**DỰ ĐOÁN SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀ CHỨNG MINH BẰNG QUY NẠP.**

1. Cho dãy số  xác định bởi : . Xác định số hạng tổng quát của dãy đã cho.

**Hướng dẫn giải**

Ta có:.

.

Dự đoán: .

Chứng minh theo quy nạp ta có.

, công thức  đúng với . Giả sử công thức  đúng với  ta có .

Ta có: .

Công thức  đúng với .

Vậy, **.**

1. Cho dãy số biết . Xác định số hạng tổng quát của dãy.

**Hướng dẫn giải**

.

Đặt .

.

Dãy cấp số nhân với công bội là .

Nên .

Do đó .

1. Cho dãy số xác định bởi.Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số theo .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Với mọi , ta có.

.

.

Dãy số  là cấp số nhân có công bội  và.

**.**

1. Cho hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện:.

(1) , .

(2) , .

a/Chứng minh: , .

b/Tìm biểu thức .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Câu a.

Vì  nên từ giả thiết (1) ta được: , .

Kết hợp giả thiết (2) ta được .

 do đó: , .

Câu b.

,.

Suyra:.

Thử lại thỏa các điều kiện, nên .

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

b)Cho dãy số  có . Tìm số hạng tổng quát .

**Hướng dẫn giải**

a)Xác định ba số hạng đầu của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 9 và tổng các bình phương của chúng là 125.

Gọi d là công sai, số hạng thứ 2 là a. Khi đó 3 số hạng đầu của csc là .

Theo giả thiết ta có hệ: .

.

Vậy có 2 cấp số thỏa mãn có 3 số hạng đầu là: -4;3;10 hoặc 10;3;-4.

b)Cho dãy số  có . Tìm số hạng tổng quát .

Ta có: .

 (1).

Đặt**.**

(1) trở thành:  (2).

Đặt .

(2) trở thành:  là csn có .

Từ đó ta có: .

1. Cho dãy số  xác định bởi : .

Chứng minh :  là số chính phương với mọi n nguyên dương.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Đặt  thì .

Khi đó  .

Ta có : .

Suy ra : .

Suy ra :  .

Từ hệ thức  và là các số chính phương suy ra là số chính phương với mọi n nguyên dương.

1. Cho dãy số  tăng, và . Xét dãy số  xác định bởi . Chứng minh rằng tồn tại .

**Hướng dẫn giải**

Dễ dàng thấy rằng dãy  tăng ngặt.

Trường hợp 1. Nếu .

 vậy dãy .

bị chặn trên do đó tồn tại .

Trường hợp 2. Nếu .

 thật vậy .

. Ta chứng minh (\*\*).

Xét hàm số  Trên đoạn  rõ ràng hàm số thoả mãn điều kiện của định lí Lagrăng nên tồn tại số  thoả mãn  đpcm.

Từ đó ta có.

dãy  bị chặn trên do đó tồn tại .

1. Cho dãy số  được xác định bởi :  và.

 với mọi .

Tính giới hạn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

.

.

=.

Do đó ta suy ra : .

Ta chứng minh . Thật vậy với , ta có .

Giả sử với  ta có : .

Ta có :  theo (\*) hay  trong.

.

1. Cho hàm số  thỏa mãn điều kiện  với mọi . Chứng minh rằng  với mọi .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

Từ (1) suy ra  (2).

Khi đó .

Xét dãy ,  được xác định như sau:  và .

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo *n* rằng với mỗi  luôn có.

với  (3).

Thật vậy, khi  thì theo (2), ta có ngay (3).

Giả sử mệnh đề (3) đúng với . Khi đó.

.

Vậy (3) đúng với .

Tiếp theo ta chứng minh . Thật vậy, ta thấy ngay . Do đó:, suy ra dãy  tăng ngặt.

Dãy  tăng và bị chặn trên nên hội tụ. Đặt  thì  với , suy ra . Vậy .

Do đó từ (3) suy ra  với mỗi  (đpcm).

1. Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây.

1.  với mọi .

2.  với mỗi .

**Hướng dẫn giải**

 và bởi vì  cho nên .

.

.

.

Dùng quy nạp theo  ta CM được .

Cố định  ta có .

Xét dãy  ta có:.

.

Vậy .

Vậy .

Kết hợp (1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp (2) và (4) ta được . Thử lại  ta thấy đúng. Vậy .

Kết hợp (1) và (3) ta được .

Từ (2) . Kết hợp (2) và (4) ta được . Thử lại  ta thấy đúng.

1. Cho dãy số xác định bởi . Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

**Hướng dẫn giải**

Trước hết, bằng quy nạp, ta dễ dàng có  và dãy số đã cho là dãy tăng.

Ta có :.

.

Giả sửvới . Ta có: .

Theo nguyên lý quy nạp ta có .

Ta có : thật vậy :  ;.

Do đó .

Ta có với thì.

Do đó  thì .

Suy ra .

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

1. Cho dãy sốxác định như sau .

a) Xác định số hạng tổng quát .

b) Tính .

**Hướng dẫn giải**

Biến đổi ta được:với  khi đó:.

nghĩa là dãy là một cấp số cộng của .

.

.

1. Cho dãy số được xác định như sau.

,.

với mọi . Chứng minh rằng dãy số  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi của dãy ta được.

.

Do đó . Từ đó .

1. Cho dãy số  xác định bởi .

Đặt . Tính .

**Hướng dẫn giải**

Cho dãy số  xác định bởi .

Đặt . Tính .

Ta có .

Từ đó bằng quy nạp ta chứng minh được .

.

Từ  suy ra .

Do đó .

Ta chứng minh .

Thật vậy, ta có .

Suy ra  là dãy tăng, ta có .

Giả sử ngược lại  bị chặn trên và là dãy tăng nên  thì . Khi đó  (vô lý). Suy ra  không bị chặn trên, do đó .

Vậy .

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy số  biết**.**

**.**

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên ta có:.

.

.

.

Đặt ,  thu được.

.

.

Đặt ,  thu được.

.

.

Do đó.

.

Như vậy ,.

Từ đó, với , ta có.

.

.

Vậy  .

1. Cho dãy số  xác định bởi .

Tìm công thức số hạng tổng quát  của dãy số theo .

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên.

.

.

.

.

Đặt , khi đó ta có: .

Lại có: .

Từ đẳng thức trên ta có công thức tổng quát của dãy  là: .

Từ đó ta có công thức tổng quát của dãy  là: .

1. Cho dãy số  xác định bởi  và  với mọi .

a)Xác định số hạng tổng quát của dãy số .

b)Tính tổng .

**Hướng dẫn giải**

a)Dễ thấy .

Từ .

Đặt  thì có: .

Đặt  thì ta có:. Từ đây suy ra  là cấp số nhân với , công bội là 3.

Nên: .

b)**.**

**.**

.

1. Cho dãy số  được xác định bởi  và  với mọi .

a)Chứng minh rằng: .

b)Tính tổng  theo .

**Hướng dẫn giải**

a)Khi :  đúng.

Giả sử  đúng với .

Ta chứng minh: .

Thật vậy: .

b)**.**

.

1. Cho dãy số(un) xác định như sau: .

**a)** Chứng minh: .

**b)** Tính: .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có: .

(Vì  dương).

b) Đặt , ta có: , .

Ta chứng minh:  (\*).

Với :  đúng.

Giả sử (\*) đúng với , , hay ta có: .

Ta có: .

Vậy (\*) đúng với . Vậy .

Cho , ta có: .

.

1. Cho dãy số thực  với  .

a) Chứng minh  với mọi .

b) Tính tổng .

**Hướng dẫn giải**

a) *Dùng phương pháp qui nạp*.

, .

Giả sử .

Ta có: .

.

Vậy  với mọi .

b).

.

1. Cho dãy số  với .

Tìm số dư khi chia  cho .

**Hướng dẫn giải**

Xét dãy số  với .

Ta có  với mọi .

Xét phương trình đặc trưng:.

Phương trình trên có nghiệm.

 có dạng . Vì  nên .Ta có:.

Ta có: .

Ta có  là số nguyên tố Theo định lý Fecma ta có:.

.

Suy ra ,.

Vậy khi chia  cho  ta được số dư là .

Suy ra khi chia  cho  ta được số dư là .

1. Cho dãy số .

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

Ta có: ; Chứng minh:  bằng phương pháp quy nạp.

Ta có:.

Giả sử:  và . Chứng minh: .

Ta có: . Vậy .

b) Lập công thức số hạng tổng quát của dãy số .

Ta có: .

Đặt , ta được: .

Ta được: là cấp số nhân có công bội .

Suy ra: .

Vậy .

1. Tìm số hạng tổng quát của dãy biết rằng:.

 ().

**Hướng dẫn giải**

Từ đề bài ta có: với mọi .

Ta có:  với mọi .

Đặt  ta được với mọi .

Vì phương trình đặc trưng của dãy có hai nghiệm phân biệt  nên với mọi .

Với  ta có . Suy ra với mọi .

Ta có với mọi .

Kết hợp với , ta suy ra với mọi .

1. Cho dãy số .

a) Chứng minh dãy số  là dãy số giảm.

b) Lập công thức tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

**a) Chứng minh dãy số**  **là dãy số giảm**.

Ta có: .

Giả sử:  với k >1. Cần chứng minh: .

Ta có: .

Mà .

 ⇒(điều phải chứng minh).

**b) Lập công thức tổng quát của dãy số** .

Ta có .

Xét dãy số , ta có: .

 là cấp số nhân .

.

1. Cho dãy số .

**a)** Chứng minh rằng .

**b)** Lập công thức tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

a) **Chứng minh rằng** .

Ta có: .

Giả sử: ; Cần chứng minh: .

Ta có: . Vậy .

**b)Lập công thức tổng quát của dãy số** .

Đặt  ta có .

.

 là cấp số nhân .

Vậy .

1. Cho dãy số  xác định bởi: .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy.

b) Tìm số dư khi chia  cho .

**Hướng dẫn giải**

a) Đặt  ta có: .

Khi đó .

Lại có:.

.

.

.

Do đó . Hay .

Vậy .

b) Ta có  chia cho 2015 dư 1.

1. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: . Đặt , khi đó ta được dãy  xác định như sau:  và .

Vì .

Bằng quy nạp ta chứng minh được: .