**BÀI TẬP ÔN HSG TOÁN 11 – SỐ HỌC**

1. Một số có  chữ số là số chính phương và có tính chất: Nếu tất cả các chữ số của nó cùng trừ đi một số thì cũng được một số có  chữ số cũng là số chính phương. Tìm tất cả các số có  chữ số thỏa mãn tính chất nêu trên.

**Hướng dẫn giải.**

Gọi số cần tìm là  theo giả thiết của đề bài ta có.

.

Gọi số cần tìm là  theo giả thiết của đề bài ta có.

.

Mặt khác do  là các số lẻ nên chỉ  là thích hợp.

Nếu  thì .

Nếu  thì .

Vậy các số cần tìm là 

Ta có:.



.

Do  là những số có 4 chữ số nên .

Suy ra .

mặt khác do  là các số lẻ nên chỉ  là thích hợp.

Nếu  thì .

Nếu  thì .

Vậy các số cần tìm là .

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

**Hướng dẫn giải.**

Ta có:.

.

.

.

Vì  là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:.

;;;.

Giải ba hệ phương trình trên ta được: .

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: .

**Hướng dẫn giải.**

Viết phương trình thành phương trình bậc hai đối với :.

 (\*).

Ta có .

Để  có nghiệm nguyên là số chính phương.

Ta có: .

.

Mà  nên  cùng chẵn.

Và .

Do đó: hoặc .

Suy ra :  hoặc .

Thay  vào ta được :  hoặc .

Thay  vào  ta được : hoặc .

Tập nghiệm: .

1. Tìm một hằng số nguyên dương  sao cho phương trình. có đúng ba nghiệm nguyên dương .

**Hướng dẫn giải.**

Ta viết lại phương trình .

- Nếu , loại.

- Nếu , do đó  và .

Ta có  nên .

vậy , mà .

nên .

Với  ta có . Do vậy ta thử lấy .

Ta phải có . Khi đó , theo thứ tự.

Vậy phương trình có đúng ba nghiệm nguyên dương .

1. Cho  là các số nguyên dương sao cho  Chứng minh rằng nếu  và  có các ước nguyên tố giống nhau, thì  là một lũy thừa của .

**Hướng dẫn giải.**

Giả sử và Vì.

.

nên  và  có các ước nguyên tố giống nhau.

Đặt thì  và  có các ước nguyên tố giống nhau.

Ta sẽ chứng minh  là một lũy thừa của 2.

Thật vậy, nếu  không phải là lũy thừa của  thì  có ước nguyên tố lẻ là .

Do  và  nên  và  có các ước nguyên tố giống nhau.

Gọi  là một ước nguyên tố của  thì do  nên.

.

Do đó,  chỉ có ước nguyên tố là  suy ra .

Vì  nên  Từ  suy ra .

Khi ấy .

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ  là một lũy thừa của .

Bây giờ nếu  là một ước nguyên tố bất kì của  thì  cũng là ước của .

Do đó, Thành thử, là một lũy thừa của  hay  cũng vậy.

Do  là số chẵn nên  suy ra các ước nguyên tố của  cũng là các ước nguyên tố của .

Nếu  có ước nguyên tố lẻ là  thì do  nên  suy ra  là số chẵn.

Nhưng là số lẻ  nên  suy ra  Vô lí vì .

Vậy  phải là lũy thừa của .

1. Cho số nguyên . Tìm số lớn nhất các cặp gồm  phần tử phân biệt của tập sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá .

**Hướng dẫn giải.**

Giả sử có  cặp thỏa mãn đề bài. Gọi  là tổng của  cặp đó, thì.

.

Dễ thấy .

Do đó .

Bây giờ ta xây dựng  cặp thỏa mãn đề bài như sau.

Trường hợp 1: Số  có dạng  hoặc . Khi ấy, .

Ta xét các cặp sau:.

Rõ ràng dãy trên có  cặp thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Số  có dạng  hoặc  hoặc .

Khi ấy, .

Ta xét các cặp sau.

Dãy trên có  thỏa mãn đề bài.

Vậy số lớn nhất các cặp thỏa mãn đề bài là .

1. Tìm tất cả các đa thức hệ số thực  không đồng nhất không thỏa mãn: , ****.

**Hướng dẫn giải.**

Giả sử thỏa mãn đầu bài. Khi đó ta có.

Suy ra .

Đặt , ta có  do .

Xét dãy {xn} như sau: , .

Khi đó:.

.

Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được.

(\*).

Xét đa thức hệ số thực .

Từ (\*) ta có  nhận  làm nghiệm với mọi .

Mặt khác do dãy  tăng nghiêm ngặt nên  suy ra .

Thử lại ta có thỏa mãn đầu bài.

Vậy: Có duy nhất đa thức .

1. Trên bảng ô vuông cố định có kích thước  người ta xếp một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có nhiều nhất một viên sỏi. Mỗi cách xếp sỏi được tính điểm như sau, nếu tổng số sỏi trên một hàng (hoặc trên một cột hoặc trên một trong hai đường chéo) là một số lẻ thì được tính  điểm. Bảng không có sỏi ứng với  điểm, bảng xếp kín  viên sỏi ứng với  điểm.

a)Tồn tại hay không cách xếp sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm.

tương ứng với cách xếp đó là .

b)Chứng minh rằng số cách xếp sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách xếp sỏi.

với điểm số là một số lẻ.

**Hướng dẫn giải.**

a)Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách xếp là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi.

Gọi *a, b, c, d* là số sỏi trong các ô như hình vẽ,  Khi đó các ô đối xứng với *a, b, c, d* qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là  sao cho 

a

b

c

d

0

a

b

c

d

a’

0

d'

c'

b'

Từ đó  suy ra một trong hai tổng  hoặc  là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại các xếp sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán.

b)Ta gọi hai cách xếp sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.

g

f

e

i

d

c

b

a'

h

a

b

c

d

i

e

f

g

h

(B) (B’).

Như vậy, các cách xếp sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách xếp liên hợp với nhau (B) và (B’). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo của hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B’) khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B’) có tính chẵn lẻ khác nhau.

Vậy hai cách xếp liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách xếp còn lại cố điểm số là một số lẻ suy ra điều phải chứng minh.

1. Cho tập hợp . Cần phải loại khỏi  ít nhất bao nhiêu phần tử để tập hợp còn lại có tính chất: Không phần tử nào bằng tích của hai phần tử khác.

**Hướng dẫn giải.**

Loại khỏi  tập hợp , tập này có 43 phần tử. Khi đó tập còn lại là . Rõ ràng tập này thỏa mãn yêu cầu: Không có phần tử nào là tích của hai phần tử khác.

Ta sẽ chứng minh mọi cách tách khỏi  một tập hợp có nhiều nhất 42 phần tử đều không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Thật vậy xét các bộ ba sau (43 bộ ba):.

2, 87, 2.87.

3, 86, 3.86.

4, 85, 4.85.

………….

44, 45, 44.45.

Xét hàm số  với . Ta có .

Vậy  là hàm đồng biến khi .

Suy ra.

Dễ thấy .

Vì  nên toàn bộ các phần tử của 43 bộ ba đều là khác nhau và đều nằm trong tập hợp .

Vì ta tách ra khỏi  tối đa 42 phần tử, nên phần còn lại của  (sau khi tách) phải có ít nhất một bộ ba nói trên. Vậy mọi cách tách như thế không thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Kết luận: Số phần tử ít nhất cần tách khỏi  là 43 phần tử.

1. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình  thỏa mãn điều kiện .

**Hướng dẫn giải.**

Ta viết điều kiện thành .

Xét các điều kiện sau:(\*\*);(\*\*\*).

Gọi  lần lượt là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình  thỏa mãn các điều kiện (\*)(\*\*)(\*\*\*).

Ta có . Đặt .

Kết hợp với (\*\*) phương trình (1) trở thành  .

Số nghiệm không âm của phương trình  thỏa mãn điều kiện (\*\*) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình . Theo công thức tổ hợp lặp ta có số nghiệm đó là  vậy . Lý luận tương tự ta có .

Suy ra .

1. Tìm các số nguyên dương  sao cho  là một số nguyên.

**Hướng dẫn giải.**

Dễ nhận thấy (*a, b,* 1) thỏa mãn với mọi *a, b* nguyên dương.

Xét **.

Đặt ; ; với .

Khi đó.

.

.

Do đó .

+Nếu  thì .

Mà ** nên  không thể là ước của 2. Do đó trường hợp này không thỏa mãn.

+Nếu *ra* hoặc *rb* nhỏ hơn  thì.

.

Nếu  thì  nguyên với mọi  nguyên dương.

Nếu  thì    chẵn.

Nếu  thì  ⇒ ; .

1. Cho  và  là các số nguyên dương thỏa mãn  là ước của .Chứng minh rằng  là ước của .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt  (). Khi đó ta viết.

.

Ta xét các trường hợp sau:.

\* TH1: Nếu *q* là số lẻ thì .

Kết hợp với  thu được.

.

\* TH2: Nếu *q* là số chẵn thì .

Kết hợp với  và .

ta thu được  (vô lí vì ).

Vậy ta có đpcm.

1. Cho  là hai số nguyên dương với . Biết rằng tồn tại cặp số nguyên dương  sao cho . Chứng minh rằng *b* là số chính phương.

**Hướng dẫn giải.**

Sắp xếp thứ tự của 10 số lớn thứ ba của các hàng là  Ta thấy tối đa là 20 số có thể lớn hơn  (là các số lớn thứ nhất và thứ hai ở mỗi hàng).

Vì vậy . Tương tự có tối đa 28 số có thể lớn hơn . Vì vậy  Từ đó.

.

Trong khi đó, tổng các số ở hàng chứa  không lớn hơn.

.

Do  nên hàng chứa  là hàng thỏa mãn yêu cầu.

Chọn cặp  trong các cặp thỏa mãn yêu cầu sao cho  nhỏ nhất với .

Coi  là phương trình bậc hai ẩn *u*.

Vì sự tồn tại của *u* nên phương trình này còn có nghiệm thứ hai là .

Theo định lý Vi – ét ta có.

.

Vì  nên .

(Do ).

Nếu  thì  là số chính phương.

Nếu  thì  ( vô lý vì tổng  nhỏ nhất).

Vậy ta có điều phải chứng minh.

1. Tìm tất cả các số tự nhiên  sao cho trong mặt phẳng tồn tại  đường thẳng mà mổi đường thẳng cắt đúng  đường khác.

**Hướng dẫn giải.**

Xét  đường trong mặt phẳng, mà mổi đường thẳng cắt đúng  đường khác.

Nếu *a* là một đường thẳng trong  đường và có đúng  đường song song với nó .

Cho  là đường thẳng bất kỳ cắt , khi đó  cắt tất cả các đường không song song với  và  với số giao điểm bằng số giao điểm của  với các đường thẳng đó đồng thời  cắt các đường thẳng song song với  mà mổi đường thẳng cắt đúng  đường khác.

Suy ra có đúng  đường song song với .

Vậy  đường được chia thành  nhóm, mổi nhóm gồm  đường thẳng song song với nhau.

 Số giao điểm của mỗi đường với các đường khác là .

Mà  và  là ước nguyên dương của .

.

.

.

1. Cho số nguyên dương . Chứng minh rằng tập hợp  có thể chia thành hai tập con không giao nhau sao cho không tập nào trong chúng chứa  phần tử  với  và  với mọi .

**Hướng dẫn giải.**

Đặt .

. Ta chứng minh  là các tập con cần tìm của .

Dễ dàng thấy  và . Ta chứng minh phản chứng.

Giả sử  gồm các phần tử với  và  với mọi .

Khi đó ta có , với mọi  (1).

Nếu ., ta có  do . Suy ra tồn tại ít nhất  phần tử thuộc .

Áp dụng nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một tập  chứa ít nhất 2 phần tử trong số các phần tử .

Tức là tồn tại  sao cho và .

Khi đó ta có .

Suy ra . Điều này, mâu thuẫn với (1).

Vậy  không chứa các phần tử với  và  với mọi .Chứng minh tương tự ta cũng có tập  không chứa các phần tử với  và  với mọi .

Vậy  là các tập con cần tìm của .

1. Tìm tất cả số nguyên  sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải.**

 chia hết cho   chia hết cho .

 chia hết cho   chia hết cho .

Từ đó tìm được .

1. Cho  là đa thức có bậc  với hệ số nguyên. Chứng minh rằng có tối đa  số nguyên  sao cho .

**Hướng dẫn giải.**

+TH1 :Nếu mọi số nguyên  thỏa mãn  đêu thỏa mãn  mà  có tối đa  nghiệm nguyên dương nên bài toán được chứng minh.

+TH2 :Nếu tồn tại số nguyên  mà  nhưng  thì .

Vì  nên nếu chỉ có  thỏa mãn  thì bài toán được chứng minh.

Giả sử có  sao cho , đặt : .

Ta có  là ước của .

Tương tự  là ước của .

Suy ra  .

Nếu , chứng minh tương tự ta thu được.

.

điều này vô lí.

Do đó .

Khi đó các nghiệm thoản mãn  đều thỏa mãn . Mà  là phương trình bậc  nên  có tối đa  nghiệm nguyên.

KL.

1. .Cho  là số nguyên dương. Cho  điểm trên phân biệt trên một đường tròn được gán giá trị bởi các số  (2 điểm khác nhau được gán giá trị khác nhau) theo một cách nào đó. Mỗi dây cung được nối 2 điểm trong các điểm trên và được gán giá trị bằng độ chênh lệch dương giữa 2 đầu mút. Chứng minh rằng ta có thể chọn được  dây cung đôi một không cắt nhau sao cho tổng giá trị của các dây cung bằng .

**Hướng dẫn giải.**

**Bổ đề:**Trên một được tròn có  điểm phân biệt. Người ta tô màu  điểm này bằng 1 trong 2 màu màu xanh đỏ sao cho có đúng  điểm được tô màu xanh và đúng  điểm được tô màu đỏ. 2 điểm khác màu nhau bất kì được nối bởi 1 dây cung. Khi đó với mỗi cách tô màu luôn tồn tại  dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp.

Dễ thấy bổ đề đúng với .

Giả sử bổ đề đúng với mọi .

Xét .

Do các điểm chỉ được tô bởi 1 trong 2 màu nên phải tồn tại 2 điểm kề nhau mà chúng được tô khác màu. Ta chọn dây cung có 2 đầu mút là 2 điểm này.

Theo giả thiết quy nạp tồn tại cách chọn m cung trong số các dây cung có đầu mút là các điểm trong  điểm còn lại mà không có 2 dây cung nào cắt nhau. Rõ ràng không có dây cung nào trong m dây cung này cắt dây cung vừa chọn phía trên.

Như vậy tồn tại cách chọn  dây cung mà không có 2 dây cung nào cắt nhau, Bổ đề được chứng minh.

**Trở lại bài toán:.**

Ta tô các điểm có giá trị là  bằng màu đỏ, các điểm  bằng màu xanh. Khi đó theo bổ đề tồn tại cách chọn  dây cung mà mỗi dây cung có 2 đầu mút được tô bởi 2 màu khác nhau và chúng đôi một không cắt nhau. Tổng giá trị của các dây cung sẽ bằng:  (ĐPCM).