CÁC BÀI TẬP KHÁC

II / Dùng biến đổi tương đương

1) Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng : $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2} \geq 8$

Giải :

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$(x-y)^4+4(x-y)^2+4 \geq 8.(x-y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2 \geq 0$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh

2) Cho xy ≥ 1 .Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy}$

Giải :

Ta có $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+y^2}\right)+\left(\dfrac{1}{1+y^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\dfrac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\dfrac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)} \geq 0$

BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có điều phải chứng minh

III / Dùng bất đẳng thức phụ

1) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

Giải :

áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2 \le (1+1+1).(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \le 3.(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

2) Cho a,b,c là các số dương

Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ (1)

Giải :

(1) $\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1 \ge 9 \Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \ge 9$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ (đpcm)

IV/ Dùng phương pháp bắc cầu

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chứng minh rằng :

$2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$

Giải :

Do a <1 $\Rightarrow$ a^2<1 và b <1 Nên $(1-a^2).(1-b^2) > 0 \Rightarrow 1+a^2b-a^2-b > 0$

Hay $1+a^2b > a^2+b$ (1)

Mặt khác 0 <a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2 > a^3$; $b > b^3$ $\Rightarrow$ $1+a^2 > a^3+b^3$

Vậy $a^3+b^3 < 1+a^2b$

Tương tự ta có : $b^3+c^3 < 1+b^2c$

$a^3+c^3 < 1+c^2a$

$\Rightarrow 2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$ (đpcm)

2) So sánh 31^{11} và 17^{14}

Giải :

Ta thấy $31^{11} < 32^{11} = \left(2^5\right)^{11} = 2^{55} < 2^{56}$

Mặt khác $2^{56} = 2^{4.14} = \left(2^4\right)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$

Vậy $31^{11} < 17^{14}$ (đpcm)

V/ <u>Dùng tính chất tỉ số</u>

<u>ví dụ 4:</u> Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ, chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

<u>Giải:</u> Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

ta có $ac + bd \le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mà $(a+c)^2 + (b+d)^2 = a^2 + b^2 + 2(ac+bd) + c^2 + d^2$

$\le \left(a^2+b^2\right) + 2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2} + c^2 + d^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$