**I. PHƯƠNG TRÌNH**

# 1. Không có tham số

## **Dạng 1: Biến đổi tương đương**

1. Giải phương trình ****

**Lời giải**

+Biến đổi phương trình tương đương :



1. Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình.

Xét  Khi đó phương trình đã cho tương đương với

Vì  nên  và  Suy ra  vì vậy



Do đó phương trình 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là  hoặc 

1. *[Đề thi hsg Bắc Sơn, Lạng Sơn]* Giải phương trình sau : 

**Lời giải**

****

1. Giải phương trình: ,với .

**Hướng dẫn giải.**









1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**



Tìm được nghiệm duy nhất x=2/3

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:







Vì 7 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

; ; ; 

Giải ba hệ phương trình trên ta được: .

1. **(THPT Quảng Xương 2 – Thanh Hóa, 2009-2010)** Giải phương trình:



Hướng dẫn giải

Đặt  ta được 

Giải ta được  suy ra 

## **Dạng 2: Đặt ẩn phụ**

1. Giải phương trình trên tập số thực: (1).

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện: .

****

**** không là nghiệm của phương trình.

.

Đặt .

Phương trình trở thành: .

Khi đó ta có: . Vậy .

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải**

Phương trình (1) .

Đặt . Ta có phương trình:

(\*).

.

Phương trình (\*)



.

Vậy .

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải**

Đặt . Điều kiện: 

Ta có: 

Thay vào phương trình ta được:  



+)  : phương trình vô nghiệm do 



Vậy  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình sau



**Lời giải**

Nhận xét rằng  không là nghiệm của phương trình đã cho.

Suy ra . Chia cả hai vế của phương trình cho  rồi đặt , ta có phương trình  

Xét hàm số .

Ta có hàm số  liên tục trên  và .

Suy ra hàm số  luôn đồng biến trên khoảng .

Khi đó phương trình đã cho có dạng 

 (do )

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  và .

1. Giải phương trình sau : 

**Lời giải**

Đặt .





Điều kiện xác định: 

Đặt  Ta có .

Phương trình đã cho trở thành







(tm đk).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là 

1. Giải phương trình:  (1)

* Điều kiện: 
*  và  do đó  và .
* (1) ⇔ 

⇔ 

* Đặt: a = 8 + 4 > 1, t = x2 – 2x -12. Điều kiện: t > 0.
* Do đó: (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat

Cách 1: (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat .

* Từ (I) ta được: 
* y = 1: là nghiệm của (2).
* y < 1: , y < 1: .
* Nên (2) có nghiệm duy nhất: y = 1. Do đó: (1) t = a ⇔ x2 – 2x – 12 = 8 + 4 ( thỏa \*)

⇔ x2 – 2x – 20 - 4 = 0 ⇔ x = 2 + 2 hoặc x = -2.

* Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: x = 2 + 2 hoặc x = -2.

Cách 2: Xét hàm số y = f(t) = lna + 1(t + 1) - lnat (a >1

* Ta được:  vì a > 1, nên hàm số giảm trên (0; +∞) và ta có f(t) = 0 có nghiệm t = a nên f(t) có nghiệm duy nhất t = a.
* Vậy: (1) (1) ⇔ lna + 1(t + 1) = lnat ⇔ t = a x2 – 2x – 12 = 8 + 4 ( thỏa \*)

⇔ x2 – 2x – 20 - 4 = 0 ⇔ x = 2 + 2 hoặc x = -2.

* Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: x = 2 + 2 hoặc x = -2.

1. Giải phương trình:  (1).

*  nên điều kiện là: x ≥ -1.
* x2 + 2x + 2 = (x +1) + (x2 + x + 1), đặt , 
* Với điều kiện x ≥ -1: (1) trở thành:

3(a2 + b2) = 10ab ⇔ 3a2 – 10ab + 3b2 = 0 ⇔ (a – 3b)(3a – b) = 0 ⇔ a = 3b hay a = b/3.

* a = 3b ⇔ =3 ⇔ x + 1 = 9(x2 + x + 1) ⇔ 9x2 + 8x + 8 = 0 (vô nghiệm)
* a = b/3 ⇔ 3a = b ⇔3 =⇔9(x + 1) = x2 + x + 1 ⇔ x2 - 8x - 8 = 0 

Vậy phương trình có hai nghiệm:.

1. Giải phương trình : 

Điều kiện: x  -1

+) Nếu x > 3 thì:

x- 3x + 2 = (x – 1) - 3(x- 1) > 4(x – 1) – 3(x – 1) = x – 1 >  Chứng tỏ x > 3 không thỏa mãn

Với -1  x  3

Đặt x = 2cost + 1 ( 0  t  )

Khi đó phương trình trở thành:

(2cost + 1) - 3(2cost + 1) + 2 = 

 8cost – 6cost = 

 2cos3t = 2cos

 cos3t = cos

1. Giải phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện xác định: 

Đặt  Ta có .

Phương trình đã cho trở thành





.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm là 

1. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình : 
2. *[Đề thi hsg tỉnh Vĩnh Long, 2015-2016]* Giải phương trình 

**Lời giải**

Phương trình tương đương với 

Đặt , ta có phương trình 



Vì  nên 



Tập nghiệm 

1. Giải phương trình: ,với 

**Hướng dẫn giải.**

Từ pt ta thấy 

(1) 

Đặt: 

Pt trở thành: 





Giải phương trình 

1. Giải phương trình: .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt  từ phương trình ta có 

Như vậy: ngược hướng

Suy ra: (1)

Giải (1) và thử lại ta thấy phương trình đã cho có nghiệm là 

1. Giải phương trình: ,với 

**Hướng dẫn giải.**

Đk: 

Đặt 

Ta có: 







Vậy phương trình có một nghiệm: ,

Giải phương trình: .

1. Giải phương trình: 

**Hướng dẫn giải.**

Phương trình đã cho có điều kiện 

Với điều kiện trên ta có:





Đặt  ta có:

Với  ta có : 

So với điều kiện , phương trình đã cho có nghiệm 

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện:  Đặt  (),

ta thu được hệ 

Suy ra





Do vậy 

Thay vào, thử lại thấy  thỏa mãn.

Đáp số: 

1. Giải phương trình: .

**Hướng dẫn giải.**



= 0

 (x = 0 không là nghiệm)

Đặt  ta được 

So với điều kiện ta được 

So với điều kiện , ta được 

1. Giải phương trình sau:  với .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt . Khi đó phương trình trở thành:



(\*)

(\*) 

• Với  thì  có một nghiệm là 

• Với  thì  có một nghiệm là 

**•** Khi  thì 

 hoặc .

**•**Khi thì

 hoặc .

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện 

Đặt  ta có



Phương trình đã cho trở thành



Ta có  nên 

Ta được phương trình 

Với  thì 

Với  thì 

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Ta có phương trình tương đương với







Xét (1), đặt , suy ra  và .

Ta được 



. Từ đó suy ra .

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là  và .

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải**

Phương trình tương đương với .

Đặt , ta có phương trình 



Vì  nên 





Tập nghiệm .

1. *(Chuyên Hưng Yên )* Giải phương trình 

Hướng dẫn giải



Đặt , ta được hệ:  
Trừ vế với vế hai phương trình trên, ta được:



TH1: 



TH2: 



 phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: 

1. Giải phương trình : .

**Hướng dẫn giải**

Đặt   .

Từ phương trình đã cho ta có : (\*)

Ta có : (\*) 



Với  ta có 

Đặt  từ phương trình (\*\*) ta có :(\*\*\*)

Dùng máy tính điện tử hoặc khảo sát hàm số  trên  ta thấy (\*\*\*) có một nghiệm duy nhất 

Ta biểu diễn  dưới dạng:

Ta có :  nên có thể chọn  sao cho :

Vậy ta có : 

Như vậy  được chọn là nghiệm của phương trình :

Suy ra: 

Ta tìm được nghiệm của (\*\*\*) là

 .Suy ra : 

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

 ; 

1. Giải phương trình sau: .

**Hướng dẫn giải:**

Ta có: 



Đặt ,. Phương trình trở thành:





## **Dạng 3. Sử dụng hàm số**

1. Giải các phương trình sau:

a) 

b) .

1. Giải phương trình sau:

a) 

b) 

1. Giải phương trình .

Giải phương trình: 

* Phương trình đã cho tương đương với: 
* Xét x = 0; x = ± 1: Thay vào (1) ta thấy đều thỏa nên phương trình có các nghiệm: x = 0; x = ± 1.
* Xét x ≠ 0; x ≠ ± 1: Khi đó (1) ⇔ 

Với t ≠ 0, xét hàm số: .

\* Với t > 0 thì 3t – 1 > 0 ⇒f(t) > 0 và với t < 0 thì 3t – 1 < 0 ⇒ f(t) > 0, do đó:

Vì (2) ⇔ f(x) + f(x2 – 1) = 0 nên (2) vô nghiệm.

* Vậy phương trình đã cho có tất cả là 3 nghiệm: x = 0; x = ± 1.

1. *[Đề chọn hsg tỉnh Trà Vinh, 2014-2015]* Giải phương trình : 
2. Giải phương trình: .

Ta có  (1).

Đặt  thì  do đó  đồng biến và liên tục trên . Từ đó:

.

.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

1. Giải phương trình  (1)

**Hướng dẫn giải**

Có  không là nghiệm của (1)

Xét , chia hai vế cho , được



Đặt , khi đó có PT



Suy ra 

Xét hàm số .Vì f(t) là hàm số đồng biến trên R

nên    = 

Giải tìm được y = 0 (loại); 

Tính x theo 

Tập nghiệm của phương trình (1) là 

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện: 

Phương trình 

Ta có: x = 0, x = 5 không là nghiệm phương trình.

Xét hàm số ; ta có:  (\*)

Áp dụng (\*) với 

Ta có: 

. Vậy  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt **** ta được: 

 (\*)

Xét hàm số  trên  có 

⇒ hàm số  đồng biến trên ; (\*) 



Thử lại, ta được:  là nghiệm phương trình.

1. Giải phương trình : trên .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .Với  ta có .

Phương trình đã cho trở thành : (\*)

Với  Ta có:  

Vậy trên  phương trình đã cho có nghiệm .

1. Giải phương trình: .

**Lời giải**

Biến đổi phương trình:  (1)

Đa thức  có tối đa 3 nghiệm và ta có: ; ; ; .  liên tục trên khoảng  và , ,  nên  có 3 nghiệm trên khoảng .

Do  có đúng 3 nghiệm trong khoảng , nên ta có thể đặt  với .

Phương trình (1) trở thành:



 (do )

 (với )

 hay  hay .

1. Giải phương trình sau: .

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện .

Đặt .

Từ phương trình đã cho ,ta có hệ phương trình: 

Đặt S = x + y; P = xy đưa đến hệ phương trình: 







Kết hợp với điều kiện, nghiệm pt đã cho là:.

1. Giải phương trình:.

**(Chưa giải)**

1. Giải phương trình: 

**(Chưa giải)**

**Dạng 3: Sử dụng hàm số**

1. Cho phương trình:  với. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên  thì phương trình có một nghiệm dương duy nhất 

**Hướng dẫn giải:**

Xét hàm số với ** nguyên,  (1)

+) Ta có: . Do  nên khi  thì  Vậy  là hàm số đồng biến trên .

Lại có:  ( vì  nguyên và )

Ta có:  và  liên tục, đồng biến nên phương trình  có nghiệm duy nhất trên .

+) Mặt khác với  thì  suy ra  với mọi 

Như vậy ta đã chứng minh được (1) có nghiệm dương duy nhất với mọi ** nguyên, 

1. Cho phương trình: .
2. Chứng tỏ phương trình (1) có đúng 5 nghiệm.
3. Với  là nghiệm của phương trình nghiệm, tính tổng:

**Hướng dẫn giải**

1. Xét hàm số: .

\* f(x) là hàm số xác định và liên tục trên R.

\* Ta có: 

 ; 



 Phương trình  có 5 nghiệm phân biệt 

sao cho: 

\* Ta có  là nghiệm của (1) nên:





Do đó: 

Xét biểu thức: 

Đồng nhất thức ta được:



Do vậy: 

Mặt khác: 



 Với  ta được: 

và 

Do đó: 





Vậy: .

## **Dạng 4: Đánh giá**

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn x ta có: (1) .

\* Để (1) có nghiệm x nguyên điều kiện cần là:  ( k nguyên, không âm)

\* Lại xem  là phương trình bậc hai ẩn y . Để có nghiệm nguyên y điều kiện cần là  là một số chính phương (m nguyên dương).

Do  và 16 = 16.1 = 8.2 = 4.4 nên ta có các trường hợp.

+) TH1:  suy ra phương trình (1) có nghiệm .

+) TH2:  suy ra phương trình (1) có nghiệm .

+) TH3 :  Loại.

1. *[Đề xuất, Chuyên Hùng Vương Phú Thọ, DHĐBBB, 2015]* Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình.

Xét  Khi đó phương trình đã cho tương đương với





Vì  nên  và  Suy ra 

vì vậy



Do đó phương trình 

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là  hoặc 

1. *[Đề thi hsg tỉnh Nghệ An, bảng A, 2015-2016]* 
2. Ký hiệu  là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình



**Hướng dẫn giải**

Ta có 

pt





Vậy .

# Có tham số

1. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt

**.**(1)

**Hướng dẫn giải**

Đặt  ; điều kiện: .

Ta có:  (2)

Pt (2) có hai nghiệm phân biệt .Vậy .

Thay vào phương trình ta được:  (3)

Đặt .

Ta có: số giao điểm của (C) và (d) là số nghiệm phương trình (3).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.

Xét hàm số  ; .

Cho .

Bảng biến thiên

|  |  |
| --- | --- |
| t | 1 2 +∞ |
| y’ | * 0 + |
| y | 8 +∞  7 |

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt .

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: 

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương:

.

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1, hay:  (\*).

Khi đó, PT đã cho có ba nghiệm  và , trong đó là nghiệm của (1).

Theo định lý Viet ta có  (2).

Xét các trường hợp sau:

\*) Nếu  (3). Từ (2) và (3) ta có hệ:

.

\*) Nếu  (4). Từ (2) và (4) ta có hệ: .

Vậy, có ba giá trị của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán là:.

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình  có nghiệm

**Hướng dẫn giải.**

Lời giải:

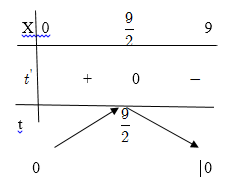
Điều kiện: 

PT (1) 

 (2)

Đặt 

Ta có: ; 



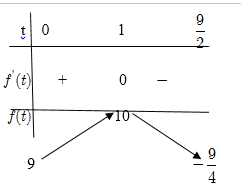
Do đó : 

Phương trình (2) trở thành  (3)

Xét hàm số , 

Ta có : 

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm  phương trình (3) có nghiệm 



1. Tìm  để phương trình sau (ẩn ) chỉ có một nghiệm.



1. Cho hai phương trình sau:

(1)



(2)



(a là tham số, x là ẩn số)

Tìm a để số nghiệm của phương trình (1) không vượt quá số nghiệm của phương trình (2).

1. Cho phương trình:  có một nghiệm không nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng phương trình  có nghiệm.
2. Với mỗi số tự nhiên **, gọi  là số nghiệm của phương trình

 .

Tính giới hạn sau 

**Lời giải**

Giả sử  là một nghiệm của phương trình  , khi đó mọi nghiệm của phương trình trên có dạng 

Vì *x* ≥ 0 và *y* ≥ 0 nên .

Suy ra 

Suy ra 

Kết hợp với , ta có .

Vậy 

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện :

PT (1)  (2)

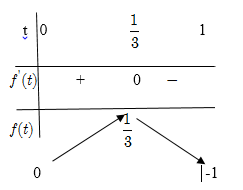
Đặt , Do 

Phương trình (2) trở thành :  (3)

Xét hàm số , 

Ta có : 

Bảng biến thiên :



Phương trình (1) có nghiệm  phương trình (3) có nghiệm 



1. Cho phương trình

.

Tìm m để phương trình có nghiệm thực.

**Hướng dẫn giải.**

Với tập xác định , Phương trình đã cho tương đương với

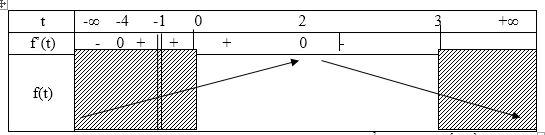
.

Đặt t =  thì t ∈ [ 0; 3)

Xét hàm số ;

f’(t) = ; f’(t) = 0 ⇔ t = - 4 hoặc t = 2.

Bảng biến thiên của hàm số f(t) trên đoạn [ 0; 3 ]



Phương trình đã cho có nghiệm x ∈ [ - 2; 4) ⇔ Đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số f(t), t ∈ [ 0; 3 ] ⇔ - 6 ≤ m ≤ - 2

1. Cho phương trình: , với m là tham số. Tìm tham số m để phương trình có nghiệm thực.

**Hướng dẫn giải.**

Điều kiện: .Đặt  với 

Ta có: ; 

suy ra: 

Do  nên phương trình trở thành: 

1. Tìm m để pt sau có nghiệm .

**Hướng dẫn giải.**

. Ta đưa pt về dạng đẳng cấp



Từ pt suy ra 

Chia hai vế pt cho , ta được 

Đặt , lập bbt với  tìm được 

P t trở thành  (1)

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi pt (1) có nghiệm thuộc t thuộc (0;2).

Tìm được 

1. (**Chuyên Hưng Yên**). Giả sử với hai số dương  thì phương trình  có các nghiệm đều lớn hơn 1. Xác định giá trị của  để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó (là số nguyên dương cho trước).

Hướng dẫn giải

Gọi là các nghiệm của phương trình đã cho.

Theo định lý Vi-et ta có 

Theo bất đẳng thức AM - GM ta được

hay 

Theo bất đẳng thức

thì 

hay 

Suy ra , do (\*)

Do đó ta có 

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Khi đó phương trình có ba nghiệm trùng nhau và đều bằng  Vậy giá trị nhỏ nhất của là  khi 

1. Giải phương trình .
2. Tìm  để BPT sau vô nghiệm: 
3. Giải bất phương trình 
4. Chứng minh phương trình: có ít nhất 2 nghiệm với 

**Hướng dẫn giải**

Xét phương trình:  (1)

Xét hàm số:

 sao cho 

 sao cho 



Hàm số  liên tục trên các đoạn  và 

 phương trình có ít nhất 1 nghiệm  và ít nhất 1 nghiệm 

Vậy phương trình có ít nhất 2 nghiệm.

1. Cho các phương trình:  (1)

 (2)

trong đó *x* là ẩn số và *m* là tham số (0 < *m* < 1).

1) Chứng tỏ rằng phương trình (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt và 1 nằm trong khoảng nghiệm.

2) Chứng minh phương trình (2) có nghiệm.

**(Chưa giải)**

1. Cho phương trình.

Tìm tất cả các giá trị của *m* để phương trình trên có 3 nghiệm phân biệt thoả mãn điều kiện: .

**(Chưa giải)**

1. Tìm điều kiện của tham số a, b để phương trình sau có các nghiệm lập thành cấp số cộng: 

**(Chưa giải)**

1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: 

**(Chưa giải)**

1. Tìm các giá trị của a để phương trình sau chỉ có một nghiệm:



**(Chưa giải)**

1. Giả sử phương trình  có 3 nghiệm phân biệt.

Hãy xét dấu của biểu thức: 

**Hướng dẫn giải**



+ Tập xác định: R.

 là tam thức bậc hai có biệt số 

+ Pt: có 3 nghiệm phân biệt nên có 2 nghiệm phân biệt  và



+ Suy ra:  (là hai nghiệm của phương trình ).

+ Thực hiện phép chia đa thức ta được:



Suy ra 

+ 

+ Vì là 2 nghiệm của phương trình: nên

Do đó: .

suy ra: 

+ Vì  và  nên 

1. Cho phương trình: .

a/ Giải phương trình khi 

b/ Tìm  để phương trình có nghiệm.

**Hướng dẫn giải**

**Câu a**:

+Đặt u =  v = .

+Ta có hệ 

+Hàm số  có  nên f(u) tăng trên [1; + ∞).

+  và  tăng nên hệ (I) chỉ có một nghiệm:  từ đó ta có nghiệm của phương trình là: .

**Câu b**:

+ ) tăng trên [1; + ∞) mà  nên phương trình có nghiệm khi  hay 

1. Giải và biện luận phương trình theo tham số m: 

**Hướng dẫn giải**

(1).

+Điều kiện: 

Đặt  Phương trình trở thành: .

Xét tam thức bậc hai  có: 

+Trường hợp 1: t = 0 là nghiệm của (2).Khi đó ta có m = .

+ m = : (2) nên (1) ⇔ lgcosx = 0 ⇔ cosx = 1⇔x =2kπ, k∈Z.

+ m =-: (2)  nên (1)

⇔ 

+Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm t1, t2 khác 0 (t1 ≤ t2):

.

Với điều kiện (1) có nghiệm nên ta chỉ cần xét 2 trường hợp sau: a/; b/ 

a/ .

Khi đó (2) có hai nghiệm t1, t2 âm nên (1) có các họ nghiệm:.

b/ 

Khi đó (1) ⇔  .

+Kết quả:

+ : (1) có nghiệm: .

+ : (1) có nghiệm: 

+ : (1) có nghiệm: 

+ (1) có nghiệm .

+ : (1) vô nghiệm.

+ : (1) có nghiệm 

+ : (1) có nghiệm: .

**BÀI TẬP CHƯA CÓ LỜI GIẢI**

1. Giải phương trình: .

2. Giải phương trình: 

3. Cho trước các số nguyên dương  Chứng minh rằng phương trình

 có vô số nghiệm nguyên dương.

4. Giải phương trình: . Trong đó a là tham số.

5. Giải phương trình: 

6. Giải các phương trình sau:

a)  ; b) .

c) 

7. Giải phương trình: 