SỬ DỤNG PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Cho dãy số (U_n) định bởi $\begin{cases} U_1 = \sqrt{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + \sqrt{2} - 1}{1 + \left(1 - \sqrt{2}\right)U_n}; \quad n = 1,2,3,... \end{cases}$ $(*)$. Tính U_{2013}.

Hướng dẫn giải.

Tính đúng $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2.\tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{8}} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Từ $(*)$ ta viết được $U_{n+1} = \dfrac{U_n + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - U_n.\tan\frac{\pi}{8}}$ (1).

Theo quy nạp từ (1) và $U_1 = \sqrt{3} \Rightarrow U_n = \tan\left[\frac{\pi}{3} + (n-1).\frac{\pi}{8}\right]$.

Vậy $U_{2013} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + 2013.\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{6047\pi}{24}\right)$.

Bài 2. Cho dãy số xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2 - \sqrt{3}}{1 + \left(\sqrt{3} - 2\right)u_n} \end{cases} \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Tính u_{2014}.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Nên từ giả thiết ta có: $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \tan\frac{\pi}{12}}{1 - u_n.\tan\frac{\pi}{12}}$.

Đặt $2 = \tan\alpha \Rightarrow u_1 = \tan\alpha$, suy ra $u_2 = \dfrac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{12}}{1 - \tan\alpha.\tan\frac{\pi}{12}} = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$.

Theo quy nạp ta dễ dàng suy ra: $u_n = \tan\left(\alpha + (n-1)\frac{\pi}{12}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra: $u_{2014} = \tan\left(\alpha + 2013.\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\alpha + 168\pi - \frac{\pi}{4}\right)$.

$$= \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\alpha.\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.$$