**CHUYÊN ĐỀ DÃY SỐ**

**CÁC DẠNG KHÁC**

a/Tìm  sao cho hệcó nghiệm.

b/Với  tìm được ở câu a/,hãy xác định tập hợp tất cả các giá trị của tổng:.

với  và .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Câu a.

Do:.

:Khi đó: . Vậy hệ có nghiệm.

:Chọn  vàcó nghiệm. Nên  là nghiệm của hệ.

:có nghiệm. Nên  là nghiệm của hệ.

:Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi .

Câu b

Ta có: .

Xét hàm: . Ta có: .

Do đó:Dấu đẳng thức xảy ra khi:.

 vì . Dấu đẳng thức xảy ra khi,liên tục trên . Khithì.Vậy , tập giá trị là:.

:Chọn .Thỏa giả thiết:.

liên tục trên;.Vậy tập giá trị là:.

Chọnthỏa giả thiết:với;liên tục trên;.Tập giá trị là:.

1. Kí hiệu  là tập hợp các đa thức bậc  dạng: . Chứng minh: .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Xét đa thức Trêbưsép .

Chứng minh  là đa thức bậc  có hệ tử bậc  là .

Chứng minh bằng quy nạp dựa vào công thức:.

Do đó: . Ta có . Nếu tồn tại  sao cho ,.

. Lúc đó ta xét   đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng ,  đổi dấu  lần tại các điểm , .

Do đó . Vậy .

1. Cho dãy số  không âm thỏa mãn ,

và ,.

Chứng minh rằng  là số nguyên với mọi nguyên tố lớn hơn hoặc bằng .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

Viết lại đẳng thức trong đầu bài về dạng .

Từ  không âm dẫn đến , với mọi .

Biến đổi về ,.

1. Cho dãy số dương  thoả mãn:  với mọi số tự nhiên . Chứng minh rằng dãy {xn} hội tụ.

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Từ (1) và (2) suy ra .

Với  tuỳ ý, khi  đủ lớn, ta có .

Nếu  thì .

Nếu  thì .

Mà .

Tóm lại, cả hai trường hợp đều dẫn đến .

Vậy dãy số {xn} hội tụ.

1. Cho phương trình  với  là số nguyên dương. Gọi  là nghiệm dương của phương trình. Dãy số  được xác định như sau:.

.

Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên  sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Đầu tiên ta chứng minh  là số vô tỉ. Thật vậy, nếu  là số hữu tỉ thì  là số nguyên (do hệ số cao nhất của  là 1) và  là ước của 1. Do đó  suy ra , trái giả thiết.

Do đó .

.

.

 (1). Lại có , suy ra .

  (do (1)).

Vậy . Từ đó bằng quy nạp ta có với mọi ,  thì  (2).

Chọn , , từ (2) ta có .

Vậy  chia hết cho , .

1. Cho dãy  với n > 0 được xác định bởi:.



a) Chứng minh  chia hết cho  với mọi giá trị nguyên dương của .

b) Đặt . Chứng minh tồn tại vô số số nguyên dương  để 2015 là một ước của .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có    .

Dễ thấy  với  Bằng quy nạp ta chứng minh dãy  trùng với dãy .

Thật vậy:.

Mệnh đề đúng với  Giả sử mệnh đề đúng đến . Khi đó ta có:.

.

Dùng công thức của dãy Fibonaci :  ta dễ dàng biến đổi vế phải thành .

suy ra .

Vậy mệnh đề đúng với , do đó nó đúng với mọi  nguyên dương.

Điều đó chứng tỏ  luôn chia hết cho  với mọi  nguyên dương.

b) Gọi  là số dư của  cho 2015 với .

Trước tiên ta chứng minh  là một dãy tuần hoàn. Thật vậy: Ta có .

Vì có vô hạn các cặp  .,  nhưng chỉ nhận hữu hạn giá trị khác nhau nên tồn tại ít nhất hai phần tử của dãy trùng nhau. Ta giả sử là  (với  là một số nguyên dương).

Ta chứng minh  tuần hoàn với chu kỳ .

+) Ta có:  .

 .

Tiếp tục như vậy ta chứng minh được:  với mọi  (1).

+) Ta có:  .

.

.

Bằng quy nạp ta chứng minh được: với  (2).

Từ (1) và (2) suy ra là một dãy tuần hoàn.

Bổ sung vào dãy  phần tử  thỏa mãn  suy ra .

Khi đó dãy  là dãy tuần hoàn bắt đầu từ phần tử đầu tiên  Do đó tồn tại vô số phần tử trong dãy  bằng 0.Như vậy câu b) được chứng minh xong.

1. Cho dãy số  được xác định như sau: Chứng minh rằng  khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Công thức tổng quát .

Đặt .

Ta có , .

Đặt . Khi đó ta được dãy  được xác định như sau: .

Do  nên bằng quy nạp ta được:  hay .

Do đó .

Giả sử , trong đó  đều lẻ.

1. Cho dãy số . Chứng minh có nhiều nhất 1 số hạng của dãy là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

So sánh đồng dư của ,  và  theo modun 4 ta có (chú ý ).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 3 | 0 | 3 | 2 |
|  | 2 | 3 | 2 | 3 |

Một số chính phương khi chia 4 có số dư là 0 hoặc 1.

Vì vậy từ số hạng thứ 3 trở đi, dãy không có số chính phương nào.

Nếu cả  và  đều chính phương, giả sử ,.

suy ra .

Hơn nữa khi phân tích 2019 thành tích chỉ có 2 cách .

Trường hợp 1: , vô lí do 1009 không là lập phương.

Trường hợp 2: , vô lí do 335 không là lập phương.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là dãy trên có nhiều nhất 1 số chính phương.

1. Cho dãy  thỏa mãn các điều kiện sau :. Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có : .

Bằng quy nạp ta chứng minh được , với mọi .

Ta có: .

.

Ta chứng minh rằng nếu  thì  (1).

Thật vậy:.

Với  thì (1) đúng.

Ta có .

Giả sử, tồn tại , mà , điều này chứng tỏ, với mọi  thì . Điều này mâu thuẫn với .

Vậy, với  thì .

Do đó .

1. Cho dãy số xác định bởi: . Tìm  chẵn thỏa mãn và là lập phương của 1 số tự nhiên.

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét thấy :.

.

Khi đó, giả sử :.

Cần chứng minh: (1) thật vậy ta có.

.

=  suy ra (1) đúng.

 .

Khi đó , giả sử tồn tại  chẵn để là lập phương của 1 số tự nhiên:.

Khi đó . Mặt khác  chẵn suy ra  lẻ suy ra  khi đó đặt.

  mà  nên:.

 (2). Giải hệ (2) ta được hệ không có nghiệm nguyên với mọi  suy ra không tồn tại n chẵn.

Vậy không tồn tại  chẵn để  là lập phương của một số tự nhiên.

1. Cho dãy số  được xác định như sau: Chứng minh rằng  khi và chỉ khi .

**Hướng dẫn giải**

Công thức tổng quát .

Đặt .

Ta có , .

Đặt . Khi đó ta được dãy  được xác định như sau: .

Do  nên bằng quy nạp ta được:  hay .

Do đó .

Giả sử , trong đó  đều lẻ.

Từ đẳng thức này ta được  khi và chỉ khi .

1. Cho dãy số thực được xác định như sau: . Chứng minh rằng:  ( kí hiệu  là phần nguyên của số thực ).

**Hướng dẫn giải**

Ta chứng minh rằng: , với .

,  quy nạp .Với  đúng giả sử đúng đến . Tức là . Từ đó suy ra.

.

 .

Việc tiếp theo ta chứng minh . Ta có BĐT  thật vậy,.

Xét hàm số  .

 hàm số  giảm trên khoảng.

, ta suy ra  áp dụng.

.

Từ đó: .