**CHUYÊN ĐỀ PT NGHIỆM NGUYÊN – ÔN THI HSG**

1. Tìm tất cả các số nguyên  thỏa mãn phương trình



**Hướng dẫn giải**

\*) Ta thấy các cặp  thỏa mãn bài toán.

\*) Xét . Phương trình được viết lại dưới dạng



Gọi  là ước nguyên tố bất kỳ của , suy ra 

Gọi , suy ra .

- Nếu  thì . Vì  nên  suy ra  (2)

- Nếu  thì từ  suy ra  (3)

Vì  là ước nguyên tố bất kỳ của  nên từ (2), (3) suy ra với mọi ước số  của  đều có tính chất  (4)

Từ (1) suy ra  đều là ước số của . (5)

Vì  nên suy ra 

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

Từ các trường hơp trên, suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là 

1. Cho  và  với mọi số nguyên dương  Chứng minh rằng với bất kỳ số nguyên dương  tồn tại số nguyên dương  sao cho  chia hết cho 

**Hướng dẫn giải**

Giả sử là số nguyên dương thỏa mãn bài toán, ta có



Suy ra tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn 

Không mất tính tổng quát, giả sử  Từ  suy ra 

Vì  nên , khi đó 

 Nếu  thì  do đó từ  suy ra , hay . Mặt khác, ta có  nên suy ra  Khi đó ta có  từ đây suy ra  là một số chẵn.

 Nếu  thì từ  suy ra , hay . Mặt khác, ta có  nên suy ra  Khi đó ta có  suy ra  là một số chẵn.

Từ các trường hợp trên, suy ra  là một số chẵn.

Ngược lại, với  là một số chẵn, đặt  Ta thấy bộ  thỏa mãn



Vậy thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi  là một số nguyên dương chẵn.

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn 

**Hướng dẫn giải**

Đặt  thì ta thấy hệ thức truy hồi đã cho thỏa mãn với 

Xét số nguyên dương  ta chứng minh tồn tại số nguyên dương  sao cho 

Đặt  là số dư khi chia  cho  với  Ta xét các bộ gồm ba phần tử  Vì  có thể nhận  giá trị nên theo nguyên tắc Đi-rích-lê, suy ra có ít nhất hai bộ bằng nhau.

Giả sử  là số nhỏ nhất sao cho bộ  bằng bộ  với  Ta chứng minh 

Thật vậy, giả sử phản chứng  Từ hệ thức truy hồi đã cho, suy ra

 và 

Vì  nên từ các đồng dư thức trên suy ra  Do đó hai bộ  và  bằng nhau, điều này trái với tính chất của  Do vậy  suy ra  chứng tỏ  hay  chia hết cho 

1. Giải phương trình sau trên tập hợp số tự nhiên: 

**Hướng dẫn giải:**

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Một trong các số  bằng 

Trong trường hợp này ta được 4 nghiệm của phương trình:

 (với m là số tự nhiên bất kì)

Trường hợp 2  đều khác 

Ta chứng minh phương trình vô nghiệm.Thật vậy:

Phương trình đã cho tương đương với:

 là số nguyên,mặt khác  là số hữu tỷ nên  là số nguyên.

Gọi  là tập nghiệm của phương trình và giả sử 

Gọi  là bộ nghiệm của phương trình thỏa mãn  nguyên nhỏ nhất.

Dễ thấy  **(**trái lại thì cũng là nghiệm của phương trình và ,trái với cách gọi bộ  **)**

Đặt  và  và .

Ta có nên 

Vậy  và với .Thay vào phương trình ta được:



Do ,không mất tính tổng quát ta có thể giả sử:

(1) và (2)

Dễ dàng chứng minh được a,b là các số lẻ (trái lại  hoặc  chia 4 dư 3,vô lý!)

Từ (2) ta có:  với  và  khác tính chẵn lẻ

Thay vào (1) ta được: 

 với  là các số tự nhiên



Vậy là nghiệm của phương trình và:  ( mâu thuẫn với cách gọi bộ! )

Do đó giả sử  là sai tức phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.

Kết luận

Phương trình có nghiệm: (với là số tự nhiên bất kì)

1. Gọi là số cách chọn các dấu cộng,trừ đặt giữa biểu thức:sao cho .Chứng minh rằng:

a)  khi 

b) Khi  ta có 

**Hướng dẫn giải**

**a)** Giả sử tồn tại một cách đặt dấu  với  để .

Khi đó  là số chẵn,vì vậy ,trái với .Vậy giả sử là sai,ta có điều cần chứng minh.

**b)** Ta chứng minh: ,thật vậy:

Chia tất cả các biểu thức thành  cặp theo dạng: với bằng  hoặc 

Nếu  thì theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 biểu thức cùng nằm trong một cặp như trên,hiệu của chúng bằng . Do đó chúng không thể cùng bằng  được (mâu thuẫn !)

1. Gọi  là số các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có  chữ số, trong đó có  chữ số  và  chữ số . Gọi  là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có  chữ số, trong đó chỉ có các chữ số  và số chữ số  bằng số chữ số . Chứng minh rằng **.**

**Hướng dẫn giải**

Hiển nhiên 

Ta cần chỉ ra rằng .

Với mỗi số có  chữ số gồm các chữ số  và số chữ số  bằng số chữ số , ta “nhân đôi” thành số có  chữ số theo quy tắc sau: đầu tiên hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có  chữ số, sau đó các chữ số  ở  chữ số đầu và các chữ số  ở  chữ số sau được đổi thành chữ số , các chữ số  ở  chữ số sau và các chữ số  ở  chữ số đầu được đổi thành chữ số 

Ví dụ: 

Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: Với mỗi số có  chữ số  và  chữ số , ta cắt  chữ số đầu và  chữ số cuối rồi cộng chúng theo cột với quy tắc:

. Ta thu được một số có n chữ số gồm các chữ số  với số chữ số  bằng số các chữ số .

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  thỏa mãn phương trình



**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta có kết quả quen thuộc sau:

**Hệ quả.** Không tồn tại các số nguyên dương  thỏa mãn điều kiện .

Trở lại bài toán, đặt , thay vào phương trình ta được: . Do đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử . Ta xét 2 trường hợp sau:

TH1. Nếu  lẻ thì  tồn tại 2 số nguyên dương  sao cho:



Từ , kết hợp với . Mâu thuẫn với hệ quả trên. Do đó trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

TH2. Nếu  chẵn, , kết hợp với phương trình đã cho ta được:



Chú ý do  chẵn và  nên  lẻ. Do đó từ phương trình (1) và kết hợp với TH1 thì (1) vô nghiệm.

Vậy trong mọi trường hợp phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương.

1. Cho  số tự nhiên không lớn hơn  có tổng bằng . Chứng minh rằng từ các số đó có thể chọn được ít nhất một bộ các số có tổng bằng .

**Hướng dẫn giải**

Nếu tất cả các số bằng nhau thì tất cả các số là . Khi đó ta lấy  số  sẽ có tổng là .

Giả sử  ta xét  số có dạng



Nếu có một số chia hết cho  thì số đó bằng  vì số đó bé hơn .

Nếu không có số nào chia hết cho  thì trong  số phải có hai số đồng dư trong phép chia cho  (vì các số dư nhận giá trị từ  đến ) suy ra hiệu của chúng chia hết cho  và hiệu hai số đó chính là tổng cần tìm

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  với  nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình .

**Hướng dẫn giải**

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  với  nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình .

Áp dụng đẳng thức . GT





Mặt khác ( do  )

 ( do từ  )

Trường hợp 1.  thay vào phương trình đã cho ta được



Trường hợp 2.  thay vào phương trình đã cho ta được

 ( loại )

Trường hợp 3.  thay vào phương trình đã cho ta được



Trường hợp 4.  thay vào phương trình đã cho ta được

 do  thử lại không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy các cặp 

1. Cho các số nguyên  với . Với mỗi cặp  ta cộng thêm  vào cả hai số và mỗi cặp đó không được xuất hiện quá lần. Tìm nhỏ nhất sao cho hữu hạn lần thực thiện thao tác trên ta được mọi số bằng nhau.

**Hướng dẫn giải**

Ta xét trường hợp các số cạnh nhau cách nhau xa nhất



Đặt  lúc đầu tiên chưa tác động thì 

Sau hữu hạn lần tác động tất cả các số bằng nhau do đó khi đó .

Ta nhận xét rằng

Tác động lên các cặp  Thì  không đổi

Tác động lên cặp  Thì  tăng lên một đơn vị

Tác động lên cặp  Thì  giảm 1 đơn vị.

Bộ bị tác động lớn hơn hoặc bằng 100.1007 lần thì . Ta sẽ chứng minh  là giá trị nhỏ nhất thoả mãn.

Tác động cặp số lần là 

Tác động cặp số lần là 

Sau các lần tác động như vậycác số bằng nhau và bằng nên số lần tác động  suy ra điều phải chứng minh.

1. Cho *n* là số nguyên lẻ và . Gọi *k* là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho  là số chính phương và là số nguyên dương nhỏ nhất sao là số chính phương. Chứng minh rằng là số nguyên tố khi và chỉ khi  và .

**Hướng dẫn giải**

Nếu  là số nguyên tố, khi đó .

 chính phương nên tồn tại  nguyên dương mà .

Do đó hoặc.

Trong cả hai trường hợp thì ta đều có .

Nếu 

Điều này không thể xảy ra vì không có số chính phương nào nằm giữa và .

Chiều ngược lại, ta sẽ chứng minh bằng phản chứng rằng không tồn tại hợp số  lẻ,  nào mà và .

Giả sử tồn tại với là các số nguyên tố. Khi đó  và ta có, suy ra . Vậy .

Gọi  là số nguyên dương nhỏ nhất lớn hơn  sao cho  chia hết cho  ( tồn tại vì  chia hết cho ).

Rõ ràng  nên , hay .

Ta viết, với  nào đó và  là tích các số nguyên tố còn lại, .

Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất số  nguyên, không âm và  sao cho



Xét số , ta có



Khi đó , rõ ràng  đều không nhỏ hơn . Mà một trong hai số  nhỏ hơn , do đó , mâu thuẫn.

Vậy  là số nguyên tố.(đpcm)

1. Cho  là các số nguyên thỏa mãn bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn . Chứng minh rằng .

( là kí hiệu phần nguyên của số thực ).

**Hướng dẫn giải**

Rõ ràng, trong các số trên không tồn tại cặp số nào mà số này chia hết cho số kia (vì nếu trái lại thì bội chung nhỏ nhất của chúng nhỏ hơn hoặc bằng ). Ta viết  với  là số lẻ. Ta thấy các giá trị  là phân biệt. Thật vậy, nếu tồn tại  thì  hoặc  mâu thuẫn với giả thiết.

Mặt khác từ 1 đến ta có  số lẻ phân biệt. Do đó các giá trị  là các số lẻ từ 1 đến  theo một thứ tự nào đó.

Xét .

Nếu  thì . Do đó  là một số lẻ nhỏ hơn , tức là  nào đó.

Như vậy . Khi đó  mâu thuẫn với giả thiết hoặc , mâu thuẫn với điều giả sử.

Vậy điều giả sử là sai, tức là ta có .

1. Ký hiệu  là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Giải phương trình



**Hướng dẫn giải**

Ta có 

pt





Vậy 

1. Cho  là các số nguyên khác thỏa mãn  là một số nguyên. Chứng minh rằng 

**Hướng dẫn giải**

Đặt  với  là các số nguyên và .

Ta có là số nguyên. Do đó ⇒ *ad+cb  b* ⇒ *ad * *b* ⇒ *d * *b*

Mặt khác  là số nguyên ⇒ *ac  bd* ⇒ *ac d* ⇒ *a d*

Vì nên *a * *b* ⇒ *b* = 1. Do 

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:



**Hướng dẫn giải**

Xem (1) là phương trình bậc hai ẩn  ta có (1) 

\* Để (1) có nghiệm  nguyên điều kiện cần là:  (  nguyên, không âm)

\* Lại xem  là phương trình bậc hai ẩn . Để có nghiệm nguyên  điều kiện cần là  là một số chính phương ( nguyên dương).

Do  và  nên ta có các trường hợp

+) TH1:  suy ra phương trình (1) có nghiệm 

+) TH2:  suy ra phương trình (1) có nghiệm 

+) TH3:  (Loại).

1. Cho  là các số nguyên dương phân biệt sao cho . Chứng minh rằng .



**Hướng dẫn giải**

1. Cho  là hai số nguyên dương lẻ sao cho  chia hết cho . Chứng minh rằng  là số chính phương.

**Hướng dẫn giải**

\* Nếu thì ta có ngay đpcm

\* Nếu : Đặt 

Khi đó và từ suy ra 

Do  (1), .

Ta có  (\*)

Phương trình (\*) có một nghiệm nguyên là nên có một nghiệm nữa là .

Ta có .

- Nếu  thì  là cặp nghiệm thỏa mãn (\*), suy ra 

Khi đó . Suy ra , mâu thuẫn.

- Nếu  thì .

Ta có 

Suy ra , mâu thuẫn.

Vậy . Khi đó  và  là số chính phương.

Do đó  là số chính phương (đpcm).

1. Tìm tất cả các số nguyên  thỏa mãn phương trình



**Hướng dẫn giải**

\*) Ta thấy các cặp  thỏa mãn bài toán.

\*) Xét . Phương trình được viết lại dưới dạng



Gọi  là ước nguyên tố bất kỳ của , suy ra 

Gọi , suy ra .

- Nếu  thì . Vì  nên  suy ra  (2)

- Nếu  thì từ  suy ra  (3)

Vì  là ước nguyên tố bất kỳ của  nên từ (2), (3) suy ra với mọi ước số  của  đều có tính chất  (4)

Từ (1) suy ra  đều là ước số của . (5)

Vì  nên suy ra 

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

- Nếu  thì , trái với (4), (5).

Từ các trường hơp trên, suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là 

1. Tìm tất cả các số nguyên dương  sao cho  không chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Nhận xét rằng khi  là số nguyên tố thì do  nên  hiển nhiên không chia hết cho , và do đó không chia hết cho .

Ta sẽ tìm  không nguyên tố thỏa  không chia hết cho .

Ta có:  . Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại ít nhất một ước số  của  sao cho bậc của  (số mũ lũy thừa của  trong phân tích thừa số nguyên tố) trong  là bé hơn bậc của  trong .

Giả sử  (với (p, k)=1). Theo lí luận trên ta có bất đẳng thức:  (\*)

Suy ra:   

 (\*\*). Suy ra:  

Ta xét 3 trường hợp và dùng các phép thử lại để làm rõ kết quả bài toán

 **TH1**: . Ta có: (\*\*) . Suy ra  hoặc  (Do  thì n trở thành số nguyên tố)

**+** Với :  ( nguyên tố).

Thử lại:  thì  (thỏa); : (\*)   (đúng)

+ Với :  ( nguyên tố)

Thử lại:  thì  (thỏa);  thì  (thỏa); :

(\*)  (sai)

 **TH2**: . Ta có (\*\*) . Suy ra  hoặc  (Do )

+ Với , ta được   .

Thử lại ta chọn:.

**+** Với , ta được   .

Thử lại ta thấy  thỏa mãn.

 **TH3**: . Ta có (\*\*) .

Suy ra  (Do )

**+** Với , ta được    (thỏa)

1. Vậy tập tất cả các giá trị của số tự nhiên  thỏa  là  với  nguyên tố. Tæng cña  nh÷ng sè nguyªn d­¬ng liªn tiÕp b»ng . X¸c ®Þnh nh÷ng sè Êy.

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tổng của  số nguyên dương liên tiếp bắt đầu từ  bằng :





Nếu  lẻ  chẳn. Khi đó:  (không xảy ra)

Nếu  chẳn  lẻ. Ta có: 

Vậy các số cần tìm là 

1. Tìm tất cả số nguyên  sao cho  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

 chia hết cho 

  chia hết cho 

 chia hết cho 

 chia hết cho .

Từ đó tìm được .

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình .

**Hướng dẫn giải**

1. Có bao nhiêu cách phân tích thành tích của 3 số nguyên dương, biêt các cách phân tích mà các nhân tử chỉ khác nhau về thứ tự thì chỉ được tính 1 lần?

**Hướng dẫn giải**

Xét phân tích với

Với mỗi , có cách chọn số , để

từ đó chọn .

Vậy số cách chọn các bộ là 10+9+.+1 = 55 cách

số cách chọn các bộ và là 55.55 cách.

Bây giờ, ta sẽ tính số các cách phân tích bị trùng nhau.

+) TH1: 3 thừa số bằng nhau:

+) TH2: 2 thừa số bằng nhau:

1. và (a; b) (3; 3).
2. Khi đó a {0; 1; 2; 3; 4}; b {0; 1; 2; 3; 4 } và (a; b) (3; 3)

→ số cặp (a; b) là 5.5 – 1 =24, và 24 cặp này cho ta 24 cách phân tích thỏa mãn yêu cầu. Tuy nhiên, mỗi cặp sẽ cho 3 lần đếm trong quá trình đếm mà ta vừa nêu ở trên. (*1 điểm*)

+) TH3: nếu cả 3 thừa số khác nhau, thì mỗi phân tích bị đếm trùng 3!=6 lần.

Vậy số cách phân tích là: cách

1. Tìm số tự nhiên P nhỏ nhất sao cho số  chia hết cho số .

**Hướng dẫn giải**

Để  chia hết cho  khi và chỉ khi  chia hết cho ,  và .

Ta xác định  sao cho  chia hết cho ,  và .

a) Ta có:



Để  thì 

b) Ta có 

Để  thì 

Từ 2 trường hợp a, b ta suy ra . Do đó:



c) Ta lại có



Để  thì



Vậy 

 nhỏ nhất khi và chỉ khi . Vậy số cần tìm là .

1. Tồn tại hay không hai số nguyên dương phân biệt  sao cho  chia hết cho  với mọi số nguyên dương ?

**Hướng dẫn giải**

Giả sử tồn tại hai số p, q nguyên dương phân biệt sao cho  chia hết cho  với mọi số nguyên dương , thế thì .

Giả sử  là một số nguyên tố lớn hơn  và  là số tự nhiên thỏa mãn . Khi đó

 (1)

Vì  nên. Theo định lý nhỏ Fermat, ta có



Do đó (2)

Từ (1) và (2) suy ra  (4)

Chứng minh tương tự, ta được 

Từ (1) và (3) suy ra  (5)

Từ (4) và (5) suy ra . Điều này không thể sảy ra vì 

Vậy không tồn tại hai số nguyên dương phân biệt  sao cho  chia hết cho  với mọi số nguyên dương .

1. Tìm số nguyên dương  lẻ sao cho với mọi số nguyên dương  lớn hơn  luôn tồn tại số nguyên  thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

 ,  lẻ, x lẻ .

 Với , suy ra tồn tại  nguyên dương sao cho .

+: Chọn .

+: Nhận xét: Nếu  chạy qua một HTDĐĐ modulo  thì  cũng chạy qua một HTDĐĐ đầy đủ modulo  ( nguyên dương).

Thật vậy: 

.

Do đó: Tồn tại  nguyên thỏa mãn: 

Suy ra .

**Kết luận:**  thỏa mãn .

1. Chứng minh rằng  là một số tự nhiên không chia hết cho , cho , cho  thì  sẽ là ước của một số có  chữ số dạng .

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên . từ đó theo (E) ta có . Nhưng lại vì  nên , bởi vậy .

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương , thì phần nguyên của số  là số lẻ.

**Hướng dẫn giải**

Theo công thức nhị thức Newton, ta có:





Do đó:  (1)

*Chú ý rằng:* Khi  chẵn  thì 

Khi  lẻ  thì 

Vậy từ (1) suy ra với mọi  thì  là số chẵn. (2)

Mặt khác: 

Ta có: 

Vì  là số nguyên và , nên theo định nghĩa phần nguyên ta có:



Từ (2) suy ra với mọi  thì  là số lẻ, suy ra điều phải chứng minh

1. Tính tổng , trong đó  là kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực .

**Hướng dẫn giải**

Ta có



Sử dụng định lý Hermtie: “Đối với  nguyên dương,  là số thực bất kỳ, ta có

”, ta được





.



Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta thu được .

1. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên  không chia hết cho  và thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

Đặt , ta sẽ chứng minh luôn tồn tại hai số nguyên  không chia hết cho  và thỏa mãn .

 Nếu  thì  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

 Giả sử bài toán đúng đến .

 Ta sẽ chứng minh bài toán đúng đến .

Thật vậy,

.



Ta có hai cách phân tích như sau:



hoặc là



Đặt ; 

Khi đó:  (1)

hoặc  (2)

1. Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho:

 chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Rõ ràng với  lẻ thì:

 (1)

- Thật vậy (1) đúng khi  vì lúc đó .

- Giả sử (1) đúng khi , tức:



- Xét khi . Ta có:





 (\*)

Từ (\*) và giả thiết quy nạp suy ra . Vậy (1) cúng đúng khi .

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng với mọi  lẻ. Từ đó suy ra:

 (2)

Để ý rằng . Vì thế từ (2) suy ra:

; (do ). (3)

Lại có  nên từ (3) ta có:

.

Vậy  chia hết cho 5 khi và chỉ khi số nguyên tố  có dạng .

1. Cho  là các số nguyên dương sao cho  Chứng minh rằng nếu  và  có các ước nguyên tố giống nhau, thì  là một lũy thừa của .

**Hướng dẫn giải**

Giả sử và Vì



nên  và  có các ước nguyên tố giống nhau. Đặt



thì  và  có các ước nguyên tố giống nhau.

Ta sẽ chứng minh  là một lũy thừa của 2. Thật vậy, nếu  không phải là lũy thừa của  thì  có ước nguyên tố lẻ là  Do  và  nên  và  có các ước nguyên tố giống nhau. Gọi  là một ước nguyên tố của  thì do  nên



Do đó,  chỉ có ước nguyên tố là  suy ra



Vì  nên  Từ  suy ra  Khi ấy



Điều mâu thuẫn này chứng tỏ  là một lũy thừa của 

Bây giờ nếu  là một ước nguyên tố bất kì của  thì  cũng là ước của  Do đó, Thành thử, là một lũy thừa của  hay  cũng vậy. Do  là số chẵn nên  suy ra các ước nguyên tố của  cũng là các ước nguyên tố của  Nếu  có ước nguyên tố lẻ là  thì do  nên  suy ra  là số chẵn. Nhưng là số lẻ  nên  suy ra  Vô lí vì  Vậy  phải là lũy thừa của 

1. Cho số nguyên . Tìm số lớn nhất các cặp gồm 2 phần tử phân biệt của tập sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá .

**Hướng dẫn giải**

Giả sử có  cặp thỏa mãn đề bài. Gọi  là tổng của  cặp đó, thì

 

Dễ thấy . Do đó,



Bây giờ ta xây dựng  cặp thỏa mãn đề bài như sau

Trường hợp 1: Số  có dạng  hoặc . Khi ấy, . Ta xét các cặp sau



Rõ ràng dãy trên có  cặp thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Số  có dạng  hoặc  hoặc . Khi ấy, . Ta xét các cặp sau



Dãy trên có  thỏa mãn đề bài

Vậy số lớn nhất các cặp thỏa mãn đề bài là 

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  sao cho  là số nguyên và là ước của 2415.

**Hướng dẫn giải**

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Cho số nguyên tố  . Nếu ,  là các số nguyên sao cho  chia hết cho  thì  và chia hết cho .

Thật vậy: Nếu chia hết cho  thì cũng có chia hết cho . Giả sử không chia hết cho  khi đó  không chia hết cho . Theo định lý Fermat ta có: , suy ra , tương tự cũng có .

Từ giả thiết: 



 (mâu thuẫn giả thiết). (Bổ đề đã được chứng minh).

Áp dụng bổ đề vào bài toán, giả sử tồn tại số các số nguyên dương ,  sao cho ,  là số nguyên và là ước của 2415. Đặt  thì  với  là ước của .

i) Nếu  thì , (  không chia hết cho 3). Suy ra  và  . Ta lại được , nhưng không có các số nguyên dương ,  thỏa mãn  vì .

ii) Tương tự như trên khi xét trường hợp  chia hết cho 7 và trường hợp  chia hết cho 23.

iii) Nếu , ta thấy:, tìm được  hoặc .

Vậy tất cả các cặp số nguyên dương  cần tìm có dạng  trong đó 

1. Cho  là các số nguyên. Giả sử rằng với mỗi  trong ba số  có ít nhất một số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên  sao cho  là lẻ với ít nhất  giá trị của .

**Hướng dẫn giải**

Ta xét các số trên theo . Ta thấy có 7 cách chọn bộ  với  không đồng thời bằng 0 ( đồng dư với  theo ).

Với mỗi bộ  thỏa mãn đề bài có đúng 4 trong 7 bộ sao cho 

Suy ra với mỗi bộ  đã cho nếu ta chọn ngẫu nhiên  thì giá trị kì vọng của các biểu thức lẻ là .

Nhưng đây là giá trị trung bình nên phải tồn tại bộ  với ít nhất  giá trị của  sao cho tổng  là số lẻ.

1. Giả sử phương trình  (với  là các số nguyên) có 3 nghiệm nguyên  Chứng minh rằng  chia hết cho .

**Hướng dẫn giải**

Phương trình đã cho tương đương 

Đặt 

Từ giả thiết  là nghiệm nguyên của PT(1), áp dụng định lí Fecma ta có  hay 

Từ  hay 

Nếu  thì ta có ngay đpcm.

Giả sử trái lại, trong các hiệu  không có hiệu nào chia hết cho 2017.

Ta có  (do (2))

 (3)

Tương tự, ta có  (4)

Từ (3) và (4), ta có . Khi đó từ (4) ta có 

Vì  và  nên suy ra . Do đó  và ta có đpcm.

1. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất để  chia hết cho  với  ( là phần nguyên của số ).

**Hướng dẫn giải**

Với  không chi hết cho .

Với  không chi hết cho .

Như vậy, số nguyên tố nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài chỉ có thể là 5.

Với . Xét 

Do đó  là nghiệm của phương trình bậc hai 

Đặt , ta có:



Do đó  là nghiệm của phương trình sai phân cấp hai: 

Vì 

Ta có  chia hết cho . Giả sử  chia hết cho  và  chia hết cho . Khi đó  hay  chia hết cho .

1. Cho số nguyên dương  thỏa mãn  chia hết cho . Chứng minh rằng  là số chẵn.

**Hướng dẫn giải**

Gọi  là ước nguyên tố bé nhất của . Ta có  (vì nếu  thì  vô lí). Do  nên  hay .

Gọi  là số nguyên dương bé nhất sao cho . Xét khai triển sau:  với . Ta có  . Suy ra . Do đó .

Do  là số nguyên tố, nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có . Lập luận tương tự như trên suy ra .

Có hai khả năng xảy ra:

a) : Gọi  là ước nguyên tố của . Vì  nên   . Điều này mâu thuẫn với cách chọn  là ước số nguyên tố bé nhất của . Do vậy khả năng này không xảy ra.

b) : Từ . Do  là ước nguyên tố của , suy ra  chẵn (đpcm).