**TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH LÍ KẸP**

1. Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức : n! > ( ) n (\*) (∀ n N\*).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy : với n =1, ta có 1 >  (đúng).

Giả sử (\*) đúng với n = k tức là : k! > ( )k. Ta đi chứng minh (\*) đúng với.

n = k+1.

Ta có (k+1)! = k!(k+1) >( ) k (k+1) = ( )k+1. > ( )k+1.

Bất đẳng thức cuối này đúng vì :.

(1+ )k =1++ +.+.=.

= 1+1++.+< 1+1+ +… +<1+1++.+<.

<1+1++.++.< 1+ = 3.

Vậy (\*) đúng với . Do đó , từ đây ta suy ra .

=> 0 <  <.

Vì  = 0.

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra:  = 0.

Vậy =2014.

Cho dãy số  thoả mãn .

Tính .

Từ giả thiết suy ra mội số hạng của dãy đều dương.

Đặt , ta có dãy .

Lại đặt , ta có dãy  .

Tìm được số hạng tổng quát của dãy là .

Từ đó ta có .

1. Cho dãy : .

a) Chứng minh dãy  hội tụ và tính .

b) Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: .

Đặt  và xét hàm .

Suy ra , như vậy  nghịch biến trên đoạn .

Dẫn đến .

Kết hợp công thức xác định dãy ta được.

.

Vậy .

b) *Nhận xét:*  thì .

Dẫn đến , .

 (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với .

Trường hợp , chú ý , kết hợp với (1) thu được:.

.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

1. Cho dãy số thực . Chứng minh dãy trên có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Chứng minh .

Với  đúng.

Giả sử  đúng với , ta chứng minh  đúng với .

Ta có .

;  (luôn đúng).

Vậy (1) được chứng minh.

Xét hàm  trên . Ta có .

Hàm  có  với mọi nên hàm này đồng biến trên .

Suy ra , suy ra .

hay hàm  nghịch biến trên .

Ta có .

Suy ra .

Quy nạp ta được dãy  giảm và dãy  tăng.

Hơn nữa  nên mỗi dãy trên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử , lấy giới hạn hai vế ta được.

.

Đặt , ta được phương trình .

Hàm  nghịch biến nên phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm, nhận thấy  là nghiệm nên nó là nghiệm duy nhất.

Suy ra , thay vào được .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn  và dãy  thỏa mãn . Chứng minh dãy  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Do đó .

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng .

Thật vậy:.

- Với n = 1, ta có  nên khẳng định đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với n . Ta có , ta cần chứng minh .

.

Bất đẳng thức cuối đúng nên khẳng định trên đúng với .

Theo nguyên lí qui nạp thì khẳng định được chứng minh.

Ta có .

Theo nguyên lí kẹp thì dãy  có giới hạn và .

1. Cho dãy số  được xác định bởi: .

Chứng minh dãy số hội tụ và tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh .

Thật vậy:  : .

(\*) đúng với .

Giả sử (\*) đúng tới , *k*, nghĩa là có : .

Ta chứng minh (\*) cũng đúng với *n= k+*1. Thật vậy .

 .

 ( vì khi  thì ).

.

⇒ (\*) cũng đúng với .

Vậy .

.

Vậy dãy hội tụ và có .

1. Cho phương trình:  với *n**N*, .

1)Chứng minh rằng với mỗi số nguyên , thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất .

2)Xét dãy số sau đây: ,  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình:  , với *n* nguyên,  **(1)**.

+) Ta có: . Do , nên khi  thì . Vậy  là hàm số đồng biến trên .

Lại có:  ;  ( vì  nguyên và  *n*3).

Ta có:  và  liên tục, đồng biến nên phương trình  có nghiệm duy nhất trên .

+) Mặt khác với  thì  ( do  ) suy ra  với mọi .

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi *n* nguyên, .

Gọi  là nghiệm dương duy nhất của phương trình .

Bây giờ xét dãy  với , .

Ta có:  hay .

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:.

 <  **(2)**.

(Chú ý rằng ở đây  nên , vì thế trong bất đẳng thức không có dấu bằng).

+) Mặt khác do , nên , nên từ (2) có:  **(3)**.

Bất đẳng thức **(3)** đúng với mọi n3 và  nên từ **(3)** ta có: .

+) Ta có: .

Từ đó:  **(5)**.

Đặt .

Ta có: suy ra từ **(5) .**

Vậy: .

1. Cho số thực xét dãy số được xác định bởi. Tìm tất cả các giá trị của  để dãy số có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó?.

**Hướng dẫn giải**

Với thì nên .

Với  thì .

Do đó .

Từ đó, tính được ,.

Kết luận + .

+ .

+ **.**

1. Cho dãy số  xác định như sau:**.** Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Xét hàm số : .

.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

.

Ta có :.

.

Vậy :  thì .

.

Gọi a là nghiệm của : .

Ta có : .

Theo định lí La-grăng : .

Do .

.

Mà .

Vậy : .

1. Cho dãy số  xác định như sau: . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

\* Vì  nên .

\* Áp dụng BĐT Cauchy ta có . Dấu bằng xảy ra .

.

\* .

\* .

Xét hàm số .

 nghịch biến trên .

\* Vì .

giảm và bị chặn dưới  có giới hạn hữu hạn.

\* Giả sử  . Từ  chuyển qua giới hạn ta có.

.

\* Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định bởi:  và , với . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi  ; ta có.

.

 (1).

Từ (1) ta có: (2).

Mặt khác, vì  nên từ  và chứng minh bằng quy nạp ta thu được  với mọi .

Do đó . Khi đó, .

nên theo nguyên lý kẹp giữa ta có: .

Vậy, từ (2) suy ra: .

Mặt khác, hàm số  liên tục trên nửa khoảng  nên.

.

Kết luận: .

1. a) Chứng minh rằng có đúng một dãy số thực thỏa mãn.

và.

b) Với dãy  xác định như trên, xét dãy  xác định bởi  Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn khi . Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng quy nạp ta sẽ chỉ ra rằng  xác định duy nhất với mỗi  Để làm được điều này ta cần dùng kết quả (chứng minh của nó là đơn giản) sau: Với mỗi số thực , phương trình  có đúng một nghiệm trên .

b) Để ý rằng .

Ta có giới hạn cần tìm bằng .

1. Giả sử  là dãy Fibonacci ( với ). Chứng minh rằng nếu  với mọi thì dãy số , trong đó  là xác định và nó có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  đã được xác định. Khi đó  được xác định khi .

\* Nếu  thì do  nên .

Từ giả thiết  ta viết , .

Giả sử , với i nào đó, .

Vì  nên .

Khi đó . Mâu thuẫn với giả thiết . Như vậy  là dãy số xác định.

Phương trình  có hai nghiệm . Có hai trường hợp xảy ra:.

*Trường hợp 1*: . Khi đó . Do đó .

*Trường hợp 2*: . Chú ý . Do đó .

Đặt , ta có.

.

Từ đó có  nên  khi (vì ).

Từ  suy ra  dần tới *u* khi (do ).

Tức là trong trường hợp này .

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn bằng 0 khi .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có , do đó dãy số  là dãy tăng, vì.

vậy .

,.

. Mà  nên theo định lý kẹp ta có.

.

1. Cho  là một dãy số dương. Đặt  với  Giả sử  với  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  là dãy số tăng.

Nếu dãy số  bị chặn trên thì là một dãy hội tụ và .

Xét trường hợp dãy số  không bị chặn trên thì .

Từ giả thiết ta có .

Từ đây ta thu được .

Do đó .

Theo nguyên lí kẹp ta có .

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có .

1. Cho dãy số  xác định bởi công thức truy hồi:  Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Khi đó.

.

Mặt khác  nên.

.

Từ (\*) và (\*\*) suy ra: .

Vậy:  Do đó  là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại .

Vì  liên tục trên  nên.

.

Vậy dãy  được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy  có giới hạn bằng **.**

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:.

1.  với mọi .

2.  với mỗi .

**Hướng dẫn giải**

 và bởi vì  nên .

.

.

.

Dùng quy nạp theo  ta CM được .

Cố định  ta có .

Xét dãy  ta có : .

Vậy .

Vậy .

Kết hợp ( 1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp ( 2) và (4) ta được .

Thử lại  ta thấy đúng.

1. Cho dãy số  được xác định như sau **.** Chứng minh rằng  có giới hạn hữu hạn khi  dần đến vô cùng.

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy , với mọi n nguyên dương, nên dãy số đã cho là dãy tăng thực sự.

Vậy để chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trên.

Ta chứng minh .

Thật vậy, với  nên điều cần chứng minh đúng.

Giả sử ta có: , với  nguyên dương. Ta cần chứng minh .

Theo công thức xác định dãy số có: .

Do đó  với mọi n nguyên dương từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1. Cho dãy số thực  xác định bởi**.** Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Có , giả sử . Từ công thức truy hồi ta có:.

 vì .

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được .

Xét hai dãy số mới  và  với .

Có , giả sử ta có , khi đó.

.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn .

Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được .

Do  nên suy ra .

Chứng minh tương tự đối với dãy số , ta cũng có .

Cuối cùng ta chứng minh  (1) bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có  và , với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới , tức là . Khi đó.

.

Từ  và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được .

1. Cho hai dãy số  xác định bởi ,  và  với n = 1, 2, 3,….Tìm  và .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi n = 1,2,3,… ta có.

.

Do đó:.

.

Tương tự ta có: .

Từ đó:;.

Chú ý:  và , nên theo nguyên lí kẹp ta có: .

Mặt khác:  hay . Suy ra: . Do đó =  (vì ).

1. Cho dãy số thực  xác định bởi . Chứng minh rằng dãy  có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

+ Ta Có , giả sử . Từ công thức truy hồi ta có:.

 vì .

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được .

+ Xét hai dãy số mới .

và .

- Có , giả sử ta có , khi đó.

.

Vậy bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  là dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1, nên nó có giới hạn hữu hạn . Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn tìm được . Do  nên suy ra .

- Chứng minh tương tự đối với dãy số , ta cũng có .

- Cuối cùng ta chứng minh  **(1)** bằng phương pháp quy nạp:.

Ta có  và , với n = 1, 2 bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng tới , tức là . Khi đó.

.

+ Từ  và áp dụng định lý kẹp ta suy ra được .

1. Tìm giới hạn: .

**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức: (\*)  ).

Bằng phương pháp qui nạp. Thật vậy: với , ta có  (đúng).

Giả sử (\*) đúng với  tức là: . Ta đi chứng minh (\*) đúng với.

.

Ta có  . .

Bất đẳng thức cuối này đúng vì:.

.

Vậy (\*) đúng với . Do đó , từ đây ta suy ra >.

=> . Vì .

Do đó theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta suy ra:  = 0.

Vậy =2014.