BÀI TẬP LƯỢNG GIÁC NÂNG CAO

Bài 1. Giải các phương trình sau: $\dfrac{(\cos x-1)(2\cos x-1)}{\sin x}=1-\sin 2x+2\cos^2 x.$

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq m\pi\,(m\in Z).$

Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos^2 x-3\cos x+1=\sin x-2\sin^2 x.\cos x+2\sin x.\cos^2 x$.

$\Leftrightarrow \cos 2x-3\cos x+2=\sin x-\cos x(1-\cos 2x)+\sin x(1+\cos 2x)$.

$\Leftrightarrow \cos x 2x-2(\sin x+\cos x-1)-\cos 2x(\sin x+\cos x)=0$.

$\Leftrightarrow (\cos 2x+2)(\sin x+\cos x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x+2=0\\ \sin x+\cos x-1=0\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-2\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z).$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in \mathbb{Z})$.

Bài 2. Giải các phương trình sau: $4\sin^2\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right).$

Hướng dẫn giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x=1+1+\cos\left(2x-\dfrac{3\pi}{2}\right).$

$\Leftrightarrow -2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=-\sin 2x$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\cos x$.

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right).$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi\\ 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in \mathbb{Z}).$

Bài 3. Giải phương trình $\sin 2x-2\cos x=0.$

Hướng dẫn giải.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sin x.\cos x-2\cos x=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x-1)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=1\end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi (k\in \mathbb{Z})..$$

Bài 4. Giải phương trình: $2\sqrt{3.\sin 2x}=\dfrac{3\tan 2x}{2\sqrt{\sin 2x}-1}-\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 2x\ge 0 \\ \sin 2x\ne \dfrac{1}{4}(*) \\ \cos 2x\ne 0 \end{cases}$ *(nếu thí sinh viết không đủ (*) thì trừ 0,5 điểm).*

Khi đó: $PT(1)\Leftrightarrow 4\sqrt{3}.\sin 2x-2\sqrt{3.\sin 2x}=3\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-2\sqrt{3.\sin 2x}+\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.\sin 4x=3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$.

$\Leftrightarrow \sin 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x=\pi-2x-\dfrac{\pi}{6}+k'2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{36}+k'\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. (k,k'\in Z).$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có nghiệm của phương trình là

$x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\quad x=\dfrac{5\pi}{36}+k'\dfrac{\pi}{3}\quad (k,k'\in Z, k'\ne 6m+2, k'\ne 6m+5, m\in Z)$.

Bài 5. Cho phương trình: $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 4x=m.$ (m là tham số).

1) Giải phương trình khi $m=\dfrac{3}{2}$.

2) Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Hướng dẫn giải.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{3+\cos 4x}{4}+\cos^2 4x=m.$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 4x+\cos 4x=4m-3 \ (1).$$

1) Với $m=\dfrac{3}{2}$ ta có phương trình:

$$4\cos^2 4x+\cos 4x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=-1\\ \cos 4x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right..$$

2) Đặt t = cos4x ta được: $4t^2+t=4m-3$, (2).

Với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ thì $t\in[-1;1]$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t\in[-1;1]$. (3).

Xét g(t) = $4t^2+t$ với $t\in[-1;1]$. ta có bảng biến thiên :

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
g(t)	3	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên suy ra (3) xảy ra $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{16}<4m-3\le 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$

Vậy giá trị m cần tìm là: $\frac{47}{64}<m\le\frac{3}{2}$.

Bài 6. Giải phương trình: 2sinx.(1 + cos2x) + sin2x = 1+ 2cosx.

Hướng dẫn giải

Ta có PT $\Leftrightarrow$ (2cosx + 1).(sin2x – 1) = 0 .

Đáp số: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi \qquad (k\in Z)$.

Bài 7. Tính các góc của tam giác ABC, biết rằng

$2\sin A.\cos B.\sin C+\sqrt{3}(\cos A+\sin B+\cos C)=\frac{17}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đẳng thức $\Leftrightarrow$ $\left(\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\sin B-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$.

Đáp số: A = C = 30^0 ; B = 120^0.

Bài 8. Giải phương trình : $2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=1$.

Hướng dẫn giải

$2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=1$.

$\Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\cos x$.

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=x+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-x+k2\pi \end{array}\right.$.

Bài 9. Giải phương trình: $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

Hướng dẫn giải

$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 10. Giải phương trình: $3+\cot^2 x=3\left(\frac{\cos 2x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)$.

Hướng dẫn giải

$3+\cot^2 x=3\left(\frac{\cos 2x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)$.

Điều kiện : $\sin x.\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq n\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

PT $\Leftrightarrow 3+\cot^2 x=3\frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\sin x\cos x}$.

$\Leftrightarrow 3+\cot^2 x=3\frac{\cos x}{\sin x\cos x}$.

$\Leftrightarrow 3+\cot^2 x=\frac{3}{\sin x}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{3}{\sin x}+2=0$.

Đặt : $t=\frac{1}{\sin x}$, $|t|>1$. Ta có: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 (\text{loại}) \\ t=2 \end{array}\right.$.

Với $t=2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x}=2 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{Z})$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Bài 11.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình: $\dfrac{(Sin2x-\sin x+4)\cos x-2}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$ (1).

Điều kiện: $\sin x \neq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \sin 2x.\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4\cos x-2=0$.

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)+4\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

$\Leftrightarrow \left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)(\sin 2x+4)=0$.

$\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Đối chiếu với điều kiện: $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$.

Bài 12. Giải hệ: $\begin{cases} \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 & (1) \\ \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) & (2) \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $|x|\le 1, |y|\le 1$.

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, ta có $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$ và $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$.

Kết hợp với (1) ta được: $\begin{cases} y+\sqrt{y^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1} & (3) \\ x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1} & (4) \end{cases}$.

Cộng (3) và (4) ta được $y=-x$, thế vào (2) ta được:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right) \quad (5)$$

Đặt $x=\sin t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, phương trình (5) trở thành

$$\sqrt{1+\cos t}=\sin t(1+2\cos t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}.\left[1+2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{t}{2}-4\sin^3\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin 3\frac{t}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3}\\ t=\frac{\pi}{2}+k\frac{4\pi}{3}\end{array}\right..$$

Với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta được $\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}\\ t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\\ x=1\end{array}\right..$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và $(1;-1)$.

Bài 13. Giải các phương trình sau: $\cos 5x=5\cos x$.

Bài 14.

1. Cho phương trình: $\cos 2x+(m+1)\sin x+m=0$.

   a) Giải phương trình với $m=1$.

   b) Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[0;\pi]$.

2. Tính các góc của tam giác ABC biết: $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=-1,5$.

Bài 15. Giải phương trình: $2\sqrt{2}\cos^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x-\sin x=0$.

Bài 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x+\cos x\sin x$.

Bài 17. Cho số thực x thỏa mãn $\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}+x\right)$.

Bài 18. Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{7}+x\right)}{\tan\frac{\pi}{7}}$.

Bài 19. Giải phương trình $\dfrac{(\sin 2x-\sin x+4)\cos x-2}{2\sin x+\sqrt{3}}=0$.