

BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO

Bài 1. Giải phương trình sau: $3 \tan 2x - 2 \sin \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) + 2 \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) = \frac{1}{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ (*).

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với:

$$3 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 2 \cos 2x + \frac{2(\cos x - \sin x)}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x} \Leftrightarrow 3 \sin 2x - 2 \cos^2 2x + 2(\cos x - \sin x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin 2x - 2(1 - \sin^2 2x) + 2(1 - \sin 2x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ và

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = \cos^4 4x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ (*).

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 4x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 2 \cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 3. Giải phương trình: $\sin x \sqrt{1 + 2 \sin x} = \cos 2x$.

Bài 4. Giải phương trình: $\frac{2 \sin 2x + 4 \cos^2 x - \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}}{1 - \cos 3x} = 0$.

Bài 5. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2} \cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2} \cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

Bài 6. Giải phương trình: $(1 + 2 \cos 3x) \sin x + \sin 2x = 2 \sin^2 2x + \frac{\pi}{4}$.

Bài 7. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$.

Bài 8. Giải phương trình: $3\sqrt{\tan x + 1}(\sin x + 2 \cos x) = 5(\sin x + 3 \cos x)$.

Bài 9. Giải phương trình: $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{2}{\sin^2 x}(1 + \cot 2x \cdot \cot x) = 48$.

Bài 10. Giải phương trình: $\sqrt{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$.

Bài 11. Giải phương trình: $\frac{4 \sin^2 2x + 6 \sin^2 x - 9 - 3 \cos 2x}{\cos x} = 0$.

Bài 12. Cho hàm số: $f(x) = \sqrt{1 + \sin^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 2 \cos^2 x + 2}$.

Giải phương trình:

a) $f(x) = 2\sqrt{2}$.

b) $f(x) = 1 + \sqrt{5}$.

Bài 13. Chứng minh với mọi giá trị của x , ta có: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{1 - \sin x} \geq 1$.

Bài 14. Giải phương trình: $\sqrt{\sin x} + \sqrt{1 - \sin x} = 2 \cos x - \cos^2 x$.

Bài 15. Cho phương trình sau:

$$(m+3)\sin^3 x + (m-1)\cos^3 x + \cos x - (m+2)\sin x = 0.$$

a) Giải phương trình khi $m = -5$.

b) Xác định tham số m để phương trình có đúng 1 nghiệm.

Bài 16. Cho phương trình sau:

$$\cos \frac{1-2x}{x} - \sin \frac{1-2x}{x} + m = 0 \text{ (với } m \text{ là tham số)}.$$

a) Khi $m = 0$, hãy tìm tất cả các nghiệm $x \in \left(-50; -\frac{1}{2}\right)$ của phương trình.

b) Xác định m để phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{2+\pi}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 17. Tìm x thuộc khoảng $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0.$$

Bài 18. Giải phương trình: $\sin^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$.

Bài 19. Giải phương trình: $3 \cos x + 4 \sin x + \frac{6}{3 \cos x + 4 \sin x + 1} = 6$.

Bài 20. Cho phương trình:

$$\sin^2 4x + (m^2 - 3) \sin 4x + m^2 - 4 = 0.$$

Tìm m để phương trình có đúng 4 nghiệm thuộc $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Bài 21. Cho $\begin{cases} \cos^3 x + 3 \cos x \cdot \sin^2 x = a \\ \sin^3 x + 3 \sin x \cdot \cos^2 x = b \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(a+b)^2} + \sqrt[3]{(a-b)^2} = 2$.

Bài 22. Chứng minh rằng: $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos 8x}}} = \sqrt{2} \cos x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{8}\right]$.

Bài 23. Giải phương trình: $\sqrt{1 + \frac{1}{16} \cos^4 x - \frac{1}{2} \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + \frac{25}{16} - \frac{5}{2} \cos^2 x} = 1$.

Bài 24. Giải phương trình: $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$.

Bài 25. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{16} + \cos^4 x - \frac{1}{2} \cos^2 x} + \sqrt{\frac{9}{16} + \cos^4 x - \frac{3}{2} \cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

Bài 26. Giải phương trình: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Bài 27. Tìm a để phương trình: $a \cos 2x + |a| \cos 4x + \cos 6x = 1$ có nghiệm

$x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, x = k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$ và chỉ có nghiệm ấy.

Bài 28. Giải phương trình: $\sin 2x \sin 4x + 2(3 \sin x - 4 \sin^2 x + 1) = 0$.

Bài 29. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 4x = \sin 6x$.

Bài 30. Giải phương trình: $\left(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos x}\right) \cos 2x = \frac{\sin 4x}{2}$.

Bài 31. Cho phương trình: $\left(\frac{3}{4} - k^2\right)\sin^2 x - (1 - 2k)\sin x - k = 0$

Tìm k để phương trình có nghiệm.

Bài 32. Tính tổng các nghiệm của phương trình:

$$\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} \text{ với } x \in [1; 70].$$

Bài 33. Giải phương trình:

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

Bài 34. Giải phương trình sau: $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan 5x + \cot 5x$

Bài 35. Giải phương trình sau: $3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2 \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} + 2 \cos 2x = 0.$

