## ***BÀI TẬP BẤT ĐẲNG THỨC***



1. Cho  là các số thực dương. Chứng minh rằng:

.

1. Cho  là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

.

1. Cho  là độ dài 3 cạnh một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng:

.

1. Cho  và . Chứng minh rằng:

.

1. Cho  thỏa mãn . Chứng minh rằng

.

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

.

1. CM các bất đẳng thức sau:

1/  , với mọi .

2/  , với mọi .

LG:

1/

 với mọi .

Cộng vế theo voế các bất đẳng thức trên ta có

 ,

Hay 

2/ Xét tam thức bậc hai theo biến x ( xem y là tham số)

 

Ta có 



 , với mọi 

Và hệ số của a là  , với mọi 

Do đó tam thức  luôn cùng dấu vơi dấu hệ số a với mọi 

Nghĩa là , với mọi 

Vậy  với mọi .

1. Cho . Chứng minh bất đẳng thức:

.

Dấu đẳng thức khi nào xảy ra?

LG:

Coi  (Giải thích: Do đồng bậc nên nếu  ta chỉ cần đặt ). Khi đó:







 (2)

Áp dụng BĐT Bunhia, ta có hay có ngay (2). Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi  (khi coi ). Tổng quát là .

1. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn . Chứng minh rằng:



1. Cho  là các số dương thỏa mãn . Chứng minh rằng .
2. Chứng minh rằng nếu  thì .
3. Chứng minh rằng .

LG: BĐT viết thành

 đúng hiển nhiên

a. Cho  và .Chứng minh :.

b. Cho  và .Chứng minh :.

1. Cho  là ba số thực không âm và thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: .

LG:

Chứng minh được: 

Suy ra:  và 



Vậy GTLN của M là 

Giá trị này đạt được khi .

1. Cho  là ba số thực không âm thỏa  . Tìm giá trị lớn nhất của

.

1. Cho  không âm và thỏa mãn  . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

.

1. Cho ba số thực dương  .Chứng minh: 

LG:

Ta chứng minh:  (1)

Sử dụng bất đẳng thức AM\_GM ta có :



Suy ra : 

Suy ra : 

Vậy ta chứng minh được (1)

Ta chứng minh  (2)

(2) đối xứng với .Không mất tính tổng quát ta giả sử 

Suy ra :

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy  và 

ta có : 

Ta lại có  ( bất đẳng thức nesbitt)

Vậy ta chứng minh được (2)

Công (1) và (2) vế theo vế ta có điều phải chứng minh

1. a. Cho các số thực dương . Chứng minh rằng: .

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

LG:

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

 đúng

Đẳng thức xảy ra khi 

1. Đặt , ta có:





Vậy giá trị nhỏ nhất của  bằng  khi 

1. Cho ba số dương  thỏa mãn abc = 1.Chứng minh rằng:

a) 

b) 

LG:

a) , , 

, , 

Mà 

Vậy: , đẳng thức xảy ra khi 

1. 





Tương tự:



Tương tự:



Vậy: 

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1

1. Cho  là các số thực dương thỏa :. Chứng minh . Đẳng thức xảy ra khi nào?

LG:

Áp dụng AM-GM , ta có:  .Suy ra 

Tương tự : . Suy ra 

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta có : 

Suy ra:

Khi  thì đẳng thức xãy ra

1. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn: . Chứng minh rằng: 

LG:

Ta có :



Tương tự ta có :, 

Từ (1),( 2),(3) suy ra : 

Đẳng thức xảy ra 

1. Cho các số thực: . Chứng minh rằng:

a) 

b) 

LG:

a) Cho. Chứng minh rằng: 



Suy ra: 

Mà  nên bài toán được CM.

b) Cho. Chứng minh rằng: 



Suy ra: 

Do kết quả câu a):  . Suy ra kết quả cần CM.

1. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

.

LG

Áp dụng AM – GM, ta có



Tương tự



Vậy



Áp dụng Cauchy – Swarzt, ta được:

Dấu ‘=’ xảy ra khi 

Vậy GTNN của biểu thức là P = 1.

1. Cho a, b và c là các số không âm. Chứng minh rằng:



LG:

Với x, y, z là ba số không âm. Ta có: 

Suy ra: ;  và 

Suy ra 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c,

1. Cho ba số thực dương  thỏa mãn điều kiện: . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

LG

Ta có: 

Suy ra 

Tương tự: 

Suy ra . Suy ra 

 khi 

Vậy giá trị nhỏ nhất của  là 