DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC TRUY HỒI.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$. Xác định số hạng tổng quát của dãy.

Hướng dẫn giải

$u_n = 3u_{n-1} - 1 \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = 3u_{n-1} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} = 3(u_{n-1} - \frac{1}{2})(1)$.

Đặt $\text{v}_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}$.

$(1) \Rightarrow v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2$

Dãy (v_n) là cấp số nhân với công bội là $q = 3$.

Nên $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{-5}{2}.3^{n-1}$.

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n = 1, 2, \ldots$.

Bài 2. a) Tính giới hạn $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - n\right)$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm công thức tính u_n theo n.

Hướng dẫn giải

a) Tính giới hạn $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - n\right)$.

Ta có: $A = \lim\left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} - n\right) = \lim \dfrac{n^2 - 1}{\sqrt[3]{\left(n^3 + n^2 - 1\right)^2} + n.\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} + n^2}$.

$$= \lim \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} + 1}.$$

Vậy $A = \frac{1}{3}$.

b) Ta có:.

$u_1 = 11 = 10 + 1$
$u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 2$.
$u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3$

Dự đoán: $u_n = 10^n + n(1)$.

Chứng minh:.

Ta có: $u_1 = 11 = 10^1 + 1$, công thức (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức (1) đúng với $n = k$ ta có: $u_k = 10^k + k$.

Ta có: $u_{k+1} = 10\left(10^k + k\right) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k+1)$..

Công thức (1) đúng với $n = k + 1$.

Vậy $u_n = 10^n + n,\ \forall n \in N$..

Bài 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm công thức của số hạng tổng quát (u_n)?.

Hướng dẫn giải

Đặt $x_n = \sqrt{1 + 2u_n} \Rightarrow x_n^2 = 1 + 2u_n,\ x_n \geq 0 \Rightarrow u_n = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$.

Thay vào giả thiết:.

$\dfrac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \dfrac{1}{9}(\dfrac{x_n^2 - 1}{2} + 4 + 4x_n) \Leftrightarrow (3x_{n+1})^2 = (x_n + 4)^2 \Leftrightarrow 3x_{n+1} = x_n + 4, \forall n \in N^*, x_n \geq 0$.

Ta có $3x_{n+1} - x_n = 4 \Leftrightarrow 3^{n+1}x_{n+1} - 3^n x_n = 4.3^n$.

Đặt $y_n = 3^n.x_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 4.3^n, \forall n \in N^*$.

$\Rightarrow y_{n+1} = y_1 + 4(3^n + 3^{n-1} + ... + 3) \Leftrightarrow y_{n+1} = y_1 - 6 + 2.3^{n+1}$.

Ta có $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 \Rightarrow y_n = 3 + 2.3^n$.

Suy ra $x_n = 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}, \forall n \in N^* \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{2}(3 + \dfrac{4}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{3^{2n-2}}), \forall n \in N^*$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1;\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n..

Hướng dẫn giải

Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$..

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow v_1 = 1;\ v_{n+1} = v_n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$..

Suy ra, dãy số (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 1$ và công sai $d = 2$..

Do đó, $v_n = v_1 + (n-1)d = 2n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$..

Vậy $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n-1}$..

Bài 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1;\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n.

Hướng dẫn giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có.

$u_{n+1} = 2u_n + 3^n \Leftrightarrow u_{n+1} - 3^{n+1} = 2(u_n - 3^n)$.

Xét dãy số (v_n), với $v_n = u_n - 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $v_{n+1} = 2v_n$. Do đó, dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = 2$ và số hạng đầu bằng -2..

Suy ra $v_n = v_1.q^{n-1} = -2^n$..

Vậy $u_n = v_n + 3^n = 3^n - 2^n$..

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1; u_{n+1} = \dfrac{3}{2}\left(u_n - \dfrac{n+4}{n^2+3n+2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n theo n.

Hướng dẫn giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có.

$$2u_{n+1} = 3\left(u_n - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)}\right) \Leftrightarrow 2u_{n+1} = 3\left(u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{3}{n+1}\right).$$

$$\Leftrightarrow 2\left(u_{n+1} - \frac{3}{n+2}\right) = 3\left(u_n - \frac{3}{n+1}\right) \Leftrightarrow u_{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3}{2}\left(u_n - \frac{3}{n+1}\right)..$$

dãy số $(v_n), v_n = u_n - \dfrac{3}{n+1}$ là cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{3}{2}$ và $v_1 = -\dfrac{1}{2}$.

$$v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(-\frac{1}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n = \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Xét dãy số (v_n) với $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.. Chứng minh dãy số (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n)..

Hướng dẫn giải

Ta có $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n - 1}$ thay vào hệ thức truy hồi ta có.

$$\frac{v_{n+1} + 1}{v_{n+1} - 1} = \frac{5.\dfrac{v_n + 1}{v_n - 1} - 3}{3.\dfrac{v_n + 1}{v_n - 1} - 1} \Rightarrow \frac{v_{n+1} + 1}{v_{n+1} - 1} = \frac{2v_n + 8}{2v_n + 4} \Rightarrow \frac{v_{n+1} + 1}{2} = \frac{2v_n + 8}{4}.$$

hay $v_{n+1} = v_n + 3$ và $v_1 = 2$. Suy ra dãy số (v_n) là một cấp số cộng có $v_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

.

Ta có $v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$..

Do đó $u_n = \dfrac{3n - 1 + 1}{3n - 1 - 1} = \dfrac{3n}{3n - 2}$. Thử lại thấy dãy số này thỏa mãn.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \dfrac{3n}{3n - 2}$ $n \in \mathbb{N}^*$..

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:.

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Tìm công thức của số hạng tổng quát (u_n)?.

Hướng dẫn giải

Đặt $x_n = \sqrt{1 + 2u_n} \Rightarrow x_n^2 = 1 + 2u_n, x_n \ge 0 \Rightarrow u_n = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$.

Thay vào giả thiết:.

$$\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \frac{1}{9}\left(\frac{x_n^2 - 1}{2} + 4 + 4x_n\right)$$
$$\Leftrightarrow (3x_{n+1})^2 = (x_n + 4)^2 \quad .$$
$$\Leftrightarrow 3x_{n+1} = x_n + 4, \forall n \in N^*, x_n \ge 0$$

Ta có $3x_{n+1} - x_n = 4 \Leftrightarrow 3^{n+1}x_{n+1} - 3^n x_n = 4.3^n$.

Đặt $y_n = 3^n.x_n \Rightarrow y_{n+1} = y_n + 4.3^n, \forall n \in N^*$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow y_{n+1} = y_1 + 4(3^n + 3^{n-1} + \ldots + 3)\\&\Leftrightarrow y_{n+1} = y_1 - 6 + 2.3^{n+1}\end{aligned}.$$

Ta có $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 \Rightarrow y_n = 3 + 2.3^n$.

Suy ra.

$$\begin{aligned}&x_n = 2 + \frac{1}{3^{n-1}}, \forall n \in N^*\\&\Rightarrow u_n = \frac{1}{2}(3 + \frac{4}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{2n-2}}), \forall n \in N^*\end{aligned}.$$