PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1},\ n \ge 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy dãy đã cho là dãy số dương, do đó không có số hạng nào của dãy bằng 0. Từ công thức truy hồi của dãy ta có $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 2 + \frac{u_n}{u_{n+1}}, n \ge 1.$.

Đặt $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, n \ge 1$, ta được dãy số $v_1 = 2, v_{n+1} = 2 + \frac{1}{v_n}, n \ge 1.$.

Dễ thấy dãy (v_n) là dãy số dương và $v_n \ge 2,\ \forall n \ge 1$. Do đó.

$\frac{1}{v_n} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + \frac{1}{v_n} \le \frac{5}{2} \Rightarrow v_{n+1} \le \frac{5}{2}, \forall n \ge 1.$ Vậy ta có $2 \le v_n \le \frac{5}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 2 + \frac{1}{x}, x \in \left[2; \frac{5}{2}\right]$. Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x.$ Do đó có hai dãy con đơn điệu của dãy (v_n) và hai dãy con này đều bị chặn nên chúng có giới hạn. Giả sử $a = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n}$ và $b = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1}$ thì ta có hệ.

$$\begin{cases} a = 2 + \frac{1}{b} \\ b = 2 + \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ ab = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 1 + \sqrt{2} \\ a = b = 1 - \sqrt{2} \\ ab = 1 \end{array}\right..$$

Ta thấy chỉ có $a = b = 1 + \sqrt{2}$ thỏa mãn và đây là giới hạn cần tìm.

Bài 2. Tìm số các dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} u_{n+1} + 4u_n^2 - 4u_n = 0, \forall n \ge 1 \\ u_{2004} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

☐ Viết lại $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n) = f(u_n)$ với $f(x) = 4x(1 - x)$.

Nhận xét: $f(x) \in (0;1) \Rightarrow x \in (0;1).$.

Vì vậy: $u_{2004} = \frac{1}{2} \in (0;1) \Rightarrow u_{2003} \in (0;1) \Rightarrow u_{2002} \in (0;1) \Rightarrow \dots u_1 \in (0;1).$.

☐ Với $0 < u_1 < 1$ tồn tại duy nhất α: $0 < a < \frac{\pi}{2}$ và $u_1 = sin^2 a$.

Lúc đó: $u_2 = 4sin^2 a(1-sin^2 a) = sin^2 2a$; $u_3 = 4sin^2 2a(1-sin^2 2a) = sin^2 4a$.

Quy nạp ta được: $u_n = sin^2(2^{n-1}a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n\alpha)$.

$u_{2004} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^{2004}\alpha) = \frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \cos(2^{2004}\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2^{2004}\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1), k \in Z.$.

Vì $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 2^{2003} - \frac{1}{2}$.

Do $k \in Z$ nên: $k = 0;1;2;...;2^{2003} - 1$.

Từ đó có tất cả 2^{2003} giá trị u_1 thỏa bài toán: $u_1 = \sin^2\left[\frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1)\right], k \in \{0;1;....;2^{2003} - 1\}$.

Do đó có tất cả 2^{2003} dãy số (u_n) thỏa điều kiện đã cho.

Bài 3. Cho $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ là các nghiệm dương của phương trình $\tan x = x$ được sắp theo thứ tự tăng dần. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n-1})$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = \tan x - x$, với $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$ => $f(x)$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$.

Suy ra: trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ phương trình $\tan x = x$ có nghiệm duy nhất x_k.

$x_k = y_k + k\pi$ với $y_k \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$=> $\tan y_n = \tan x_n = y_n + n\pi \to +\infty$ => $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left((y_n + n\pi) - (y_{n-1} + (n-1)\pi)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\pi + y_n - y_{n-1}) = \pi$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \ \forall n = 1,2,... \end{cases}$. Tìm điều kiện của $a \in \mathbb{R}$ để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (u_n - a)^2 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$; $\forall n = 1,2,3,...$.

* Suy ra dãy số (u_n) tăng; từ đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử tồn tại $\lim u_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$), thì chuyển qua giới hạn hệ thức $u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$ ta có: $L = L^2 + (1-2a)L + a^2 \Leftrightarrow L = a$.

- Nếu có chỉ số $k \in \mathbb{N}^*$ mà $u_k > a$ thì $u_n > a; \forall n \geq k$ nên $L > a$ trái với kết quả $\lim u_n = L = a$.

Do đó: $u_k \leq a$ với mọi $k = 1,2,...$ hay $u_n^2 - (1-2a)u_n + a^2 \leq a, \forall n = 1,2,3,...$ nói riêng $u_1^2 - (1-2a)u_1 + a^2 \leq a \Leftrightarrow a - 1 \leq u_1 \leq a \Leftrightarrow a - 1 \leq 2014 \leq a$ từ đó ta được $2014 \leq a \leq 2015$.

* Đảo lại: Nếu $2014 \leq a \leq 2015 \Leftrightarrow a - 1 \leq u_1 \leq a$.

$\Rightarrow (u_1 - a + 1)(u_1 - a) \leq 0 \Rightarrow u_1^2 + (1-2a)u_1 + a^2 - a \leq 0 \Rightarrow u_2 \leq a$.

và $u_1 \leq u_2 \Rightarrow a - 1 \leq u_2 \leq a$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a - 1 \leq u_n \leq a, \ \forall n = 1,2,3,...$ (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy (u_n) tăng, bị chặn trên bởi a, do đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Kết luận: Với điều kiện $2014 \leq a \leq 2015$ thì dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = a$.

Bài 5. Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau:.

$$a_1 = 2, b_1 = 1, \ a_{n+1} = \frac{2a_n.b_n}{a_n + b_n}; b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}.b_n}, \ n = 1,2,....$$

Chứng minh rằng (a_n) và (b_n) có cùng giới hạn, tìm giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:.

$$a_n = \frac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}} (1); b_n = \frac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (2).$$

Từ (1), (2) tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Ngoài ra: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n.\sin\frac{\pi}{2^n.3}}{\sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{2^n.3}} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^n.3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

Vậy hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ có cùng giới hạn chung là $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

Bài 6. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{n^2};\ \forall n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

Hướng dẫn giải

*) Ta chứng minh $x_n + n^2 \ge \dfrac{n(n+1)}{\sqrt{2}}$ với mọi n ≥ 1 (1).

Thật vậy: $n = 1$ đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k \ge 1: x_k + k^2 \ge \dfrac{k(k+1)}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow x_{k+1} + (k+1)^2 = x_k + \frac{x_k^2}{k^2} + (k+1)^2 = \frac{x_k}{k^2}(x_k + k^2) + (k+1)^2.$$

$$\ge \left(\frac{k+1}{k\sqrt{2}} - 1\right)\frac{k(k+1)}{\sqrt{2}} + (k+1)^2 \ge \frac{3(k+1)^2}{2} - \frac{k(k+1)}{\sqrt{2}}.$$

$$\ge \frac{k+1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3(k+1)}{\sqrt{2}} - k\right) \ge \frac{(k+1)(k+2)}{\sqrt{2}} \text{ (đpcm)}.$$

*) Ta chứng minh (x_n) có giới hạn.

NX: (x_n) tăng và $x_n > 0$ với mọi n.

Ta có $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{x_n + n^2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{n(n+1)} \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_n} \le \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) < \sqrt{2} \Rightarrow x_n < \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$ với mọi $n \ge 1$.

Vậy (x_n) có giới hạn.

Bài 7. Tam giác mà 3 đỉnh của nó là ba trung điểm của ba cạnh tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC..

Xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,.... sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 1 và với mỗi số nguyên $n \ge 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu r_n tương ứng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Chứng minh rằng dãy số (r_n) là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó?.

Hướng dẫn giải

+ (r_n) là một cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{1}{2}$ và số hạng đầu $r_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$..

+ Số hạng tổng quát: $r_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}.2^{n-1}}$..

Bài 8. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ với mọi $n \geq 1$. Xét dãy số (b_n) mà: $b_n = a_{n+1} - a_n$ với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng dãy số (b_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b) Cho số nguyên dương N. Hãy tính tổng N số hạng đầu tiên của dãy số (b_n) theo N. Từ đó, hãy suy ra số hạng tổng quát của dãy số (a_n)..

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết $\Rightarrow b_n = 2n - 1 \Rightarrow (b_n)$ là một cấp số cộng với số hạng đầu $b_1 = 1$ và công sai $d = 2$..

b) + Tổng N số hạng đầu của dãy (b_n) là: $S_N = N^2$..

+ Số hạng tổng quát của dãy (a_n) là: $a_n = n^2 - 2n + 2$..

Bài 9. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 40 \\ u_n = \dfrac{10u_{n-1}^2.u_{n-3} - 24u_{n-1}.u_{n-2}^2}{u_{n-2}.u_{n-3}} \ \forall n = 4,5,6,... \end{cases}$.

Tìm số n nhỏ nhất để u_n chia hết cho 2048.

Hướng dẫn giải

Từ công thức truy hồi cuả dãy $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{10u_{n-1}.u_{n-3} - 24.u_{n-2}^2}{u_{n-2}.u_{n-3}} = \dfrac{10u_{n-1}}{u_{n-2}} - \dfrac{24u_{n-2}}{u_{n-3}}$, đặt $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$, thì dãy ($v_n$) xác định bởi $\begin{cases} v_2 = 2, v_3 = 20 \\ v_n = 10v_{n-1} - 24v_{n-2} \quad , n = 4,5,6... \end{cases}$.

Phương trình đặc trưng : $x^2 - 10x + 24 = 0$, từ đó suy ra : $v_n = 6^{n-1} - 4^{n-1}$.

$u_n = v_n.v_{n-1}.v_{n-2}....v_2 = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}(3^{n-1} - 2^{n-1}).(3^{n-2} - 2^{n-2})...(3-2)$.

Do $(3^{n-1} - 2^{n-1}).(3^{n-2} - 2^{n-2})...(3-2)$ là số là số lẻ nên $u_n \vdots 2048 \Leftrightarrow 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \vdots 2048$.

$\Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2} \geq 11 \Leftrightarrow n \geq 6$.

Vậy $n = 6$ là giá trị cần tìm thỏa mãn điều kiện bài toán.