PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

PHƯƠNG PHÁP 4: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình mà hai vế là những đa thức có tính biến thiên khác nhau.*

- Áp dụng các bất đẳng thức thường gặp:

*Bất đẳng thức Cô – si:

Cho n số không âm: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$. Khi đó:

$\frac{a_1+a_2+a_3+......+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.......a_n}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=......=a_n$

* Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

Cho 2n số thực: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$ và $b_1;b_2;b_3;......;b_n$. Khi đó:

$$\left(a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+....+a_n.b_n\right)^2 \leq \left(a_1.+a_2.+a_3+....+a_n\right)\left(b_1+b_2.+b_3+....+b_n\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_i = kb_i\left(i=\overline{1;n}\right)$.

*Bất đẳng thứcgiá trị tuyết đối:

$$|a|+|b|=\left[\begin{array}{l}|a+b| \Leftrightarrow a.b \geq 0\\ |a-b| \Leftrightarrow a.b<0\end{array}\right.$$

❁**Các ví dụ minh hoạ**:

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm $x;y \in Z^+$ thoả: $\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y}=3$ (1)

Áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $3=\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{x.y}{z}.\frac{y.z}{x}.\frac{z.x}{y}}=3.\sqrt[3]{x.y.z}$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x.y.z} \leq 1 \Leftrightarrow x.y.z \leq 1 \Rightarrow x=y=z=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=z=1$

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y+1)^2=3\left(x^2+y^2+1\right)$ (2)

Theo Bunhiacôpxki,ta có:

$$(x+y+1)^2 \leq \left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)=3\left(x^2+y^2+1\right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1}{1} \Rightarrow x=y=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=1$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn:

$$|x-3|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004 \quad (3)$$

- *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta nhận thấy: 2104 = 3 + 10 + 101 + 990 + 1000 =101 + 2003 và $|a|=|-a|$

Ta có:(3)$\Rightarrow |3-x|+|10-x|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004$.

Mà $|a|\ge a \Rightarrow \begin{cases} |3-x|\ge 3-x \\ |10-x|\ge 10-x \\ |x+101|\ge x+101 \\ |x+990|\ge x+990 \\ |x+1000|\ge x+1000 \end{cases} \Rightarrow 2004 \ge |x+101|+2003 \Rightarrow |x+101|\le 1$

Do đó: $-1\le (x+101)\le 1 \Rightarrow (x+101)\in\{-1;0;1\} \Rightarrow x\in\{-102;-101;-100\}$.

Với $x=-101 \Rightarrow 2004=2003$ (vô lí). Vậy nghiệm của phương trình là: $x\in\{-102;-100\}$

1) Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2\le 0 \quad (*) \quad \text{Mà} \quad \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2\ge 0 \qquad \forall x,y\in R$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$ Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$