**MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ.**

1. Cho cấp số cộng  với  là số nguyên dương thoã mãn . Tính tổng: .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng chứng minh được số hạng tổng quát của cấp số cộng  là .

Khi đó.

.

1. Cho dãy số thực  được xác định bởi. .. Tìm tất cả các giá trị của  để  với mọi số tự nhiên .

**Hướng dẫn giải**

Giả sử  với .

Từ  có *.*

Lại từ  có .

Suy ra  và .

Từ đó .

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

.

Mà  nên phải có .

Thử lại với  thì .

Vậy  là giá trị duy nhất cần tìm.

1. Cho dãy số  xác định bởi . Tìm  để  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của xn ta có.

.

Vậy  là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn  là số chính phương.

Đặt .

Ta có .

Khi đó ta tìm được *a* = 201, *b*=1 thì .

Với *a* = 85, *b* =82 thì .

Vậy *n* = 2 thì  là số chính phương.

1. Dãy số xác định như sau:. Chứng minh rằng.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:  . (1).

Do  .

Từ đó bằng phép quy nạp ta suy ra  là dãy đơn điệu tăng thực sự, và *un* nhận giá trị nguyên dương lớn hơn hoặc bằng  với mọi .

Ta viết lại điều kiện truy hồi xác định dãy số dưới dạng sau đây:.

 (2).

Từ đó dẫn đến: Bây giờ từ (3), ta có:.

.

Từ (4) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

.

(ở đây  ). Ta sẽ chứng minh (5) đúng với mọi *.* Khi đó nó sẽ đúng với .

Do  nguyên dương với mọi , (5) tương đương.

 (6).

Xét khi . Theo (2), ta có: .

Vì thế theo giả thiết quy nạp suy ra:.

.

Như thế với , ta thu được:.

.

Từ (8) suy ra (6) đúng với mọi .

Vì vậy (5) đúng . Ta có điều phải chứng minh!.

1. Cho dãy : .

a) Chứng minh dãy  hội tụ và tính .

b) Chứng minh .

**Hướng dẫn giải**

a) Bằng phương pháp chứng minh qui nạp ta có: .

Đặt  và xét hàm .

Suy ra , như vậy  nghịch biến trên đoạn .

Dẫn đến .

Kết hợp công thức xác định dãy ta được: .

Vậy .

b) *Nhận xét:*  thì .

Dẫn đến  .

 (1).

Như vậy bất đẳng thức đúng với .

Trường hợp , chú ý , kết hợp với (1) thu được:.

.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

1. Cho dãy số  như sau .

a) Chứng minh .

b) Đặt . Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố và n > 2 thì chia hết cho n.

**Hướng dẫn giải**

a) Với , .

, .

Giả sử .

Chứng minh .

Ta có.

.

.

.

Vậy .

b) Đặt . Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố và  thì chia hết cho .

Ta có: .

.

Với  là số nguyên tố  chia hết cho .

Do  là số nguyên tố lớn hơn   chia hết cho .

Vậy .

1. Cho dãy số . Chứng minh rằng nếu  là số nguyên tố và  thì  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  hay .

Khi đó .

Ta được .

Phương trình đặc trưng  có nghiệm .

Khi đó .

Ta có .

Suy ra .

Khi đó .

Ta có  nên  chia hết cho .

Mặt khác  là số nguyên tố nên theo định lý Fermat.

 hay .

Từ đó .

Suy ra  chia hết cho .

Với  là số nguyên tố và .

Suy ra  chia hết cho .

1. Cho dãy số  với .

a) Chứng minh , với mọi .

b) Đặt . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh , với mọi .

.

Giả sử ta có  .

.

Suy ra .

Vậy theo qui nạp  với .

b) Đặt . Tìm .

Ta có:.

.

.

.

 (vì ).

Vậy .

1. Cho dãy số  được xác định như sau:.. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố  thì  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Với mọi  ta có: .

Từ đó có: .

Vậy , lại có  nên .

+ Nếu : có ngay đpcm.

+ Nếu  là số nguyên tố lẻ: .

.

Theo Định lí Fermat nhỏ, suy ra  chia hết cho . Mặt khác cũng chia hết cho  nên:  chia hết cho . Từ đó.

chia hết cho .

Vậy bài toán được chứng minh cho mọi trường hợp.

1. Cho dãy số  xác định bởi . Tìm  để  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của xn ta có.

.

Vậy  là số chính phương.

Giả sử n là số thỏa mãn  là số chính phương.

Đặt .

Ta có .

Khi đó ta tìm được  thì .

Với  thì .

Vậy *n* = 2 thì  là số chính phương.

1. Bài 3. Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau . Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên *n* sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó .

.

.

 (1). Lại có , suy ra .

  (do (1)).

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2).

Chọn , , từ (2) ta có.

.

Vậy  chia hết cho , .

1. Cho dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

Ta có.

.

Đặt . Ta được dãy số  xác định bởi .

Ta phải chứng minh  là số chính phương.

Thật vậy, xét dãy số  ) xác định bởi .

Hiển nhiên dãy số  là dãy số nguyên.

Ta có .

Ta sẽ chứng minh  (1) bằng quy nạp.

Thật vậy, rõ ràng với , (1) đúng.

Giả sử (1) đúng đến , tức là .

ta chứng minh (1) đúng với *n* = *k*+2, nghĩa là chứng minh .

Thật vậy, theo công thức truy hồi của dãy số , giả thiết quy nạp, tính chất (2) của dãy số , công thức truy hồi của dãy số , ta có.

.

Do đó  là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.

1. Cho dãy sốđược xác định bởi  a là số thực

a))Tìm a sao cho dãy số có giới hạn hữu hạn.

b)Tìm a sao cho dãy sốlà dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

**Hướng dẫn giải**

a)Ta có, trong đó.

Khi .

Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi .

b)Từ lý luận phần a) ta suy ra)

.

Bởi vậy điều kiện cần để tồn tại sao cho là .

Ta đi chứng minh là điều kiện đủ để có kết luận trên.

Thật vậy: Với .

.

Vì.

.

Suy ra .

Vậy dãy sốlà dãy số tăng kể từ số hạng nào đó với  và trong trường hợp đó là dãy số tăng từ .