**BÀI TẬP NÂNG CAO SỐ HỌC 11**

1. Trên bảng ô vuông , người ta đặt một số viên sỏi sao cho mỗi ô vuông có không quá một viên sỏi. Với mỗi cách đặt ta cho tương ứng với số điểm bằng tổng số: các hàng, các cột, các đường chéo chứa số lẻ các viên sỏi trên đó. Bảng không có sỏi ứng với 0 điểm.

a) Tồn tại hay không cách đặt sỏi sao cho ô chính giữa bảng không có sỏi và số điểm tương ứng với cách đặt đó là 8.

b) Chứng minh rằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số chẵn bằng số cách đặt sỏi với điểm số là một số lẻ.

**Hướng dẫn giải bài 1**

a) Giả sử ô chính giữa không có sỏi và điểm số của cách đặt là 8. Như vậy 3 hàng, 3 cột và hai đường chéo đều có một số lẻ viên sỏi. Gọi a,b,c,d là số sỏi trong các ô như hình vẽ, a,b,c,d . Khi đó các ô đối xứng với a,b,c,d qua tâm sẽ có số sỏi tương ứng là a',b',c',d' sao cho a+a'=b+b'=c+c'=d+d'=1.



Từ đó (a+b+c)+(a'+b'+c')=3 suy ra một trong hai tổng a+b+c hoặc a'+b'+c' là một số chẵn. Khi đó dòng thứ nhất hoặc dòng thứ ba có tổng số sỏi là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Vậy không tồn tại cách đặt sỏi thỏa mãn điều kiện bài toán

b) Ta gọi hai cách đặt sỏi là liên hợp với nhau nếu ô trên cùng bên trái của chúng có số sỏi khác nhau và các ô còn lại tương ứng có số sỏi như nhau.



Như vậy, các cách đặt sỏi chia thành từng cặp đôi một liên hợp với nhau.

Xét hai cách đặt liên hợp với nhau (B) và (B'). Tổng số sỏi ở dòng 1, cột 1 và 1 đường chéo cả hai bảng đôi một khác nhau về tính chẵn lẻ. Các dòng, cột và đường chéo còn lại của hai bảng có số sỏi như nhau. Do đó điểm số của (B) và (B') khác nhau 3 đơn vị, suy ra số điểm của (B) và (B') có tính chẵn lẻ khác nhau. Vậy hai cách đặt liên hợp với nhau, một cách xếp có điểm số chẵn, cách đặt còn lại có điểm số là một số lẻ suy ra điểu phải chứng minh.

1. Chứg minh rằng tồn tại vô hạn bộ số nguyên dương  thỏa mãn hai số bất kì trong chúng đều nguyên tố cùng nhau và .
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của  sao cho tồn tại  số nguyên dương thỏa mãn tổng các lũy thừa bậc 4 của chúng có giá trị là 1998.
3. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  thỏa mãn .
4. Tìm tất cả các bộ  với  là các số nguyên dương;  là một số nguyên tố thỏa mãn phương trình 

**Hướng dẫn giải bài 5**

Với  ta dễ có  Xét  từ giả thiết suy ra  Do đó tồn tại các số nguyên dương  sao cho  và 

Từ đó suy ra 

Mặt khác, ta lại có

 và 

Suy ra .

Do vậy ta có  hoặc  Từ đây dễ dàng suy ra  và 

Vậy 

1. Chứng minh rằng đa thức  không thể biểu diễn thành tích của 3 đa thức hệ số nguyên và có bậc không nhỏ hơn 1.

**Hướng dẫn giải bài 6**

Giả sử phản chứng rằng  với  và không phải các đa thức hằng. Từ , bậc của  là chẵn. Từ đó suy ra rằng hai trong ba đa thức này là đa thức bậc hai. Giả sử rằng . Từ  suy ra rằng  là ước của 23. Có nghĩa là . Nhưng bởi vì  nên . Tương tự, .

Mặt khác,  là ước của 23 do đó ít nhất một trong số  hoặc  là .

Không mất tính tổng quát giả sử  thì . Từ đó suy ra . Nhưng điều này kéo theo  có ít nhất một nghiệm thực trong khi , mâu thuẫn. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng có ước nguyên dương dạng .

**Hướng dẫn giải bài 7**

Gọi  số nguyên liên tiếp là . Yêu cầu bài toán giúp ta nghĩ đến hệ thặng dư

 với  và  với 

Ta có . Thật vậy, đặt 

Ta có 

Có  suy ra 

Khi đó 

Từ đó, ta chỉ cần chọn  sao cho  với  thì theo định lý thặng dư Trung Hoa, hệ thặng dư trên có nghiệm. Khi đó ta có đpcm

1. Các số tự nhiên  được điền vào bảng ô vuông kích thước  (mỗi ô một số), bắt đầu từ số 0 ở chính giữa bảng, đến các số tiếp theo được điền theo hình xoắn ốc ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ bên dưới:



1) Biết rằng các cột của bảng được đánh số từ 1 đến 2015 từ trái sang phải và các dòng của bảng được đánh số từ 1 đến 2015 theo thứ tự từ trên xuống dưới. Hỏi theo cách điền trên thì số 2015 nằm ở dòng nào, cột nào?

2) Người ta cho phép thực hiện thao tác sau: Đầu tiên, thay số 0 ở giữa bảng bằng số 14. Mỗi lần sau đó, người ta sẽ chọn ra 12 ô vuông liên tiếp thuộc cùng hàng, hoặc 12 ô vuông liên tiếp thuộc cùng cột, hoặc 12 ô vuông thuộc một bảng hình chữ nhật  rồi cộng thêm 1 vào tất cả các ô được chọn (mỗi lần chỉ được chọn 1 trong 3 loại hình trên). Hỏi sau một số hữu hạn lần, có thể làm cho tất cả các ô vuông của bảng đã cho đều chia hết cho 2016 được không?

**Hướng dẫn giải bài 8**

1) Ta có các nhận xét sau:

i. Trong một bảng ô vuông con có kích thước lẻ và có tâm là ô chứa số 0, tất cả  số từ  đến  đều được điền và cột đầu tiên tính từ trái sang của bảng này chứa  số lớn nhất (số lớn nhất là  nằm cuối cột đó).

ii. Số 0 nằm ở hàng 1008, cột 1008 của bảng.

Từ đó, ta thấy rằng:

Vì  nên số này nằm trong bảng ô vuông  và số lớn nhất trong bảng này là 2024.

Số 2024 nằm ở cột 1 của bảng này, tương ứng là cột thứ  của bảng đã cho.

Số 2024 nằm ở dòng 45 của bảng này, tương ứng là dòng thứ  của bảng.

Do  nên số 2015 sẽ nằm cao hơn số 2024 là 9 dòng, suy ra số 2015 nằm ở dòng thứ .

Vậy số 2015 nằm ở dòng thứ 1021 và cột thứ 986 của bảng.

2) Sau bước thay 0 bởi 14, ta thấy tổng các số của bảng là:

.

Dễ thấy số này chia 4 dư 2.

Trong thao tác cộng các số trong 12 ô (bất kể nằm trên hàng nào, cột nào) của bảng thì tổng các số tăng lên đúng 12 đơn vị. Suy ra số dư của tổng các số trên bảng khi chia cho 4 là bất biến trong suốt quá trình.

Để bảng có tất cả các số chia hết cho 2016 thì dễ thấy tổng của chúng phải chia hết cho 4, đây là điều không thể xảy ra.

Vậy câu trả lời là phủ định.

1. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: 

**Hướng dẫn giải bài 9**

Gọi d = (x, y), và giả sử x = dx0; y = dy0. Thay vào (1) ta có :

 (2)

Do  Từ (2) ta có :

 (3)

Từ (3) suy ra  Do  Vì thế suy ra

 Lại do 

Thay x = x0y vào (1) và có: 

Do y > 0, nên có :   (4)

Để ý rằng x0 + 2 + z > z – x0 – 2, nên từ (4) suy ra :



Từ đây suy ra x = 2t , y = t, z = 5 với t nguyên dương.

Thử lại thấy họ nghiệm này thỏa mãn (1).

1. Cho 100 số tự nhiên không lớn hơn 100 có tổng bằng 200. Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng 100.
2. Tìm chữ số hàng trăm của số .

**Hướng dẫn giả bài 11**









Vậy chữ số hàng trăm của P là 3.

1. Tìm các nghiệm nguyên dương  của phương trình 

**Hướng dẫn giải bài 12**

Phương trình đã cho tương đương với

(3x2 + 7xy) + (6xy + 14y2) = 330

⇔ x(3x + 7y) + 2y(3x + 7y) = 330 ⇔ (x + 2y)(3x + 7y) = 330 (1)

Do x, y nguyên dương nên:

(x + 2y)(3x + 6y) < (x + 2y)(3x + 7y) < (x + 2y)(4x + 8y)

⇔ 3(x + 2y)2 < 330 < 4(x + 2y)2 (2)

Từ 3(x + 2y)2 < 330 ⇒ x + 2y < ; 330 < 4(x + 2y)2 ⇒ x + 2y > 

Nên từ (2) ⇔  < x + 2y < 

Do x, y nguyên dương và ≈ 9,08 còn ≈ 10,49 nên suy ra

x + 2y = 10 (3)

Từ (1) và (3) suy ra

 Tìm được x = 4 và y = 3

1. Tìm các chữ số  để  chia hết cho 5, 7 và 9.

**Hướng dẫn giải bài 13**

- Vì các số 5, 7, 9 đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta phải tìm các chữ số  sao cho  chia hết cho 5.7.9 = 315.

Ta có  = 579000 +  = 1838.315 + 30 + 

⇒ 30 +  chia hết cho 315. Vì 30 ≤ 30 +  < 1029 nên *(Dùng máy tính tìm các bội của 315 trong khoảng (30; 1029):*

- Nếu 30 +  = 315 thì  = 315 - 30 = 285

- Nếu 30 +  = 630 thì  = 630 - 30 = 600

- Nếu 30 +  = 945 thì  = 945 - 30 = 915

Vậy ta có đáp số sau:



1. Có hay không số nguyên lẻ n lớn hơn 1 sao cho  chia hết cho n?

**Hướng dẫn giả bài 14**

Giả sử có số nguyên lẻ n lớn hơn 1 thỏa yêu cầu đã cho thì gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n, ta có p lẻ và  do đó  Theo định lý nhỏ Fermat thì 

Lại có  nên  Theo định lý Bezout suy ra có các số nguyên x, y sao cho  Do đó 

hay : vô lý do p lẻ. Vậy không có số n lẻ cần tìm.

1. Trên đường tròn ngoại tiếp đa giác lồi 2n đỉnh (n lẻ, lớn hơn 2), ta đặt tại đỉnh thứ i số . Một phép biến đổi là thay hai số tại hai đỉnh tùy ý bởi hai số mới: số mới tăng 1 đơn vị so với số cũ nếu số cũ âm và giảm 1 đơn vị so với số cũ nếu số cũ không âm.

Sau một số phép biến đổi như vậy ta có thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh của đa giác là các số bằng nhau không?

**Hướng dẫn giả bài 15**

Xét đa giác  và tại đỉnh  ta đặt số -1, tại đỉnhta đặt số 2,…, tại đỉnh thứ 2n ta đặt số 2n. Tổng tất cả các số trên đường tròn ban đầu là n (số lẻ).

Xét tính chất chẵn, lẻ của tổng 2n số trên đường tròn sau mỗi phép biến đổi thì tính chất này không đổi. Thật vậy, có ba trường hợp sau

Nếu hai số bị tác động đều là các số chẵn thì hai số này sau phép biến đổi đều là các số lẻ, do đó tính chẵn, lẻ của tổng hai số này không đổi sau phép biến đổi. Các số còn lại không đổi nên tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu hai số bị tác động đều là các số lẻ thì hai số này sau phép biến đổi đều là các số chẵn, tương tự trên, tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu hai số bị tác động có một số lẻ, một số chẵn thì hai số này sau phép biến đổi cũng là một số lẻ, một số chẵn, do đó tính chẵn, lẻ của tổng của 2n số không đổi sau phép biến đổi.

Nếu có thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh là các số bằng nhau thì tổng của 2n số này là một số chẵn. Điều này không thể xảy ra do ban đầu tổng này là số lẻ.

Vậy không thể thu được tất cả các số tại 2n đỉnh của đa giác là các số bằng nhau

1. Cho bảng hình chữ nhật kích thước . Một số ô có một số ngôi sao, giả sử mỗi cột có ít nhất một ngôi sao. Chứng minh rằng có ít nhất hai ngôi sao mà hàng chứa nó có nhiều ngôi sao hơn cột chứa nó.

**Hướng dẫn giải bài 16**

N ngôi sao được đánh số từ 1 tới N. Đặt  tương ứng là số ngôi sao ở cột và hàng chứa ngôi sao thứ i. Ta cần chứng minh  với ít nhất hai chỉ số i nào đó. Nhận xét: Nếu  thì mọi ngôi sao cùng cột với ngôi sao thứ i có  tương ứng là . Từ đó suy ra  

 Suy ra tồn tại hai chỉ số i để  hay  với hai chỉ số. đpcm.

1. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho  chia hết cho 

**Hướng dẫn giải bài 17**

Số n có thể biểu diễn thành , với  và *h* là số lẻ, lúc đó ta có



Do  là số chẵn nên A là số lẻ. Khi đó  chia hết cho  khi và chỉ khi  chia hết cho .

Mặt khác ta có . Mỗi thừa số trong ngặc ở vế phải của (\*) chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, ngoại trừ , nên ta có  chứa đúng  thừa số 2

Để bài toán được thỏa mãn thì  và chỉ việc chọn 

Khi đó n nhỏ nhất cần tìm là 

1. Cho  số nguyên dương  đôi một nguyên tố cùng nhau và một số nguyên dương . Tìm các số nguyên dương  sao cho  chia hết  với .

**Hướng dẫn giải bài 18**

Với mỗi  ta đặt . Suy ra số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:



Dễ thấy  với  và thỏa mãn  

Ta có  (Do )

Hoàn toàn tương tự ta cũng có 

Vậy



1. Với mỗi số nguyên dương n có tồn tại hay không một hoán vị  của tập  thỏa mãn: trong các số  không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho n + 1.

**Hướng dẫn giải bài 19**

+ Nếu n chẵn ta có  đồng dư với 0 modun n + 1. Vậy với n chẵn thì không tồn tại hoán vị nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Với n lẻ ta đi xây dựng một hoán vị của  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đặt , .

- Xét dãy  hay . (2)

Ta có k + 1 số lẻ  và k số chẵn  được xếp xen kẽ với nhau trong đó các chữ số lẻ xếp theo thứ tự tăng dần các số chẵn xếp theo thứ tự giảm dần, do đó dễ thấy mỗi số trong tập  xuất hiện trong dãy (2) đúng một lần.

- Tìm số dư của  khi chia cho .

Với m lẻ ta có

, 

do đó .



Với m chẵn ta có



do đó .

Vậy với n lẻ luôn tồn tại một hoán vị của  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  tồn tại một tập hợp  gồm n số tự nhiên sao cho  chia hết cho  với mọi số  phân biệt thuộc .

**Hướng dẫn giải bài 20**

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với n = 2 chọn .

Giả sử bài toán đúng đến n = k nghĩa là ta chọn được tập  thỏa mãn bài toán. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với n = k + 1.

Gọi L là bội số chung nhỏ nhất của các số khác 0 có dạng  và ab với tất cả các bộ . Xét . Suy ra Sk+1 có phần tử. Ta sẽ chứng minh nó thỏa mãn bài toán. Thật vậy:

Nếu một trong 2 số a hoặc b bằng 0 thì .

Nếu 2 số có dạng  và  thì ta có 

. Từ đó suy ra điều phải chứng minh

1. Giả sử  là một số nguyên dương thỏa mãn: Tồn tại  nguyên dương sao cho . Chứng minh rằng  là số chẵn.

**Hướng dẫn giải bài 21**

Từ giả thiết suy ra tồn tại  nguyên dương thỏa mãn  (1). Không mất tổng quát, giả sử . Từ (1) suy ra

 (2).

Vì  nên , do đó

 (3).

\*) Nếu  thì , do đó  (\*). Mặt khác, từ  và (\*) suy ra 

\*) Nếu  thì , do đó  (\*\*). Vì  nên (\*\*) suy ra . Khi đó . Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có .

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn 
2. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 2, thì .

**Hướng dẫn giải bài 23**

p lẻ, suy ra  nguyên.

  

 

 

 

Do các hệ số  đều chi hết cho p, nên A chia hết cho p, đpcm.

1. Tìm giá trị lớn nhất của , trong đó *a*, *b* là các số nguyên thoả mãn  và .

**Hướng dẫn giải bài 24**

Tìm giá trị lớn nhất của , trong đó *a*, *b* là các số nguyên thoả mãn  và .

Ta xét các n**g**hiệm nguyên dương  của phương trình:  (1) với .

Gọi  là một nghiệm như thế ()

+ Xét bộ  ta có: 

Suy ra  cũng là một nghiệm của (1)

Rõ ràng (2; 1) là một nghiệm của (1), nên ta có các bộ sau cũng là nghiệm của (1):



+ Xét bộ  ta có: 

Suy ra  cũng là một nghiệm của (1).

- Nếu  (vô lí)

- Nếu  thì bộ là một nghiệm của (1) nhỏ hơn nghiệm .

Quá trình phải dừng lại và kết thúc ở nghiệm . Chú ý thêm rằng (2; 1) là bộ duy nhất thoả mãn (1) mà .

Tóm lại tất cả các nghiệm nguyên dương của (1) sẽ là:  với  trong đó dãy số : 

Như vậy giá trị lớn nhất của *P* bằng giá trị lớn nhất của  với 

Dãy các số hạng của dãy Fibonacci thoả mãn là: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597. Vậy giá trị lớn nhất của *P* bằng .

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  với  nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: .

**Hướng dẫn giải bài 25**

+) Áp dụng đẳng thức . Ta có :





Mặt khác

(do )

Suy ra,  nên  (do từ  ).

Trường hợp 1.  thay vào phương trình đã cho ta được:



Trường hợp 2.  thay vào phương trình đã cho ta được:

 (loại)

Trường hợp 3.  thay vào phương trình đã cho ta được:

 (với  (loại))

Trường hợp 4.  thay vào phương trình đã cho ta được :

 do  thử lại không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy các cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho với mỗi số nguyên tố  cho trước, tồn tại số nguyên  thỏa mãn: .

**Hướng dẫn giải bài 26**

+) Với  ta thây luôn thỏa mãn.

+) Xét với .

\*) với  thì  không tồn tại a và n.

\*) Với thì p lẻ. Giả sử tồn tại hai số a và n thỏa mãn. Ta có

 suy ra .

Hơn nữa .

Mặt khác với mỗi  ta có:



Do đó .

Từ (1) và (2) ta có . Do  nên . Vậy .

Mà . Khi đó  vô lý. Vậy không tồn số nguyên  thỏa mãn. Kết luận .

1. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên  không chia hết cho 2015 và thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải bài 27**

 Nếu  thì  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

 Giả sử bài toán đúng đến .

 Ta sẽ chứng minh bài toán đúng đến .

Thật vậy,

.



Ta có hai cách phân tích như sau:



hoặc là



Đặt ; 

Khi đó:  (1) hoặc  (2)

 Nếu  thì . Kết hợp với (1) suy ra  thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp .

 Nếu  thì . Kết hợp với (2) suy ra  thỏa mãn yêu cầu bài toán trong trường hợp . Vậy ta hoàn tất việc chứng minh.

1. Giả sử  là số nguyên tố có dạng . Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên  sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải bài 28**

Giả sử ngược lại, tồn tại các số nguyên tố  dạng  để phương trình đồng dư sau  có nghiệm. Gọi  là số bé nhât

Trong các số đó, và giả sử  thỏa mãn 

Ta có thể giả sử  chẵn ( có thể thay )

Xét các trường hợp  hoặc 

Trường hợp 1: Từ  ta có:  trong đó  và  lẻ

Suy ra 

Do  nên . Vậy  lẻ có dạng 

Suy ra  phải có ước nguyên tố lẻ dạng dạng 

Ta có  mâu thuẫn với cách chon 

Trường hợp 2: . Suy ra  với  không chia hết cho 3 và a nguyên dương.

Do nên 

Suy ra ,

 ,  lẻ

Do đó  nhưng  nên 

Suy ra  lẻ có dạng . Do đó tồn tại ước nguyên tố  của có dạng 

Vậy , tức là  mâu thuẫn  bé nhất

Vậy rằng không tồn tại số nguyên  sao cho  chia hết cho .

(với  là số nguyên tố có dạng )