẳng định nào **đúng**?

**A.**  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**B.**  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác .

**C.**  là trọng tâm tam giác .

**D.**  là trực tâm tam giác .

**Hướng dẫn giải**

Do  nên hình chiếu vuông góc của  lên mặt phẳng  lần lượt là  thỏa . Vậy  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

1. Cho hình chóp  có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, tam giác  đều,  vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng  đi qua điểm  và vuông góc đường thẳng cắt các đường ,  lần lượt tại , .

1. .

2. 

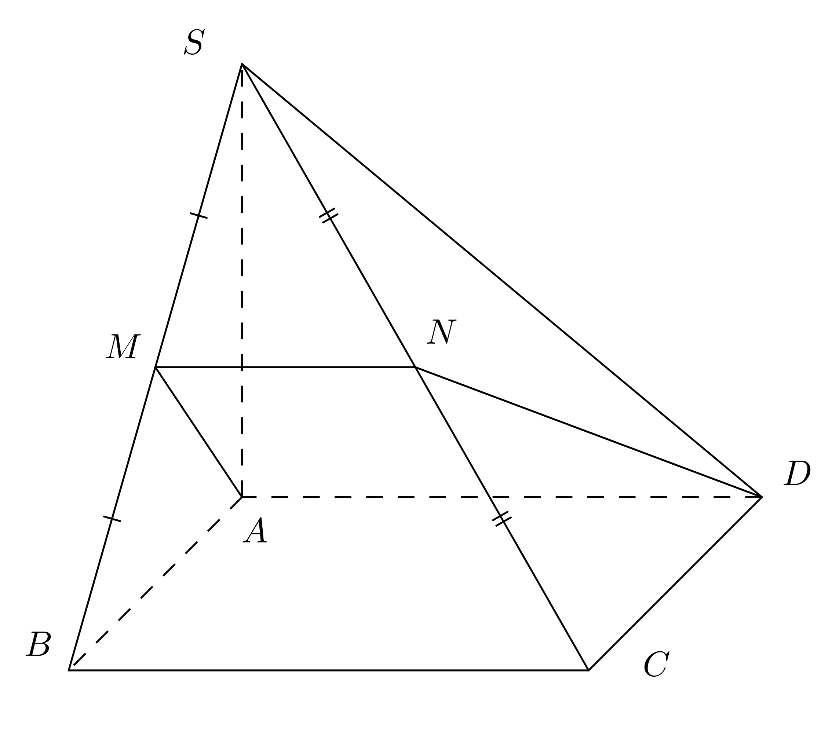
3.  không đồng phẳng.

4. .

5. Thiết diện cắt hình chóp  bởi mặt phẳng  là hình bình hành.

Có bao nhiêu nhận định **sai**?

**A.** 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

**Hướng dẫn giải**

Do tam giác  đều nên 





  vuông cân tại .

   là trung điểm .

 vuông tại  có . Vậy  là đường trung bình tam giác  .



 bốn điểm  đồng phẳng. Thiết diện được tạo thành là hình thang vuông .

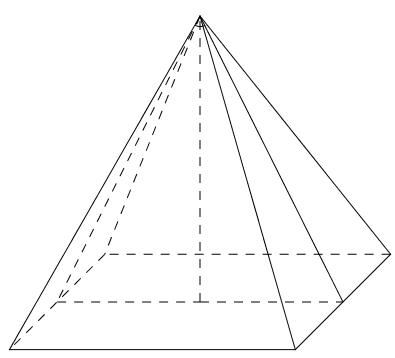
 có  nên 

Vậy có 2 nhận định **sai**.

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

**A. .** **B. .** **C. .** **D. .**

**Hướng dẫn giải**

Gọi ,  là trung điểm các cạnh  và ,  và . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là đường thẳng  qua  và song song , .

Vì  và  nên  và . Vậy góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc .

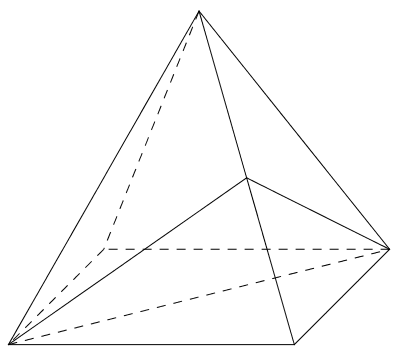
Mặt bên là các tam giác đều cạnh  nên , .

Khi đó : .

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Tính cosin của góc giữa hai mặt bên liền kề nhau.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là trung điểm các cạnh ,  và . Giao tuyến của hai mặt phẳng  và  là đường thẳng .

Vì  và  nên góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc .

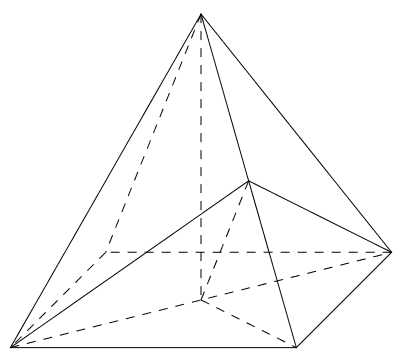
Mặt bên là các tam giác đều cạnh  nên , .

Khi đó : .

1. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng . Gọi  là trung điểm cạnh . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  và .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là trung điểm cạnh . Theo tính chất hình chóp đều .

Mặt bên là các tam giác đều cạnh  nên , .

Nên tam giác  cân tại , .

Vậy góc giữa hai mặt phẳng  và  là góc 

, .



1. Cho tam giác cân  có đường cao , mặt phẳng đáy , ,  0. Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên . Tam giác  vuông tại . Gọi  là góc giữa  và . Chọn khẳng định **đúng**.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Tam giác  có hình chiếu vuông góc lên  là tam giác .

.  và lần lượt có hình chiếu vuông góc lên  là  và  nên . Vậy tam giác  vuông cân tại . 



1. Cho tam giác đều  cạnh . ,  lần lượt là đường thẳng đi qua ,  và vuông góc .  là mặt phẳng đi qua  và hợp với  một góc bằng .  cắt ,  tại  và . , . Đặt . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Tam giác  có hình chiếu vuông góc lên  là tam giác  nên : .

Mặt khác .

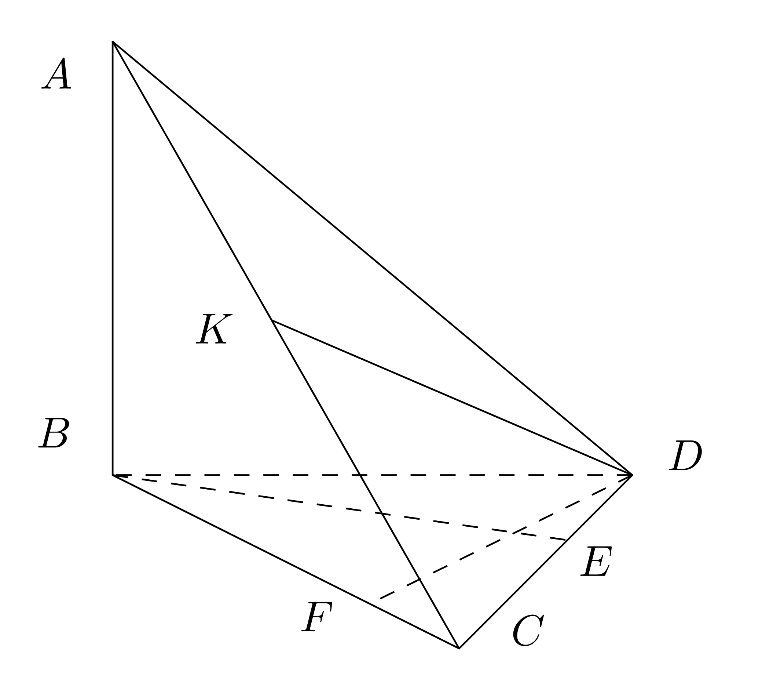
Vậy : .

1. Cho hình tứ diện  có hai mặt phẳng  và  cùng vuông góc với mặt phẳng . Gọi  và  là hai đường cao của tam giác ,  là đường cao của tam giác , bảy điểm , , , , , ,  không trùng nhau. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

**A.** . **B.** .

**C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**



* 
* ;



* 



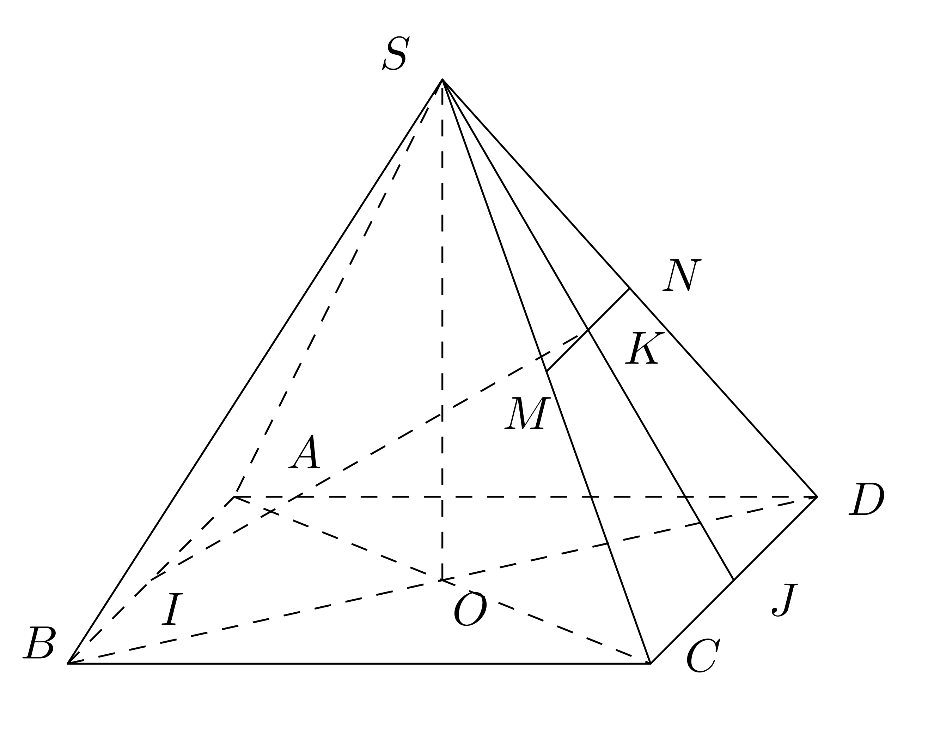
 hoặc  (vô lý)

Vậy  là khẳng định **sai**.

1. Cho hình chóp tứ giác đều  có  là tâm của hình vuông , , . Gọi  là mặt phẳng qua  và vuông góc với mặt phẳng . Thiết diện của  và hình chóp  là hình gì?

**A.** Hình thang vuông. **B.** Tam giác cân.

**C.** Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

**Hướng dẫn giải**

Gọi ,  là trung điểm , . Hiển nhiên 

Khi đó 

nên góc  là góc nhọn. Gọi  là hình chiếu vuông góc của  lên  thì  nằm trên đoạn .

Do cách xác định , , nên  hay  chính là .

Gọi  khi đó ,  nằm trên đoạn , .

Khi đó : , ,   nên thiết diện của  và hình chóp  là hình là hình thang .

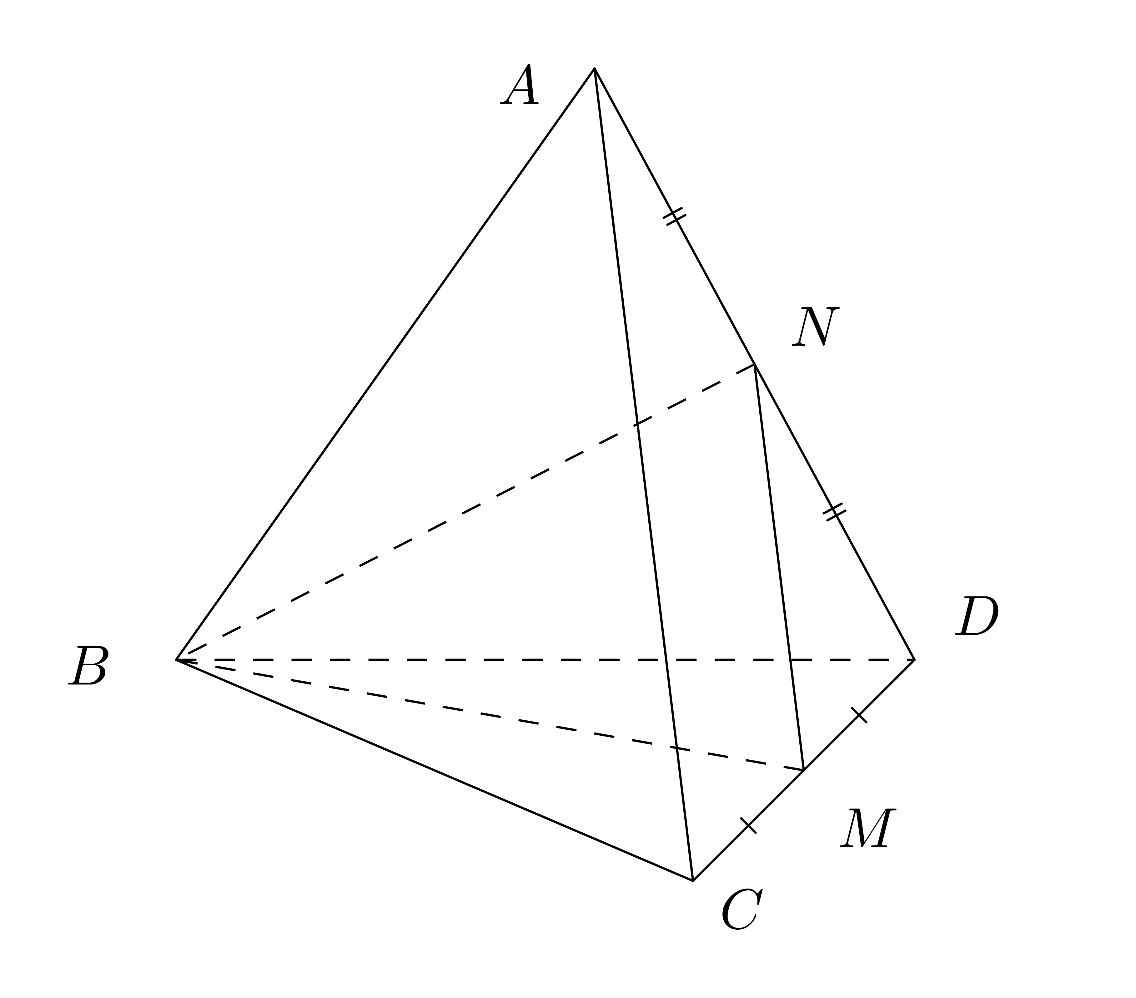
Mặt khác  vuông góc ,  tại các trung điểm ,  của hai đoạn ,  nên  là hình thang cân.

1. Cho tứ diện đều  có các cạnh có độ dài bằng ,  là trung điểm đoạn . Gọi  là góc giữa  và . Chọn khẳng định **đúng?**

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là trung điểm , khi đó  nên góc giữa *AC* và *BM* bằng góc giữa *MN* và *BM*, là góc , vậy .



; . .