BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Không có tham số

Dạng 1: Biến đổi tương đương

Bài 1. Giải bất phương trình: $\frac{1}{1-x^2}+1>\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(Chưa giải)

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{9-\frac{9}{x}}<x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 9-\frac{9}{x}\ge 0 \\ x-\frac{9}{x}\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ -3\le x<0 \end{array}\right.$

*) Nếu $-3\le x<0$ thì $x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}<0<\sqrt{9-\frac{9}{x}}$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

*) Nếu $x\ge 3\Rightarrow x-\sqrt{x-\frac{9}{x}}>0$ nên bất phương trình tương đương với

$9-\frac{9}{x}<x^2-2x.\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x-\frac{9}{x}\Leftrightarrow x^2-9-2x.\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x>0$

$(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x})^2>0\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \sqrt{x^2-9}\ne\sqrt{x} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x\ne\frac{1\pm\sqrt{37}}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm là $S=[3;+\infty)\backslash\{\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}\}$

Bài 3. Giải bất phương trình: $2(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}\le x^2-2x-1$. (1)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x^2+2x-1\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -1+\sqrt{2} \\ x\le -1-\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$(1)\Leftrightarrow \left(x-1-\sqrt{x^2+2x-1}\right)^2-(x+1)^2\ge 0\Leftrightarrow \left(-2-\sqrt{x^2+2x-1}\right)\left(2x-\sqrt{x^2+2x-1}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2x-\sqrt{x^2+2x-1}\le 0$ (do $-2-\sqrt{x^2+2x-1}<0$)

$\Leftrightarrow 2x\le\sqrt{x^2+2x-1}$ (*)

+) Với $x\le -1-\sqrt{2}$ thì (*) luôn đúng.

+) Với $x\ge -1+\sqrt{2}$, bình phương 2 vế của (*) suy ra vô nghiệm.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x\le -1-\sqrt{2}$.

Bài 4. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-3x+3}\ge x-1$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ 2x^2-3x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x=1 \\ x\le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

+) Với x=1 BPT hiển nhiên đúng suy ra x=1 là nghiệm

+) Với $x\ge 3$ suy ra BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)(x-1)}-\sqrt{(x-1)(2x-1)}\ge x-1$ chỉ ra vô nghiệm

+) Với $x\le 2$ suy ra BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)}-\sqrt{(1-x)(3-x)}\le 1-x$.

Chỉ ra nghiệm $x\le \dfrac{1}{2}$

+) Kết luận: BPT có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Bài 5. Giải bất phương trình sau: $x+\sqrt{x^2-10x+9}>\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-10x+9}}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$.

Với $x+\sqrt{x^2-10x+9}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-10x+9}>-x$

suy ra $\sqrt{x^2-10x+9}(\sqrt{x^2-10x+9}-2+2x)>0$

do đó $\sqrt{x^2-10x+9}>0$ và $\sqrt{x^2-10x+9}>2-2x$.

Kết luận tập nghiệm $S=(-\dfrac{5}{3};1)\cup(9;+\infty)$.

Dạng 2: Đặt ẩn phụ

Bài 1. Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{2x+4}<3-x\sqrt{2}$.

(Chưa giải)

Bài 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^2-4x+6-\sqrt{2x-1}}>x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện x ≥ $\dfrac{1}{2}$.

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\sqrt{2(x-2)^2+2(2x-1)}>x-2+\sqrt{2x-1}$

Đặt: $\begin{cases} u=x-2 \\ v=\sqrt{2x-1}\ge 0 \end{cases}$ Khi đó, bất phương trình có dạng: $\sqrt{2u^2+2v^2}>u+v$ (1)

Ta có: $\sqrt{2\left(u^2+v^2\right)} \geq \sqrt{\left(u+v\right)^2} = |u+v| \geq u+v$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v$

Vậy (1) $\Leftrightarrow u \neq v$

Xét trường hợp $u = v$, ta có: $\sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[\frac{1}{2};+\infty\right) \backslash \{5\}$.

Bài 3. Giải phương trình: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \geq x^2-8x+18$.

Dạng 3: Sử dụng hàm số

Bài 1. Chứng minh rằng: $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với x > 0 và y > 0.

- Đặt t = $\frac{x+y}{x} > 1$
- Vì x > 0 và y > 0 nên: t = $\frac{x+y}{x} \Leftrightarrow tx = x+y \Leftrightarrow y = x(t-1)$
- Do đó: $\frac{2y}{2x+y} = \frac{2x(t-1)}{2x+x(t-1)} = 2\frac{t-1}{t+1}$.
- Bài toán trở thành chứng minh: $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}$ với mọi t > 1.
- Xét hàm số y = f(t) = $\ln t - 2\frac{t-1}{t+1}$ với mọi t > 1.
- y' = $\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng (0; +∞).
- Do đó: t > 1 $\Rightarrow$ f(t) > f(1) = 0 $\Rightarrow$ $\ln t - 2\frac{t-1}{t+1}$>0.
- Cách giải khác: Đặt t = $\frac{y}{x}$ và đưa đến chứng minh: $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}$. Giải tương tự.

Bài 2. Giải bpt $(2x)^{\cos 4x+3}+(1-x^2)^{\cos 4x+3} \geq (1+x^2)^{\cos 4x+3}$, $0 < x < 1$ (1).

- (1đ) Biến đổi về dạng: $a^y + b^y \geq 1$: Chia hai vế của (1) cho $(1 + x^2)^{\cos 4x + 3} > 0$ ta được:

  $(1) \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} \geq 1$ (2).

- (4 đ) Tìm ra nghiệm của (1):
  - Vì 0< x < 1 nên: $0<\frac{2x}{1+x^2}<1, 0<\frac{1-x^2}{1+x^2}<1$ và $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=1$
  - Và cos4x + 3 ≥ 2 nên: $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3}+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} \leq \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2=1$.

- Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: cos4x + 3 = 2 $\Leftrightarrow$ cos4x = -1 $\Leftrightarrow$ x = $\frac{\pi}{4}$ (vì 0< x <1).

  Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: x = $\frac{\pi}{4}$.

  <u>Cách khác</u>: Đặt x = tgt, t $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên 0< x <1 $\Leftrightarrow$ 0 < t < $\frac{\pi}{4}$.

  (2) $\Leftrightarrow$ $(\sin 2t)^{\cos 4x+3} + (\cos 2t)^{\cos 4x+3} \geq 1$.

Dạng 4: Đánh giá

Bài 1. [Đề chọn HSG Sở Quảng Trị,2010] Giải bất phương trình : $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\geq x^2-8x+18$.

2. Có tham số

Bài 1. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_m 11+\log_{\frac{1}{7}}(\sqrt{x^2+mx+10}+4)\log_m(x^2+mx+12)\geq 0.$$

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $m>0$ và $m\neq 1$, $x^2+mx+10\geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1-\log_7(\sqrt{x^2+mx+10}+4)\log_{11}(x^2+mx+12)}{\log_{11} m}\geq 0.\ (*)$$

Đặt $u=x^2+mx+10$, $u\geq 0$.

+ Với $0<m<1$: (*) $\Leftrightarrow f(u)=\log_7\left(\sqrt{u}+4\right)\log_{11}(u+2)\geq 1$

Ta thấy $f(9)=1$ và $f(u)$ là hàm đồng biến nên ta có:

$f(u)\geq f(9)\Leftrightarrow u\geq 9\Leftrightarrow x^2+mx+10\geq 9\Leftrightarrow x^2+mx+1\geq 0$

Vì phương trình trên có $\Delta=m^2-4<0$ với $0<m<1$ nên phương trình trên vô nghiệm $\Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Với $m>1$: Ta có: $f(u)\leq 1=f(9)\Leftrightarrow 0\leq u\leq 9$.

$$\Leftrightarrow 0\leq x^2+mx+10\leq 9\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+10\geq 0\ (1)\\ x^2+mx+1\leq 0\ (2)\end{cases}.$$

Xét phương trình $x^2+mx+1=0$ có $\Delta=m^2-4$.

Nếu $1<m<2\Leftrightarrow\Delta<0$ $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $m>2\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ phương trình trên có 2 nghiệm đều thoả mãn (1) và (2) $\Rightarrow$ bất phương trình đã cho có nhiều hơn một nghiệm.

Nếu $m=2$ $\Rightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $x=-1$ $\Rightarrow$ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Vậy giá trị cần tìm của m là: $m=-2$.

Bài 2. Tìm m để bất phương trình $x^2-2x+4\sqrt{(4-x)(x+2)}-18+m\geq 0$ đúng với mọi x $\in[-2;4]$.

Bài 3. *[Đề hsg Dương Xá,2008-2009]* Cho bất phương trình:

$$\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\le\sqrt{4x-x^2+m+3}$$

Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in[0;4]$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}0\le x\le 4\\ 4x-x^2+m+3\ge 0(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 4\\ m\ge x^2-4x-3(2)\end{cases}$

Điều kiện cần để bpt (1) nghiệm đúng với $\forall x\in[0;4]$ thì (2) nghiệm đúng $\forall x\in[0;4]$

Xét f(x)= x^2-4x-3

Bảng biến thiên

x	0		2		4
f(x)	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-3

Từ bảng biến thiên (2) đúng với $\forall x\in[0;4]$

$\Leftrightarrow\ m\ge\max\limits_{[0;4]}f(x)\Leftrightarrow m\ge -3$

PT $\Leftrightarrow\ 4+2\sqrt{4x-x^2}\le 4x-x^2+m+3$

Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}$

Bảng biến thiên

x	0		2		4
t	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $0\le t\le 2$

Bất phương trình trở thành

g(t)=-t^2+2t+1$\le$m (3)

Để bất phương trình đầu nghiệm đúng với $\forall x\in[0;4]$ thì (3) có nghiệm đúng với $\forall t\in[0;2]$. $\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{[0;2]}g(t)$

t	0		1		2
$g(t)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	1				1

Từ BBT suy ra $m \ge 2$.

Kết luận $m \ge 2$ thì bpt (1) nghiệm đúng $\forall x \in [0;4]$.