

## BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO

**Câu 1.** Giải phương trình:  $(\sqrt{3} + 1)\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$

**Hướng dẫn giải**

$$(\sqrt{3} + 1)\cos^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\cos^2 x - 1) + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x(\sin x - \cos x) - \cos x(\sin x - \cos x) + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 2.** Giải phương trình:  $3\tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2\frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} + 2\cos 2x = 0$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{ĐK} \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cot x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\frac{3\sin 2x - 3}{\cos 2x} - 2\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sin 2x - 3}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} + 2\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + 2\cos 2x = 0$$

$$3\sin 2x - 3 + 2(\cos x - \sin x)^2 + 2\cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 2x - 3 + 2(1 - \sin 2x) + 2(1 - \sin^2 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 2x + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1; \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

+)  $\sin 2x = 1 \Rightarrow \cos 2x = 0$  không thỏa mãn ĐK

$$\text{+) } \sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 3.** Giải các phương trình sau đây:

$$1) \sin x \sqrt{1 + \sin 2x} = \cos 2x$$

$$2) (1 - \tan x) \sin 2x = 2 \tan x$$

**Câu 4.** Giải phương trình:  $2 \tan x + \cot x = \tan^2 x + \frac{2}{\sin 2x}$

**Hướng dẫn giải**

+) Điều kiện

+) Tìm đợc  $\tan x = 1$  hoặc  $\tan x = 0$

+) Giải đợc và loại nghiệm đợc. ĐS:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

**Câu 5.** Tìm  $m$  để phương trình:  $4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin^2 4x = m$

có nghiệm  $x \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$

**Hướng dẫn giải**

+) Đa PT về dạng:  $2 \cos^2 4x - \cos 4x = 2m + 1$  (1)

+) Đặt  $t = \cos 4x$  với  $x \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (-1; 0)$

+) Xét  $f(t) = 2t^2 + t$  trên  $(-1; 0)$  có bảng biến thiên

Và PT (1) có nghiệm khi đờng thẳng  $y = 2m + 1$  (song song hoặc trùng 0x) cắt  $f(t)$  trên  $(-1; 0)$

+) ĐS:  $m \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

**Câu 6.** Giải phương trình:  $-2 \sin^3 x - 6 \cos^3 x + \cos x + 3 \sin x = 0$

**Câu 7.** Giải phương trình:  $(\sin x - 2 \cos x) \cos 2x + \sin x = (\cos 4x - 1) \cos x + \frac{\cos 2x}{2 \sin x}$

**Câu 8.** Giải phương trình:  $\cos^2 \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 \left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} (\sin x + 1)$

**Hướng dẫn giải**

Dùng công thức hạ bậc ta đợc:

$$1 + \cos(2x - \pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} (\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} (\sin x + 1)$$

Sử dụng ct nhân đôi giải đợc:  $\sin x = 0$ ;  $\sin x = 1/2$

Từ đó suy ra nghiệm của pt:  $x = k\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ;  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 9.** Giải phương trình:  $\sin 2x + \cos 2x + \sin x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = \cos \pi x$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên  $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

**Câu 11.** Giải phương trình:  $\cos 3x = \cos^2 \left(\frac{9x}{4}\right)$

**Câu 12.** Giải phương trình:  $\sqrt{\cos x} + \cos^2 x = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

**Câu 13.** Giải phương trình:  $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

**Câu 14.**  $\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \cos 3x - 2(\cos x - \sin x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sin x + \cos 3x - \cos x - (\cos x - \sin x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x \sin x - (\cos x - \sin x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x (\cos x - \sin x) - (\cos x - \sin x) + 1 = 0$$

**Đặt:**  $t = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

**Ta có:**  $2(1-t^2)t - t + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^3 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$t = 1: \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

**Câu 15.** Cho phương trình sau:

$$\cos \frac{1-2x}{x} - \sin \frac{1-2x}{2x} + m = 0$$

với m là tham số.

1) Khi m = 0, hãy tìm tất cả các nghiệm

$$x \in \left(-50; -\frac{1}{2}\right) \text{ của phương trình.}$$

2) Xác định m để phương trình có nghiệm

$$x \in \left(\frac{1}{2+\pi}; \frac{1}{2}\right).$$

**Câu 16.** Cho phương trình sau:

$$(m+3) \sin^3 x + (m-1) \cos^3 x + \cos x - (m+2) \sin x = 0.$$

1) Giải phương trình khi  $m = -5$ .

$$x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{4}\right].$$

2) Xác định tham số m để phương trình có đúng một nghiệm

**Câu 17.** Giải phương trình:  $\frac{(\cos x - 1)(2 \cos x - 1)}{\sin x} = 1 - \sin 2x + 2 \cos^2 x$

**Câu 18.** Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình

$$4 \sin x + \sqrt{5} \cos x - 2 \sin 2x = \sqrt{5}.$$

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi phương trình

$$4 \sin x + \sqrt{5} \cos x - 2 \sin 2x = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (4 \sin x - \sqrt{5}) - \cos x (4 \sin x - \sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4 \sin x - \sqrt{5})(1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Do đó phương trình có 3 họ nghiệm là

$$\begin{cases} x = k360^\circ \\ x \approx 33^\circ 59' 16'' + k360^\circ \\ x \approx 146^\circ 0' 44'' + k360^\circ \end{cases}$$

**Câu 19.** Cho tam giác ABC có góc A, B nhọn thỏa mãn điều kiện :

$$\sin^2 A - \sin A \cos B - \sin B \cos A + \sin^2 B = 0. \text{ Chứng minh tam giác ABC vuông}$$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Từ gt có } \sin A (\sin A - \cos B) + \sin B (\sin B - \cos A) = 0 \Rightarrow (\sin A - \cos B)(\sin B - \cos A) \leq 0 \quad (1) \quad (2đ)$$

$$\text{Lại có : } \sin^2 A - \cos^2 B = \sin^2 B - \cos^2 A \Rightarrow (\sin A - \cos B)(\sin B - \cos A) \geq 0 \quad (2) \quad (2đ)$$

$$\text{Vậy } \sin A = \cos B \text{ hoặc } \sin B = \cos A \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Tam giác đã cho vuông đỉnh C} \quad (1đ)$$

a) Giải phương trình:  $\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

**Câu 20.** Giải phương trình:

$$1) \sin \frac{x}{2} \sin x - \cos \frac{x}{2} \cdot \sin^2 x + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$2) 2 \cos \frac{x}{10} = 2^x + 2^{-x}$$

**Câu 21.** Giải phương trình :

$$3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2 \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} + 2 \cos 2x = 0$$

**Câu 22.** Giải phương trình:  $(\sqrt{3} + 1) \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$

**Hướng dẫn giải**

$$(\sqrt{3} + 1) \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} (\cos^2 x - 1) + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x (\sin x - \cos x) - \cos x (\sin x - \cos x) + \sin x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 23.** Giải phương trình:  $\sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) + \tan x + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$ .

**Hướng dẫn giải**

ĐKXD:  $\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \neq 0$ . Phương trình đã cho tương đương

$$\sin x \left( \frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} \right) + \tan x + 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \tan x + 2\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \tan^2 x - 2 \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \text{ hoặc } \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Kiểm tra ĐK thỏa mãn. Vậy nghiệm của PT là  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Tìm số tự nhiên a bé nhất để phương trình sau có nghiệm.**

$$\cos^2 \pi(a-x) - 2 \cos \pi(a-x) + \cos \frac{3\pi x}{2a} \cdot \cos \left( \frac{\pi x}{2a} + \frac{\pi}{3} \right) + 2 = 0$$

**Câu 24.** Giải phương trình:  $\frac{(\cos x - 1)(2 \cos x - 1)}{\sin x} = 1 - \sin 2x + 2 \cos^2 x$

**Câu 25.** Giải phương trình:  $\sin \left( \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2} \right)$

**Câu 26.** Giải phương trình:  $\cos x - 3\sqrt{3} \sin x = \cos 7x$

**Hướng dẫn giải**

$$\cos x - \cos 7x - 3\sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \sin 4x - 3\sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 4x \sin x (3 - 4 \sin^2 x) - 3\sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x [2 \sin 4x (1 + 2 \cos 2x) - 3\sqrt{3}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (1) \\ 2 \sin 4x (1 + 2 \cos 2x) = 3\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

Giải (1) ta được  $x = k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Giải (2): Ta có (2)} \Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4 \sin 2x \cos^2 2x + \sin 4x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số:  $\sin^2 2x, \frac{\cos^2 2x}{2}, \frac{\cos^2 2x}{2}$  ta có:  $1 =$

$$\sin^2 2x + \frac{\cos^2 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(\sin 2x \cos^2 2x)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cos^2 2x \leq |\sin 2x \cos^2 2x| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}. \text{ Do đó } 4 \sin 2x \cos^2 2x + \sin 4x \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 < \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra (3) vô nghiệm nên (2) vô nghiệm.

Kết luận: Phương trình có nghiệm  $x = k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$

**Câu 27.** Giải phương trình:  $(\sin x + \cos x)^2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \sin x (2\sqrt{3} \sin x + 4 - \sqrt{3})$ .

#### Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cos x + 1 - \cos x = 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4 \sin x - \sqrt{3} \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2 - 4 \sin x) + (2 \sin x \cos x - \cos x) = (2\sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin x) + \cos x(2 \sin x - 1) = \sqrt{3} \sin x(2 \sin x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\sqrt{3} \sin x - \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$+) \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+) 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$