NGUYỄN HỮU ĐIỀN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN HỮU ĐIỂN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc Ngô Trần ái
Tổng biên tập Vũ Dương Thụy

Biên tập nội dung:
Ngô Long Hậu
Biên tập tái bản:
Trương Công Thành
Trình bày bìa:
Tạ Trọng Trí
Chế bản:
Nguễn Hữu Điển

$\frac{51}{GD-00}$ 05/796-00 Mã số: 8H663M0

LỜI NÓI ĐẦU

Một phương pháp rất mạnh trong toán học dùng nghiên cứu và chứng minh các giả thuyết là nguyên lý quy nạp toán học. Có vô số các ví dụ trong các môn học ở chương trình phổ thông dùng nguyên lý này để diễn giải và mô tả. Nhưng để hiểu thấu đáo về kỹ thuật áp dụng trong học tập, sáng tạo rất ít sách được bàn tới. Tài liệu nước ngoài cũng đã có một số sách nói riêng về vấn đề này, theo tôi cũng chưa đầy đủ và rất nhiều người khó tiếp xúc được với tài liệu này. Tôi mạnh dạn thu thập và khảo sát nguyên lý quy nạp toán học theo mọi khía cạnh và minh họa bằng các bài tập trong chương trình phổ thông. Đây là loại sách cung cấp và thảo luận những phương pháp học tập và giải bài tập cho các bạn yêu thích toán học, các thầy cô giáo, sinh viên các trường sư phạm và các bạn ở lớp học sinh giỏi làm tài liệu tiếp tục phát triển. Chương đầu xem xét các khía cạnh của nguyên lý quy nạp toán học. Do khuôn khổ của cuốn sách chúng tôi đã không chứng minh cặn kẽ sự tương đương của nguyên lý quy nạp toán học và tiên đề thứ tự ; sự tương đương của các dạng nguyên lý quy nạp toán học..v.v. Chương hai khảo sát các khía cạnh kỹ thuật của nguyên lý này. Từ chương ba mỗi chương dùng khảo sát các bài tập về một loại chủ đề chỉ áp dụng phương pháp quy nạp toán học như: Số học, Dãy số, Hình học, Đa thức, Tổ hợp, Liên phân số ...

Tài liệu chúng tôi tham khảo có hạn và chắc còn nhiều bài tập hay chưa nói tới, hoặc có sai sót trong thể hiện ý tưởng mong bạn đọc cho ý kiến sửa đổi và bổ sung. Mọi liên hệ gửi về địa chỉ: Nhà xuất bản Giáo dục, 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Hà Nội, tháng 5 năm 2000

Tác giả

CHƯƠNG 1
NGUYÊN LÝ QUY NẠP TOÁN HỌC

1.1. Suy diễn và quy nạp

Để minh họa hai khái niệm rất hay gặp trong thực tế là suy diễn và quy nạp, ta lấy câu ca dao Việt Nam ai cũng biết:

¨Số cô có mẹ có cha
Mẹ cô đàn bà cha cô đàn ông
Số cô có vợ có chồng
Sinh con đầu lòng chẳng gái thì trai.¨

Đây là câu đoán của ông thầy bói, ta đã biết thầy bói chỉ đoán mò thôi, nhưng ông thầy bói trong câu ca dao này rất khôn là dùng một khẳng định luôn luôn đúng ¨*ai cũng có mẹ, có cha*¨. Từ đó dù áp dụng cho người đến bói cụ thể nào cũng đúng luôn, nghĩa là khẳng định riêng cũng đúng. Bước suy luận từ khẳng định chung áp dụng cho những khẳng định riêng biệt gọi là *phép suy diễn*. Phép suy diễn ở ví dụ trên là luôn đúng với hai câu đầu, nhưng có thể sai ở hai câu sau. Trong toán học rất hay dùng phép suy diễn, chẳng hạn, nếu hai góc trong của một tam giác đã cho là 30^0 và 70^0, thì điều khẳng định sau đúng: ¨ Góc thứ ba của tam giác đã cho là 80^0¨. Mệnh đề chung ở đây là: ¨Tổng các góc trong của một tam giác là 180^0¨.

Bây giờ ta đọc lại chuyện cười dân gian Việt nam:

¨Bốn ông thầy bói rủ nhau đi xem voi. Tới chỗ voi đứng, bốn thầy bói chen vào, sờ tận tay xem con voi nó thế nào. Về tới chợ, bốn thầy họp nhau bình phẩm.

Thầy sờ được cái vòi voi nói:

- Tưởng voi lạ lắm, té ra chỉ giống con đỉa cực lớn. Tôi sờ vào nó uốn cong người lại.

Thầy ôm phải cái chân, vội cãi:

- Voi chỉ hệt như cái cột nhà thôi. Tôi ôm vào vừa tay cái cột cái.

Thầy nắm phải cái tai voi, chê:

- Các bác chỉ nói mò. Con voi thật ra tựa như cái quạt to tướng.

Thầy túm phải cái đuôi voi, cười khẩy:

- Ba bác nói sai cả. Tôi đã túm nó trong tay, thì đúng là một cái chổi xể đại.

Không ai chịu ai, bốn thầy to tiếng cãi nhau ồn ào một góc chợ... ¨

Mỗi ông thầy bói đều dùng khẳng định riêng của mình để đoán, phát biểu khẳng định chung. Bước suy luận từ khẳng định riêng tiến tới phát biểu khẳng định chung được gọi là *phép quy* *nạp*. Khẳng định chung ở đây là ¨con vật đó là con voi¨. Như vậy 4 ông thầy bói đều phát biểu khẳng định chung sai. Chắc có một ông nào đó sáng mắt thì sẽ đúng. Ta thấy rằng phương pháp quy nạp có thể đưa đến kết quả nhận định sai. Phương pháp quy nạp rất hay được dùng trong nghiên cứu khoa học, nhất là toán học. Như vậy chúng ta phải hiểu phương pháp quy nạp thế nào đây và áp dụng thế nào để nhận được mệnh đề khẳng định đúng.

1.2. Nguyên lý quy nạp toán học

Để ngắn gọn ta ký hiệu một khẳng định toán học là $P(x)$, ở đây x là một biến số. Người ta thường đưa về dạng mệnh đề ¨ Với mọi x (trong một tập S nào đó), $P(x)$¨. Trong cuốn sách này ta lấy $x = n$ là những số tự nhiên[1], S là tập các số tự nhiên (bao gồm toàn bộ các số nguyên dương). Ta sử dụng một tính chất rất quan trọng của tập số tự nhiên, thường người ta công nhận như một tiên đề (được gọi là tiên đề thứ tự).

Tiên đề: *Trong mỗi tập hợp khác rỗng của những số tự nhiên có một phần tử nhỏ nhất.*

Cho mỗi số tự nhiên n ứng với một khẳng định $P(n)$. Ví dụ, với 1 ta cho tương ứng với khẳng định $P(1)$: ¨số 1 là một số lẻ¨, số 2 cho tương tứng với $P(2)$: ¨ số 2 là một số chẵn¨; ... Bằng phương pháp như vậy chúng ta tạo ra dãy khẳng định riêng $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$. Nguyên lý quy nạp toán học cho ta một phương pháp kiểm tra khẳng định $P(n)$ đúng hoặc sai với mọi n. Nguyên lý quy nạp toán học được thể hiện qua định lí sau:

[1]Trong sách này khi nói đến số tự nhiên, ta hiểu đó là số tự nhiên khác số 0.

Định lý 1.1. *Cho n_0 là một số nguyên dương và $P(n)$ là mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Nếu*

A) $P(n_0)$ là đúng và

B) Nếu $P(k)$ đúng, thì $P(k+1)$ cũng đúng với mỗi số tự nhiên $k \geq n_0$,

khi đó mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại, mệnh đề khẳng định $P(n)$ trong Định lí 1.1 không đúng với một số tự nhiên $n \geq n_0$ nào đó. Nghĩa là tồn tại một số tự nhiên $m \geq n_0$, mà $P(m)$ không đúng. Ta lấy số tự nhiên m nhỏ nhất mà $P(m)$ không đúng (điều này thực hiện được do tiên đề thứ tự). Theo điều kiện A), ta có bất đẳng thức $m > n_0$, từ đó suy ra $m - 1 \geq n_0$. Từ bất đẳng thức vừa lập và cách chọn số tự nhiên m suy ra $P(m-1)$ là đúng, nhưng nó không kéo theo được $P(m)$ đúng cho số tiếp theo $m = (m-1)+1$. Điều này trái với giả thiết B). ☺

Xuất phát từ mệnh đề khẳng định với các trường hợp riêng, chẳng hạn như các số 1, 2, hoặc 3 có thể nẩy sinh giả thiết mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên. Sau đó để chứng minh giả thiết của ta vừa xây dựng người ta lý luận theo nguyên lý quy nạp toán học. Phương pháp chứng minh như vậy gọi là *phương pháp quy nạp toán học*. Theo định lí trên phương pháp này gồm hai bước, thứ nhất ta kiểm tra khẳng định một tính chất với $n = n_0$, gọi là *Bước cơ sở*; sau đó chứng minh rằng nếu với mỗi $k \geq n_0$, $P(k)$ thoả mãn tính chất đã biết, thì suy ra $P(k+1)$ cũng có tính chất ấy, gọi là *Bước quy nạp*. Kết luận là $P(n)$ có tính chất đã cho với mọi $n \geq n_0$. Cách chứng minh theo quy nạp toán học là tránh cho ta phải kiểm tra vô hạn bước các khẳng định của mệnh đề.

1.3. Giai đoạn quy nạp và giả thiết quy nạp

Phương pháp quy nạp toán học rất hay được áp dụng trong nghiên cứu và tìm tòi trong toán học, các ngành khoa học khác. Để hiểu cách áp dụng phương pháp quy nạp cho đầy đủ, ta xem xét một số ví dụ sau đây như một phép ¨*suy luận có lý*¨ mà G. Polya đã đề cập.

Ví dụ 1.1. *Cho trước một số tự nhiên n. Hãy tìm tổng các số tự nhiên* $1, 2, \ldots, n$.

Lời giải. Ta ký hiệu S_n là tổng phải tìm, nghĩa là

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n. \tag{1.1}$$

Ta hy vọng là tìm ra công thức ngắn gọn để tính tổng trên, công thức đó giúp ta tính nhanh, gọn hơn là phải thực hiện lần lượt các phép cộng trong tổng. Ta cũng biết đây là cấp số cộng, nếu bạn đọc đã biết về cấp số này, thì ta có thể có ngay công thức tính tổng. Nhưng ở đây ta muốn minh họa quá trình áp dụng nguyên lý quy nạp toán học nên những điều đã biết về cấp số cộng ta bỏ qua, coi như chưa biết.

Ta tính tổng S_n từ đẳng thức (1.1) với một vài số tự nhiên liên tiếp, chẳng hạn bắt đầu từ 1. Những kết quả tính toán các trường hợp riêng ta xếp vào bảng

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	3	6	10	15	21

Mục đích của ta là tìm được quy luật chung (khẳng định chung), với bảng trên, mỗi số tự nhiên ở hàng trên trong bảng cho tương ứng với các số ở hàng dưới. Tìm ra quy luật của một bài toán phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố: sự khéo léo trong quan sát; sự nhạy cảm dự đoán và kiểm tra của ta; từ các kinh nghiệm đã trải qua trong tính toán các bài toán tương tự, từ khả năng liên hệ bài toán tương tự với điều kiện mới, v.v...

Trên bảng trên ta dễ thấy quy luật: Tích của hai số liên tiếp ở hàng trên bằng 2 lần số đầu tiên tương ứng ở hàng dưới. Thật vậy, 1.2=2.1, 2.3=2.3, 3.4=2.6, 4.5=2.10, 5.6=2.15. Như vậy *giai đoạn quy nạp* của chúng ta đã thành công: Tìm ra quy luật với các trường hợp riêng $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Tiếp tục một cách tự nhiên là mở rộng quy luật trên cho bảng số với các số tự nhiên bất kỳ. Ta đưa ra giả thiết thích hợp với quy luật vừa tìm được. Đặt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.2}$$

Một giả thiết ta đã làm như vậy được gọi là *giả thiết quy nạp*. Nhưng câu hỏi đặt ra là đẳng thức (1.2) có đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ hay không? Rõ ràng nếu (1.2) đúng với mọi số tự nhiên thì bằng cách thay n bằng $n+1$ chúng ta sẽ có đẳng thức

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{1.3}$$

Trái lại, giả thiết (1.2) là đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$, nếu 1) nó đúng với $n = 1$ và 2) nó đúng với mỗi số k suy ra cũng đúng với cả $k+1$. Điều này không có cách nào khác là phải áp dụng nguyên lý quy nạp toán học. Nghĩa là chúng ta phải kiểm tra những điều kiện A) và B) của định lí 1.1.

Bước cơ sở: với $n = 1$, công thức (1.2) đúng (nó còn đúng cho cả $n = 2, 3, 4, 5, 6$).

Bước quy nạp: Bây giờ chúng ta chứng minh công thức (1.2) đúng cho cả điều kiện B). Với mục đích đó ta giả thiết công thức (1.2) đúng với một số $n = k \geq 1$ nào đó và sẽ chứng minh đẳng thức (1.2) đúng với $n = k+1$. Ta biến đổi

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Kết quả là (1.2) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học công thức (1.2) đúng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ☺

Tóm lại, qua ví dụ đơn giản trên ta thấy các bước quá trình tìm tòi và chứng minh nguyên lý quy nạp toán học.

Ví dụ 1.2. *Tính tổng*

$$S_n = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1))(a+n)}$$

với $a \neq 0, -1, -2, \ldots; n = 1, 2, \ldots$

Lời giải. Việc trước tiên ta phải tìm ra công thức giả thiết quy nạp cho tổng trên. Ta tính

$$S_1 = \frac{1}{a(a+1)},$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{2}{a(a+2)},$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{3}{a(a+3)},$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{(a+3)(a+4)} = \frac{4}{a(a+4)}.$$

Chúng ta có thể đưa ra giả thiết rằng

$$S_n = \frac{n}{a(a+n)}. \tag{1.4}$$

Bước cơ sở: Như đã kiểm tra ở trên.

Bước quy nạp: Giả thiết (1.4) đúng với số tự nhiên $n = k$ nào đó. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k}{a(a+k)} + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} \\ &= \frac{1}{a+k}.\frac{k^2+(a+1)k+a}{a(a+k+1)}. \end{aligned}$$

Nhưng $k^2 + (a+1)k + a = (a+k)(k+1)$, suy ra

$$S_{k+1} = \frac{1}{a+k}.\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)}.$$

Từ kết quả vừa tính và bước cơ sở suy ra giả thiết quy nạp (1.4) là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. ☺

Ví dụ 1.3. *Tính tổng*

$$S_n = \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \cdots + \frac{2^n}{1+a^{2^n}}$$

với $n = 1, 2, \ldots; |a| \neq 1.$

Lời giải. Ta phân tích: Số lượng số hạng của tổng là $n+1$; trừ số hạng đầu tiên, còn lại các số hạng khác đều có dạng $\dfrac{2^k}{1+a^{2^k}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ta tính

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} = \frac{4}{1-a^4}, \\ S_2 &= S_1 + \frac{4}{1+a^4} = \frac{4}{1-a^4} + \frac{4}{1+a^4} = \frac{8}{1-a^8}, \\ S_3 &= S_2 + \frac{8}{1+a^8} = \frac{8}{1-a^8} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}}. \end{aligned}$$

Do $4 = 2^2, 8 = 2^3$ và $16 = 2^4$ từ các biểu thức của S_1, S_2 và S_3 có thể đưa ra giả thiết:

$$S_n = \frac{2^{n+1}}{1-a^{2^{n+1}}}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.5}$$

Bước cơ sở: Với $n = 1$, công thức (1.5) đúng như đã kiểm tra ở trên.

Bước quy nạp: Giả sử (1.5) đúng với số tự nhiên $n = k$ nào đó. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{2}{1-a^2} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \cdots + \frac{2^k}{1+a^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+a^{2^{k+1}}} \\ &= \frac{2^{k+1}}{1-a^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+a^{2^{k+1}}} = \frac{2^{k+2}}{1-a^{2^{k+2}}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức (1.5) cũng đúng với $n = k+1$. Như vậy, từ nguyên lý quy nạp toán học đẳng thức (1.5) đúng với mọi $n \geq 1$. ☺

Ví dụ 1.4. *Tính tổng của n số lẻ tự nhiên đầu tiên.*

Lời giải. Ta ký hiệu tổng phải tìm là S_n:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

Để xây dựng giả thiết quy nạp toán học ta tính tổng ở một số giá trị được liệt kê trong bảng sau:

n	1	2	3	4	5	6
S_n	1	4	9	16	25	36

Bây giờ phụ thuộc vào sự quan sát của ta và kinh nghiệm trên kết quả riêng để dự đoán mệnh đề tổng quát chung. Dễ thấy các số ở hàng S_n đều là số chính phương: $S_1 = 1^2, S_2 = 2^2, S_3 = 3^2, S_4 = 4^2$, $S_5 = 5^2, S_6 = 6^2$. Như vậy ta có thể đưa ra giả thiết chung là

$$S_n = n^2. \tag{1.6}$$

Ta sẽ chứng minh (1.6) đúng với mọi số tự nhiên n.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, tổng chỉ có một số hạng $S_n = 1$; biểu thức $n^2 = 1$ với $n = 1$, như vậy (1.6) đúng.

Bước quy nạp: Giả sử (1.6) đúng với $n = k, \quad (S_k = k^2)$. ta sẽ chứng minh (1.6) đúng với $n = k+1$: $S_{k+1} = (k+1)^2$. Thật vậy, $S_{k+1} = S_k + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$. ☺

Ta xét thêm một ví dụ nữa theo cách làm của G. Polya.

Ví dụ 1.5. *Tính tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.*

Lời giải. Ta tiến hành tìm công thức cho giả thiết quy nạp. Đặt

$$T_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Ta hãy tìm một số giá trị của tổng khi cho $n = 1, 2, \ldots, 6$.

n	1	2	3	4	5	6
T_n	1	5	14	30	55	91

Nhìn vào bảng trên ta khó có thể tìm ra quy luật chung cho T_n. Với thông tin ít ỏi như vậy không cho kết quả gì, nhưng với kinh nghiệm ta có thể liên hệ với các ví dụ đã giải và so sánh những dãy số trong ví dụ 1.1 và chìa khoá tìm ra quy luật chung trong bảng sau:

n	1	2	3	4	5	6
T_n	1	5	14	30	55	91
S_n	1	3	6	10	15	21
$\frac{T_n}{S_n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{30}{10}$	$\frac{55}{15}$	$\frac{91}{21}$

Dòng cuối cùng trong bảng ta có thể viết lại: $\frac{1}{1} = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{6} = \frac{7}{3}, \frac{30}{10} = \frac{9}{3}, \frac{55}{15} = \frac{11}{3}, \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$. Bây giờ ta có thể đưa ra giả thiết

rằng $\frac{T_n}{S_n} = \frac{2n+1}{3}$. Từ kết quả ví dụ 1.1 ta có
$T_n = \frac{2n+1}{3}.\frac{n(n+1)}{2}$ hoặc là

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.7}$$

Ta chứng minh bằng quy nạp toán học cho công thức (1.7) đúng với mọi số tự nhiên n.

Bước cơ sở: Bằng cách xây dựng trên, đẳng thức (1.7) đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử (1.7) đúng với số tự nhiên $n = k$ nào đó. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} T_{k+1} = T_k + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Như vậy bài toán đã giải xong. ☺

1.4. Hai bước của nguyên lý quy nạp toán học

Như ta đã biết nguyên lý quy nạp toán học gồm hai phần, việc kiểm tra cả hai cần được tôn trọng khi áp dụng nguyên lý. Nếu ta bỏ đi một trong hai điều kiện kiểm tra đó, thì ta sẽ nhận được những kết luận sai. Thông qua các ví dụ sau để minh họa và hiểu điều này hơn.

Ví dụ 1.6. *Chứng minh rằng mọi số tự nhiên đều bằng số tự nhiên liền sau.*

Lời giải. Ta chứng minh theo phương pháp quy nạp toán học. Giả thiết rằng mệnh đề khẳng định đúng với số tự nhiên $n = k$ nào đó, nghĩa là

$$k = (k+1). \tag{1.8}$$

Chúng ta sẽ chứng minh đẳng thức sau đúng

$$(k+1) = (k+2). \tag{1.9}$$

Thật vậy, Theo giả thiết quy nạp (1.8) cộng hai vế đẳng thức với 1, ta nhận được

$$k+1 = (k+1)+1 = k+2.$$

Như vậy, khẳng định đúng với $n = k$ thì nó đúng với $n = k+1$, do đó mệnh đề bài toán đúng với mọi n. ☺

Hệ quả của bài toán này là tất cả các số tự nhiên đều bằng nhau. Điều này thật vô lý, vậy cách chứng minh sai ở đâu? Dễ dàng thấy ngay trong chứng minh áp dụng nguyên lý quy nạp toán học nhưng bỏ qua kiểm tra trường hợp $n = 1$.

Điều kiện A) và B) trong Định lí 1.1 có một ý nghĩa đặc biệt:

Điều kiện A) tạo ra cơ sở để thực hiện quy nạp.

Điều kiện B) đưa ra nguyên tắc cho việc mở rộng tự động vô hạn trên cơ sở điều kiện A); nguyên tắc đi từ trường hợp riêng này sang trường hợp riêng khác; từ k đến $k+1$.

Ở ví dụ ▷1.6 ta không kiểm tra điều kiện A) của Định lí 1.1, nên không tạo ra *cơ sở để thực hiện quy nạp*, vì vậy không có nghĩa gì khi thực hiện kiểm tra điều kiện B) của Định lí 1.1, thực chất là không có gì để mở rộng cả. Ta xét thêm ví dụ:

Ví dụ 1.7. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n bất đẳng thức sau đúng*

$$2^n > 2n+1. \tag{1.10}$$

Lời giải. Giả thiết bất đẳng thức (1.10) đúng với $n = k$, với k là một số tự nhiên nào đó, nghĩa là ta có

$$2^k > 2k + 1. \tag{1.11}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (1.10) đúng với $n = k + 1$

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1. \tag{1.12}$$

Thật vậy, 2^k là một số không nhỏ hơn 2 với mọi số tự nhiên khác không. Ta cộng vế trái của (1.11) với 2^k và cộng vế phải của (1.11) với 2. Ta nhận được

$$2^k + 2^k > 2k + 1 + 2.$$

Nghĩa là

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1.$$

Bài toán đã giải xong. ☺

Tất nhiên ví dụ này cũng mắc sai lầm như ví dụ trước không kiểm tra *Bước cơ sở*. Thực chất của cách chứng minh trên là bất đẳng thức (1.10) đúng với $n = k + 1$, nếu nó đúng với $n = k$. Điều này không suy ra bất đẳng thức đúng với ít nhất một giá trị của n, chứ chưa nói tới với mọi số tự nhiên n.

Nhưng ta có thể thử với $n = 1$ hoặc $n = 2$ bất đẳng thức (1.10) sai. Với $n \geq 3$ bất đẳng thức (1.10) đúng. Giá trị số tự nhiên nhỏ nhất $n = 3$ bất đẳng thức (1.10) đúng (điều kiện A) với $n_0 = 3$ và lặp lại cách chứng minh ở trên từ giả thiết (1.10) đúng với $n = k$ suy ra nó đúng với $n = k + 1$ (điều kiện B). Vì vậy theo nguyên lý quy nạp toán học ta có kết luận: Bất đẳng thức (1.10) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ (chứ không phải với mọi số tự nhiên như đề bài ra).

Trong việc áp dụng phương pháp quy nạp toán học mà chỉ chứng minh điều kiện A) của Định lí 1.1 thì mới chỉ đưa ra được cơ sở để quy nạp chứ không có nguyên tắc nào để mở rộng cơ sở đó (như định lí lớn Fermat). Ta xét một số ví dụ:

Ví dụ 1.8. *Chứng minh rằng những giá trị của hàm số* $f(n) = n^2 - n + 41$ *với* $n = 0, 1, \ldots$ *là những số nguyên tố.*

Lời giải. Ta tính $f(0) = 1, f(1) = 41$, $f(2) = 43, f(3) = 47$, $f(4) = 53, f(5) = 61$, $f(6) = 71, f(7) = 83$, $f(8) = 97, f(9) = 113$. Ta có thể tính toán tiếp tục giá trị của $f(n)$ cho tới $n = 40$, tất cả giá trị này đều là số nguyên tố. Nhưng với $n = 41$ ta có $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$. Kết quả $f(41)$ không phải là số nguyên tố, nên kết luận của bài toán là không đúng. ☺

Như vậy ta thấy một mệnh đề có thể đúng với 40 trường hợp riêng, nhưng không đúng với mọi trường hợp nói chung.

Ví dụ 1.9. *Đa thức* $x^n - 1$*, với* n *là số tự nhiên dương. Đa thức này liên quan đến bài toán hình học chia đường tròn ra* n *phần bằng nhau, nên đa thức này được rất nhiều lĩnh vực toán học nghiên cứu và đề cập đến. Đặc biệt các nhà toán học quan tâm tới vấn đề phân tích đa thức này ra các thừa số là các đa thức với hệ số nguyên* ± 1*, liệu điều đó còn đúng với mọi* n*?*

Lời giải. Bằng cách khai triển các trường hợp riêng, các nhà toán học nhận thấy rằng tất cả các hệ số trong các thừa số được khai triển có giá trị tuyệt đối không quá 1. Chẳng hạn,

$$\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1,\\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1),\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1),\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1),
\end{aligned}$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1),$$
$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Những cố gắng chứng minh điều nghi ngờ đúng với mọi n của các nhà toán học không thành công. Một thời gian sau, nhà toán học Nga V. Ivanov (năm 1941) chỉ ra rằng với đa thức $x^n - 1$, điều nghi ngờ chỉ đúng với các trường hợp nhỏ hơn 105. Nhưng với $n = 105$, một thừa số của $x^{105} - 1$ là

$$x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} +$$
$$+ x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17}$$
$$+ x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 + x^5 + x^2 + x + 1.$$

Thừa số này không có tính chất của các đa thức mà các nhà toán học muốn. ☺

Ví dụ 1.10. *Chứng minh rằng với mọi số n mệnh đề sau đây đúng: "Nếu a và b là những số tự nhiên dương, mà $\max(a, b) = n$, thì $a = b$".*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với mỗi n ký hiệu A_n là mệnh đề của bài toán đã cho. Rõ ràng A_1 là đúng, vì nếu $\max(a, b) = 1$, thì hai số a và b phải trùng nhau và bằng 1 (do a và b là số tự nhiên).

Bước quy nạp: Giả sử A_k là đúng. Nếu a và b là những số tự nhiên sao cho $\max(a, b) = k + 1$. Ta xét hai số $a_1 = a - 1$ và $b_1 = b - 1$, khi đó $\max(a_1, b_1) = k$, từ đó suy ra $a_1 = b_1$, vì giả thiết A_k là đúng, do đó $a = b$, nghĩa là A_{k+1} cũng đúng. Theo nguyên lý quy nạp toán học A_n đúng với mọi số tự nhiên n.

Hệ quả: Cho a và b là hai số tự nhiên bất kỳ. Ta tính được $\max(a, b) = k$, mà k là một số tự nhiên. Theo ví dụ trên A_n đúng với mọi n, thì nó cũng đúng với A_k. Từ đó suy ra $a = b$. Nghĩa là tất cả các số tự nhiên đều bằng nhau. Thật vô lý!

Trong ví dụ trên cách chứng minh sai ở đâu? Ta xem lại toàn bộ cách chứng minh và nguyên lý quy nạp toán học. *Bước quy nạp* trong chứng minh không nhắc tới điều $k \geq 1$, khi bước quy nạp chuyển tiếp từ A_k sang A_{k+1}. Thực tế trong tính toán chứng minh không đảm bảo $k \geq 1$. ☺

1.5. Khi nào dùng phương pháp quy nạp

Phương pháp quy nạp toán học rất có tác dụng trong nghiên cứu, dự đoán kết quả và chứng minh kiểm nghiệm kết quả. Nhưng nhiều khi chính phương pháp quy nạp toán học làm việc chứng minh dài dòng, biến đổi phức tạp gây rất nhiều khó khăn trong chứng minh. Nhiều bài toán giải bằng phương pháp quy nạp có thể giải bằng một phương pháp khác. Chính G. Polya có nói: ¨Nhiều bài toán chứng minh bằng quy nạp toán học có thể chứng minh bằng cách khác, cách khác đó nằm trong chính cách chứng minh quy nạp toán học khi ta phân tích kỹ nội dung chứng minh¨.

Trong toán học người ta hay dùng ký hiệu $\sum$ là một tổng. Thường tổng có dạng $A_\alpha + A_{\alpha+1} + \cdots + A_\beta$ (α và β là những số nguyên)và được viết $\sum\limits_{k=\alpha}^{\beta} A_k$ (đọc là tổng của A_k, k chạy từ α đến β). Như vậy

$$A_\alpha + A_{\alpha+1} + \cdots + A_\beta = \sum_{k=\alpha}^{\beta} A_k$$

k gọi là *chỉ số của tổng*, còn α và β là giá trị đầu và giá trị cuối của chỉ số k. Mỗi số hạng bên trái của đẳng thức là đúng với một giá trị k ($k = \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta$). Ví dụ

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, (n \geq 1),$$

$$\sum_{k=-1}^{n+1} 10^{2k} = 10^{-2} + 10^0 + 10^2 + \cdots + 10^{2(n+1)}, (n \geq -2).$$

Phép lấy tổng có những tính chất sau: Nếu cho a và b là những số, ta có các đẳng thức

$$\sum_{k=\alpha}^{\beta} aA_k = a\sum_{k=\alpha}^{\beta} A_k,$$

$$\sum_{k=\alpha}^{\beta}(aA_k + bB_k) = a\sum_{k=\alpha}^{\beta} A_k + b\sum_{k=\alpha}^{\beta} B_k.$$

Ký hiệu tổng không phụ thuộc vào chỉ số, nhưng phụ thuộc vào giá trị ban đầu và giá trị cuối cùng

$$\sum_{k=\alpha}^{\beta} A_k = \sum_{i=\alpha}^{\beta} A_i = \sum_{i=0}^{\beta-\alpha} A_{\alpha+i}$$

Trở lại những ví dụ ở phần trước, trong quá trình tính toán quy nạp tính tổng

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Bằng cách áp dụng tính chất của ký hiệu tổng và công thức tổng các số tự nhiên $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}, (n \geq 1)$. Thật vậy, dễ thấy

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 = (n+1)^3.$$

Vế trái của đẳng thức trên có thể biến đổi

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n}k^3 = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1)$$
$$= 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1.$$

Như vậy từ các đẳng thức trên rút ra

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1),$$

Chuyển vế và tính toán ta có

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}[(n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Tính tổng sau đây (bài $\triangleright$ 1.2)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}, \quad n = 1, 2, ..; a \neq 0, -1, -2, \ldots$$

Ta sử dụng đẳng thức sau

$$\frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{1}{a+k-1} - \frac{1}{a+k}.$$

Đặt $b_k = \dfrac{1}{a+k}$, như vậy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \sum_{k=1}^{n}(b_{k-1} - b_k) = b_0 - b_n$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n} = \frac{n}{a(a+n)}.$$

Cuối cùng ta nhận được

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{n}{a(a+n)}.$$

Vấn đề của phần này ta còn đề cập tiếp ở Chương 3.

1.6. Bài tập

▷ **1.11.** Tính tổng bằng cách xây dựng giả thiết và chứng minh bằng quy nạp toán học các tổng sau:

a) $S_n = 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2$;

b) $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$;

c) $S_n = 1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!$.

▷ **1.12.** Chứng minh ít nhất bằng hai cách các công thức sau:

a) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1), \quad n = 1, 2, \ldots$

b) $1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3), n = 1, 2, \ldots$

c) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}, n = 1, 2, \ldots$

▷ **1.13.** Cho $n > 1$ là số tự nhiên. Ta đặt $x_0 = \dfrac{1}{n}; x_k = \dfrac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}), k = 1, 2, \ldots, n-1$. Hãy tính tổng $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$.

CHƯƠNG 2

KỸ THUẬT DÙNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

2.1. Một số dạng nguyên lý quy nạp toán học

Điều kiện A) trong Định lí 1.1 cho ta cơ sở mở rộng bắt đầu từ giá trị n_0. Điều kiện B) của Định lí 1.1 cho ta mệnh đề khẳng định $P(n)$ đúng với $n_0+1, n_0+2, \ldots$. Thực tế nhiều khi trong *bước quy nạp* phải đòi hỏi hai giá trị $n = k-1$ và $n = k$ của mệnh đề, để suy ra mệnh đề đúng với $n = k+1$. Trong trường hợp này *bước cơ sở* phải kiểm tra không những chỉ với n_0, mà cả với n_0+1. Tổng quát hơn ta có thể phát biểu lại định lí ở phần trước như sau:

Định lý 2.1. *Cho p là số nguyên dương và dãy các mệnh đề*

$$P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$$

nếu

A) $P(1), P(2), \ldots, P(p)$ *là những mệnh đề đúng và*

B) Với mỗi số tự nhiên $k \geq p$ *các mệnh đề* $P(k-p+1), P(k-p+2), \ldots, P(k)$ *đúng, suy ra mệnh đề P(k+1) cũng đúng,*

thì mệnh đề $P(n)$ *đúng với mọi số nguyên dương n.*

Chứng minh định lí này hoàn toàn lặp lại như định lí 1.1. Sau đây ta xét một số ví dụ sử dụng dạng định lí 2.1.

Ví dụ 2.1. *Cho* $v_0 = 2, v_1 = 3$ *và với mỗi số tự nhiên* k *có đẳng thức sau:* $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$*. Chứng minh rằng* $v_n = 2^n + 1$.

Lời giải. *Bước cơ sở* : Với $n = 0$ và $n = 1$ kết luận bài toán đúng, do điều kiện bài đã cho.

Bước quy nạp: Giả sử rằng $v_{k-1} = 2^{k-1} + 1$; $v_k = 2^k + 1$, khi đó

$$v_{k+1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học dạng định lí 2.1, suy ra $v_n = 2^n + 1$ đúng với mọi số tự nhiên n. ☺

Ví dụ 2.2. *Cho* x_1 *và* x_2 *là nghiệm của phương trình* $x^2 - 27x + 14 = 0$*; n là một số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng tổng* $S_n = x_1^n + x_2^n$ *không chia hết cho 715.*

Lời giải. Theo công thức Viet $x_1 + x_2 = 27; x_1x_2 = 14$.

Bước cơ sở: Các số $S_1 = 27$; $S_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 701$ và $S_3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = 27 \cdot 687$ đều không chia hết cho 715. Suy ra mệnh đề của bài toán đúng với $n = 1, 2, 3$.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k-2, n = k-$

$1, n = k$, ta tính

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} + x_2^{k+1} &= (x_1 + x_2)(x_1^k + x_2^k) - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - \\ &\qquad - x_1x_2(x_1^{k-2} - x_2^{k-2})] - x_1x_2(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \\ &= 715(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - 378(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}). \end{aligned}$$

Do đó $x_1^{k+1} + x_2^{k+1}$ không chia hết cho 715, vì 378 không chia hết cho 715, nói cách khác mệnh đề đúng với $n = k + 1$. ☺

Ví dụ 2.3. *Chứng minh với mọi số thực $x > 0$ và mọi số tự nhiên n bất đẳng thức sau đúng*

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geq n + 1. \tag{2.1}$$

Lời giải. 1a) Với $n = 1$ bất đẳng thức (2.1) có dạng

$$x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{2.2}$$

Bất đẳng thức (2.2) suy ra từ bất đẳng thức hiển nhiên: $(x - 1)^2 \geq 0$.

1b) Với $n = 2$ bất đẳng thức (2.1) có dạng

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 3. \tag{2.3}$$

Bất đẳng thức (2.2) đúng với mọi $x > 0$, vậy nó cũng đúng với x^2,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2.$$

Cộng hai vế của bất đẳng thức sau cùng với 1, ta nhận được (2.3).

2) Giả sử bất đẳng thức (2.1) đúng với $n = k$, mà k là một số tự nhiên nào đó

$$x^k + x^{k-2} + x^{k-4} + \cdots + \frac{1}{x^{k-4}} + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geq k + 1, \tag{2.4}$$

ta sẽ chứng minh khi đó bất đẳng thức (2.1) đúng với $n = k + 2$, hay là

$$x^{k+2} + x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq k + 3. \qquad (2.5)$$

Thật vậy, trong (2.2) thế x bởi x^{k+2}, ta nhận được

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geq 2. \qquad (2.6)$$

Cộng vế tương ứng của các bất đẳng thức (2.4) và (2.6), ta sẽ có (2.5).

Tóm lại: *Bước cơ sở*: Trong 1a) và 1b) ta đã chứng minh bất đẳng thức đúng cho $n = 1$ và $n = 2$.

Bước quy nạp: Trong 2) ta đã chứng minh từ giả thiết đúng của (2.1) với $n = k$ suy ra nó đúng với $n = k + 2$. Kết quả là

+ Từ 1a) và 2) cho ta khẳng định là bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số lẻ n.

+ Từ 1b) và 2) cho ta khẳng định là bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số chẵn n.

Như vậy, bất đẳng thức (2.1) đúng với mọi số tự nhiên n. ☺

Ví dụ 2.4. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n đẳng thức sau đúng:*

a) $\left[\frac{12}{7}.2^n\right] - \left[\frac{17}{7}.2^{n-1}\right] = 2^{n-1}$;

b) $\left[\frac{17}{7}.2^n\right] - \left[\frac{12}{7}.2^{n-2}\right] = 2^{n+1}$,

ở đây $[a]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn a.

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với $n = 1, 2, 3$ những đẳng thức trên đúng bằng cách kiểm tra trực tiếp.

Bước quy nạp: Giả thiết rằng hai đẳng thức đúng với ba số tự nhiên liên tiếp $k, k+1, k+2$. Ta sẽ chứng minh các đẳng thức trên đúng với $n = k+3$.

2a) Từ
$$\frac{12}{7}.2^{k+3} = \frac{12}{7}(1+7)2^k = 12.2^k + \frac{12}{7}.2^k;$$
$$\frac{17}{7}.2^{k+2} = \frac{17}{7}(1+7)2^{k-1} = 17.2^{k-1} + \frac{17}{7}.2^{k-1},$$
suy ra
$$\left[\frac{12}{7}.2^{k+3}\right] - \left[\frac{17}{7}.2^{k+2}\right] = 12.2^k - 17.2^{k-1} + \left[\frac{12}{7}2^k\right] - \left[\frac{17}{7}2^{k-1}\right].$$
Nhưng vì a) đúng với $n = k$
$$\left[\frac{12}{7}.2^{k+3}\right] - \left[\frac{17}{7}.2^{k+2}\right] = 12.2^k - 17.2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k+2}.$$
Vậy đẳng thức a) đúng với $n = k+3$.

2b) Từ
$$\frac{17}{7}.2^{k+3} = 17.2^k + \frac{17}{7}.2^k,$$
$$\frac{12}{7}.2^{k+1} = 12.2^{k-2} + \frac{12}{7}.2^{k-2},$$
suy ra
$$\left[\frac{17}{7}.2^{k+3}\right] - \left[\frac{12}{7}.2^{k+1}\right] = 17.2^k - 12.2^{k-2} + \left[\frac{17}{7}2^k\right] - \left[\frac{12}{7}.2^{k-2}\right].$$
Nhưng vì b) với $n = k$, ta có
$$\left[\frac{17}{7}.2^{k+3}\right] - \left[\frac{12}{7}.2^{k+1}\right] = 17.2^k - 12.2^{k-2} + 2^{k+1} = 2^{k+4}.$$
Vậy đẳng thức b) đúng với $n = k+3$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học a), b) đúng với mọi số tự nhiên n. ☺

Ví dụ 2.5. *Chứng minh rằng*
$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, \tag{2.7}$$

nếu
$$u_1 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}, u_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} (\alpha \neq \beta)$$
và với mỗi số tự nhiên $k > 2$ có đẳng thức sau:
$$u_k = (\alpha + \beta)u_{k-1} - \alpha\beta u_{k-2}.$$

Lời giải. 1) Với $n = 1$ và $n = 2$, (2.7) đúng do điều kiện đã cho.

2) Giả sử đẳng thức đúng với $n = k - 1$ và $n = k - 2$
$$u_{k-2} = \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta}, u_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$$
khi đó
$$u_k = (\alpha + \beta)\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} - \alpha\beta\frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}.$$ ☺

Một dạng nguyên lý quy nạp mạnh hơn nguyên lý quy nạp ta đã biết cũng rất được hay dùng.

Định lí 2.2 *Cho một dãy mệnh đề*
$$P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$$
Nếu

A) P(1) là khẳng định đúng, và

B) với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$, những khẳng định $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ đúng suy ra khẳng định $P(k+1)$ cũng đúng,

thì $P(n)$ đúng với tất cả số tự nhiên $n \geq 1$.

Dạng này khác với các dạng trước là giả thiết mạnh hơn ở *bước quy nạp*. Ta giả thiết tất cả khẳng định $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ đúng suy ra $P(k+1)$ cũng đúng. Dễ dàng chứng minh hai cách phát biểu định lí 1.1. và định lí 2.2 tương đương nhau. Nhưng trong thực tế áp dụng vào bài toán cụ thể dùng định lí 2.2 dễ giải hơn.

Ví dụ 2.6. *Chứng minh rằng nếu* $x + \frac{1}{x}$ *là số nguyên thì* $x^n + \frac{1}{x^n}$ *cũng là số nguyên với mọi số tự nhiên dương* n.

Lời giải. *Bước cơ sở*: Khi $n = 1$ mệnh đề hiển nhiên đúng.

Bước quy nạp: Giả sử với mọi số tự nhiên từ 1 đến k, $x^k + \frac{1}{x^k}$ là những số nguyên. Ta cần chứng minh rằng $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là số nguyên.

Thật vậy, $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}})$. Theo giả thiết cả 3 biểu thức $x + \frac{1}{x}, x^k + \frac{1}{x^k}, x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ đều biểu diễn các số nguyên. Vậy $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là một số nguyên. ☺

Ví dụ 2.7. *Chứng minh rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 có thể biểu diễn dưới dạng tích của những số nguyên tố.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Hiển nhiên mệnh đề đúng với mọi số nguyên tố, trường hợp đặc biệt $n = 2$.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên k, mà $2 \leq k < n$. Nghĩa là mọi số $2 \leq k < n$ đều biểu diễn dưới dạng tích các thừa số nguyên tố. Ta xét hai trường hợp

1) Nếu n là số nguyên tố thì mệnh đề đúng.

2) Nếu n là hợp số thì theo định nghĩa hợp số tồn tại hai số nguyên $n_1 < n$ và $n_2 < n$ sao cho $n = n_1 n_2$. Theo giả thiết quy nạp n_1 và n_2 đều biểu diễn được thành tích các số nguyên tố. Do đó suy ra n cũng biểu diễn được thành tích các số nguyên tố. ☺

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh sự biểu diễn trong bài này cho mọi số tự nhiên là duy nhất.

Ví dụ 2.8. *Chứng minh rằng mỗi cặp số nguyên $n \geq 1$ và $b > 1$ tồn tại biểu diễn dưới dạng*

$$n = c_s b^s + c_{s-1} b^{s-1} + \cdots + c_1 b + c_0, \tag{2.8}$$

ở đây $s \geq 0$ là một số nguyên, và $0 \leq c_i \leq b-1$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, s-1$ và $0 < c_s \leq b-1$.

Lời giải. Ta lấy số bất kỳ $b > 1$ và áp dụng phương pháp chứng minh quy nạp toán học.

Bước cơ sở: Với $n = 1$, ta lấy $s = 0, c_0 = 1 \leq b-1$. Ta nhận được dạng đẳng thức (2.8) dạng $1 = c_0$.

Bước quy nạp: Giả sử biểu diễn (2.8) đúng với mọi số tự nhiên k nhỏ hơn n. Theo định lí cơ bản của số học với n và b có thể tìm được số nguyên không âm n_1 và r, sao cho

$$n = bn_1 + r, \quad 0 \leq r \leq b-1.$$

Dễ thấy $n_1 < n$. thật vậy, nếu ta có $n_1 \geq n$, thì vì $b > 1, r \geq 0$ ta có $n = bn_1 + r > n$, vô lý.

Ta xét hai trường hợp

1) Nếu $n_1 = 0$, thì $n = r$, thì (2.8) tương ứng với biểu diễn với $s = 0, c_0 = r$.

2) Nếu $n_1 \geq 1$, thì $1 \leq n_1 < n$, theo giả thiết quy nạp biểu diễn (2.8) đúng với mọi số tự nhiên $k \leq n$. Nghĩa là với n_1 ta có

$$n_1 = r_t b^t + r_{t-1} b^{t-1} + \cdots + r_0$$

với một số nào đấy t và $0 \leq r_i \leq b-1 \quad (i = 0, 1, .., t), r_t > 0$. Khi đó

$$n = bn_1 + r = r_t b^{t+1} + r_{t-1} b^t + \cdots + r_0 b + r,$$

nghĩa là, biểu diễn (2.8) tương ứng với $s = t+1$, $c_s = r_t, \ldots, c_1 = r_0, c_0 = r$. ☺

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh sự biểu diễn trong bài này cho mọi số tự nhiên là duy nhất. Đây là định lí về sự biểu diễn một số tự nhiên n theo cơ số b.

Còn một số dạng khác nữa của nguyên lý quy nạp toán học chúng ta sẽ xét sau.

2.2. Mệnh đề trong nguyên lý quy nạp toán học

Trong các ví dụ trước ta thấy rằng đa số việc áp dụng nguyên lý quy nạp toán học là sự biến đổi công thức hoặc biểu thức toán học. Trong mục nhỏ này chúng tôi nhấn mạnh đến việc áp dụng nguyên lý quy nạp trên các mệnh đề không phải là công thức hoặc biểu thức toán học. Trong trường hợp như vậy các bước $P(k)$ của mệnh đề khẳng định được xác định mềm dẻo hơn thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 2.9. *Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 9.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Tổng $1^3 + 2^3 + 3^3$ chia hết cho 9. Nghĩa là mệnh đề của bài toán là đúng, khi số đầu tiên của 3 số liên tiếp là 1.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề khẳng định của bài toán đúng với k, nghĩa là $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ chia hết cho 9. Ta sẽ chứng minh rằng với ba số tự nhiên liên tiếp bắt đầu từ $(k+1)$ khẳng định của bài toán cũng đúng, nói cách khác $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ sẽ chia hết cho 9. Thật vậy,
$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$.

Tổng ba số liên tiếp bắt đầu từ $k+1$ biểu diễn như tổng của hai số hạng đều chia hết cho 9, thì tổng này cũng chia hết cho 9. ☺

Ví dụ 2.10. *Chứng minh rằng mọi số nguyên đồng (tiền Việt Nam[1]) lớn hơn 6 có thể đổi ra tiền lẻ không dư bằng những đồng tiền gồm những tờ 2 đồng và 5 đồng.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với số tiền 7 đồng, mệnh đề khẳng định đúng: 7=5+2.

Bước quy nạp: Giả sử khẳng định đúng với số $k \geq 7$ đồng. Để chứng minh điều khẳng định cũng đúng với số $k+1$ đồng. Ta xét hai khả năng:

1) k được đổi chỉ bằng một loại tiền tờ 2 đồng.

2) k được đổi bằng các loại tiền, ít nhất có một tờ loại 5 đồng.

Ta phải chứng minh $k+1$ đồng cũng đổi được bằng các loại tiền đã cho. Với số $(k+1)$ đồng thì ta đổi như sau:

- Nếu k đồng ở trường hợp 1), thì ít nhất phải có 4 tờ 2 đồng, vì $k > 6$. Để đổi $k+1$ đồng, ta lấy 2 tờ loại 2 đồng đổi thành 1 tờ loại 5 đồng.

- Nếu k đồng trong trường hợp 2), thì để đổi $k+1$ đồng, ta lấy một tờ loại 5 đồng đổi lấy 3 tờ loại 2 đồng.

Theo nguyên lý quy nạp toán học khẳng định đúng với mọi số n đồng với $n > 6$. ☺

Ví dụ 2.11. *Chứng minh rằng n đường thẳng khác nhau trên một mặt phẳng đi qua một điểm chia mặt phẳng ra $2n$ phần.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với $n = 1$ mệnh đề khẳng định là đúng, vì một đường thẳng chia mặt phẳng ra hai phần.

[1] 1 đồng ở đây ta hiểu là 1000 đồng trên thực tế.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với số n nào đó, nghĩa là n đường thẳng khác nhau đi qua một điểm chia mặt phẳng ra $2n$ phần. Để chứng minh mệnh đề khẳng định cũng đúng với $n+1$ đường thẳng, ta chú ý rằng nếu dựng đường thẳng đi qua điểm đã cho và không trùng với đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại, thì chúng ta sẽ nhận thêm 2 phần nữa của mặt phẳng. Như vậy số phần của mặt phẳng đã có là $2n$ cộng với 2, hoặc là $2(n+1)$. ☺

Ví dụ 2.12. *Trong thành phố có n nhà. Tìm số lớn nhất những hàng rào khép kín không cắt nhau có thể xây dựng được trong thành phố, nếu mỗi hàng rào vây quanh ít nhất một nhà và không có hai hàng rào nào vây quanh một cụm nhà.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Khi $n = 1$ số hàng rào cần tính là $X_1 = 1$.

Khi $n = 2$ ta có thể quây mỗi nhà một hàng rào sau đó lại dựng một hàng rào quây cả hai nhà. Như vậy số hàng rào $X_2 = 3$.

Khi $n = 3$ ta có thể quây mỗi nhà một hàng rào, sau đó quây hai nhà bất kỳ bằng một hàng rào và sau cùng là một hàng rào quây cả ba nhà. Ta có $X_3 = 5$.

Do đó giả thiết quy nạp: $X_n = 2n - 1$. Để chứng minh công thức là đúng, ta có nhận xét sau: Đối với một thành phố n nhà theo các điều kiện đầu bài, luôn xây dựng được đúng n hàng rào ¨riêng¨ của mỗi nhà và chỉ có một hàng rào ¨chung¨ cho cả thành phố.

Bước quy nạp: Giả sử công thức $X_n = 2n - 1$ đúng với mọi $n \leq k$ và ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Ta xét hệ thống hàng rào với số hàng rào lớn nhất có thể dựng được trong một thành phố có $k + 1$ nhà và thoả mãn các điều kiện của đầu bài. Theo nhận xét trong hệ thống đó luôn có 1 (và chỉ 1) hàng rào lớn quây cả thành phố. Giả sử hàng rào đó bị bỏ đi thì lúc đó thành phố được quây thành 2 khu bằng 2 hàng rào. Khu thứ nhất chẳng hạn là m nhà, khu thứ hai có l nhà: $m \geq 1; l \geq 1; m + l = k + 1$.

Hệ thống hàng rào quây khu thứ nhất cũng là lớn nhất tức là có tất cả $2m - 1$ hàng rào, và quây khu thứ hai có $2l - 1$ hàng rào (theo giả thiết quy nạp). Không thể có hàng rào nào có thể quây đồng thời những ngôi nhà từ 2 khu đang xét đó. Do đó chỉ còn lại một hàng rào duy nhất. Đó là hàng rào chung quây cả thành phố. Như vậy ta có

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= (2m - 1) + (2l - 1) + 1 = 2(m + l) - 1 \\ &= 2(k + 1) - 1. \end{aligned}$$ ☺

Ví dụ 2.13. *Từ $2n$ số $1, 2, 3, \ldots, 2n$ ta lấy ra một cách bất kỳ $n + 1$ số. Chứng minh rằng trong số các số lấy ra đó có ít nhất một số chia hết cho một số khác.*

Lời giải. (Phương pháp giải sau đây là của M. Fritman).[2] Khi $n = 1$ mệnh đề đúng là hiển nhiên.

Giả sử mệnh đề đúng với $n - 1$ nghĩa là từ $2(n - 1)$ số $1, 2, \ldots, 2(n - 1)$ (ở đây $n \geq 2$) có thể chọn ra được n số sao cho trong đó có ít nhất một số chia hết cho một số khác.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với n. Giả sử từ $2n$ số $1, 2, \ldots, 2n$ ta có thể chọn được $n + 1$ số sao cho trong đó không có số nào là bội số của số khác. Ta ký hiệu tập tất cả $n + 1$ số đó là X_{n+1}. Đối với tập X_{n+1} xảy ra 4 trường hợp.

[2] Bài này cũng có thể giải bằng phương pháp Đirichlet trong [1]

1. X_{n+1} không chứa cả $2n-1$ và $2n$,

2. X_{n+1} chứa $2n-1$ và không chứa $2n$,

3. X_{n+1} không chứa $2n-1$ và chứa $2n$,

4. X_{n+1} chứa cả $2n-1$ và $2n$.

Trường hợp 1: Ta bỏ đi từ X_{n+1} một số bất kỳ, còn lại n số mà mỗi số đều không lớn hơn $2n-2$ và trong số đó không có số nào là bội của một số khác.

Trường hợp 2: Ta bỏ từ X_{n+1} số $2n-1$, còn lại là n số mà mọi số đều không lớn hơn $2n-2$ và không có số nào là bội của một số khác.

Trường hợp 3: Ta bỏ từ X_{n+1} số $2n$, còn lại là n số mà mọi số đều không lớn hơn $2n-2$ và không có số nào là bội của một số khác.

Trường hợp 4: Trước hết ta thấy trong X_{n+1} không chứa số n do đó trong trường hợp này ta bỏ từ X_{n+1} hai số $2n-1$ và $2n$ thêm vào số n ta cũng nhận được n số mà mọi số đều không lớn hơn $2n-2$. Ta sẽ chứng minh rằng trong n số đó không có số nào chia hết cho số khác. Để chứng minh điều này ta chỉ cần chứng minh:

1) Trong số đó trừ số n không có số nào chia hết cho n và

2) Số n không chia hết cho số nào khác, ngoài n.

Điều thứ nhất là hiển nhiên vì tất cả các số đó đều không lớn hơn $2n-2$.

Điều thứ hai cũng là hiển nhiên vì trong X_{n+1} số $2n$ không chia hết cho một số nào khác.

Vậy nếu mệnh đề không đúng cho $2n$ số thì cũng đúng cho

$2(n-1)$ số. Điều này mâu thuẫn với giả thiết quy nạp. Vậy mệnh đề đã cho đúng với $2n$ số $1, 2, \ldots, 2n$ với n là số tự nhiên bất kỳ. ☺

2.3. Bước quy nạp được xây dựng trên $P(k)$

Trong chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học, khó khăn nhất là bước quy nạp chuyển từ mệnh đề $P(k)$ sang mệnh đề $P(k+1)$. Trong phần này cũng như các ví dụ ở mục sau ta xem xét kỹ các khả năng biến đổi quy nạp trực tiếp từ khẳng định đúng của $P(k)$ sang khẳng định đúng của $P(k+1)$.

Ví dụ 2.14. *Chứng minh rằng*

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n, \tag{2.9}$$

ở đây $a + b > 0, a \neq b, n > 1$.

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với $n = 2$ đẳng thức (2.9) có dạng

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2. \tag{2.10}$$

Vì $a \neq b$ ta có bất đẳng thức đúng $(a-b)^2 > 0$, cộng hai vế bất đẳng thức này với $(a+b)^2$, ta có (2.10).

Bước quy nạp: Giả sử (2.9) đúng với số $n = k$ nào đó,

$$2^{k-1}(a^k + b^k) > (a+b)^k. \tag{2.11}$$

Để chứng minh (2.9) cũng đúng cho $n = k+1$, ta nhân hai vế (2.11) với $a+b$ vì $a+b > 0$ ta nhận bất đẳng thức đúng

$$2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b) > (a+b)^{k+1}. \tag{2.12}$$

Như vậy để chứng minh (2.9) đúng với $n = k+1$ bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) > 2^{k-1}(a^k + b^k)(a+b). \tag{2.13}$$

Sau khi biến đổi và đơn giản hai vế ta được bất đẳng thức tương đương $a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + b^k a$, từ đó suy ra

$$(a^k - b^k)(a - b) > 0. \tag{2.14}$$

Xét hai trường hợp:

1) Nếu $a > b$, và điều kiện đã cho là $a > -b$, suy ra $a > |b|$. Vì vậy $a^k > b^k$. Do đó bất phương trình (2.14) đúng.

2) Nếu $a < b$, lý luận tương tự phần trên ta có $a^k < b^k$, trong trường hợp này (2.14) cũng đúng. Tóm lại, (2.14) đúng với mọi $a \neq b$, do đó (2.9) đúng với $n = k + 1$. ☺

Ví dụ 2.15. *Cho dãy số $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, và $e_i = \pm 1, i = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} e_i a_i$ nhận ít nhất C_{n+1}^2 giá trị khác nhau khi e_i thay đổi dấu trong tổ hợp 2^n khả năng xảy ra.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Khi $n = 1$, tồn tai đúng 2 giá trị khác nhau của tổng (a và $-a$) và $C_2^2 = 1$, như vậy mệnh đề đúng.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$; nghĩa là $\sum_{i=1}^{k} e_i a_i$ nhận ít nhất C_{k+1}^2 giá trị khác nhau. Giả sử thêm một phần tử a_{k+1}, mà $a_{k+1} > a_k$. Ta cần phải chỉ ra rằng tổng sẽ có C_{k+2}^2 giá trị. Theo giả thiết quy nạp đã có sẵn C_{k+1}^2 giá trị của tổng khác nhau sinh bởi $a_1, a_2, \ldots, a_k$; ta cần tìm những giá trị khác nhau của tổng, có số lượng là $C_{k+2}^2 - C_{k+1}^2 = k + 1$. Tìm các tổng đó bằng cách sau đây: Đặt $S = \sum_{i=1}^{k} a_i$ (như vậy thì $S \geq \sum_{i=1}^{k} e_i a_i$ với mọi sự lựa chọn e_i), và chú ý rằng các tổng sau $S + a_{k+1}$, $S + (a_{k+1} - a_k), S + (a_{k+1} - a_{k-1}), \ldots, S + (a_{k+1} - a_1)$ có giá trị khác nhau và lớn hơn thực sự S. Như vậy tồn tại $k+1$ giá trị khác nhau nữa của tổng đã cho. ☺

Ví dụ 2.16. *Nếu $a > 0$ và $b > 0$, thì $(n-1)a^n + b^n \geq na^{n-1}b$, với n là số nguyên dương; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.*

Lời giải. Mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$,

$$(k-1)a^k + b^k \geq ka^{k-1}b$$

Để xây dựng mệnh đề với $n = k+1$, ta tiến hành các bước

1) Nhân hai vế bất đẳng thức với a

$$(k-1)a^{k+1} + b^k a \geq ka^k b.$$

2) Cộng thêm a^{k+1} vào bất đẳng thức trên

$$ka^{k+1} + b^k a \geq ka^k b + a^{k+1}.$$

3) Chuyển $b^k a$ sang vế phải ta có

$$ka^{k+1} \geq ka^k b + a^{k+1} - b^k a.$$

4) Cộng thêm b^{k+1} vào hai vế của bất đẳng thức này

$$ka^{k+1} + b^{k+1} \geq ka^k b + a^{k+1} - b^k a + b^{k+1}.$$

Theo giả thiết quy nạp thì bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$. Để chứng minh $P(k+1)$ đúng, ta chỉ ra vế phải của bất đẳng thức sau cùng thỏa mãn

$$ka^k b + a^{k+1} - b^k a + b^{k+1} \geq (k+1)a^k b$$

và bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$. Thật vậy, ta biến đổi từ dưới lên

$$\begin{aligned} ka^k b + a^{k+1} - b^k a + b^{k+1} &\geq (k+1)a^k b, \\ -a^k b + a^{k+1} - b^k a + b^{k+1} &\geq 0, \\ a^k(a-b) + b^k(b-a) &\geq 0, \\ (a^k - b^k)(a-b) &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng (do $a - b$ và $a^k - b^k$ có cùng dấu), suy ngược lại bất đẳng thức ta cần chứng minh là đúng và đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$. ☺

Ví dụ 2.17. *Chứng minh rằng*

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}.n = (-1)^{n-1}\left[\frac{n+1}{2}\right]$$

ở đây $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn x, n là số nguyên dương.

Lời giải. Để chứng minh được bài toán, ta chứng minh công thức sau

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$$

với mọi n. Thật vậy,

a) với $n = 2m$ là số chẵn, ta có

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = [m] + \left[m + \frac{1}{2}\right] = m + m = n.$$

b) với $n = 2m + 1$ là số lẻ

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[m + \frac{1}{2}\right] + [m+1] = m + m + 1 = n.$$

Bước cơ sở: $S_1 = 1 = (-1)^0\left[\frac{1+1}{2}\right]$, mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là

$$S_k = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{k-1}.k = (-1)^{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\right].$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^k(k+1) = (-1)^{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\right] + (-1)^k(k+1) \\ &= (-1)^k\left(k+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right) = (-1)^k.\left[\frac{k+2}{2}\right]. \end{aligned}$$

Đẳng thức sau cùng suy ra từ đẳng thức ở phần trên. Đẳng thức của đề ra đúng với $n = k+1$. ☺

2.4. Bước quy nạp được xây dựng trên $P(k+1)$

Bước quy nạp trong nguyên lý quy nạp toán học cần khẳng định $P(k+1)$ suy từ $P(k)$. Nhưng nhiều khi việc biến đổi trực tiếp từ $P(k)$ sang $P(k+1)$ gặp rất nhiều khó khăn hoặc không có hướng chính xác. Khi đó ta phải làm ngược lại để biểu diễn $P(k+1)$ ra mệnh đề của $P(k)$ và tiến hành quy nạp. Phần này và phần trước liên quan mật thiết và tương đương nhau.

Ví dụ 2.18. *Chứng minh rằng số $z_n = 3^{2n+1} + 40n - 67$ chia hết cho 64 với mọi số tự nhiên n.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: $z_1 = 3^3 + 40 - 67 = 0$ chia hết cho 64. mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước quy nạp: Giả sử z_n chia hết cho 64. Khi đó

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 3^{2n+3} + 40n - 27 \\ &= 9(3^{2n+1} + 40n - 67) - 320n + 576 = 9.z_n - 64(5n-9) \end{aligned}$$

cũng chia hết cho 64. Bài toán đúng với mọi n. ☺

Ví dụ 2.19. *Ký hiệu* $R_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ *căn bậc hai n lần. Chứng minh rằng* $\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}R_{n-1}$, $\quad \sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2-R_{n-2}}$ *với mọi* $n \geq 3$.

Lời giải. *Bước cơ sở*: $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mệnh đề đúng với $n = 3$ vì

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{R_2}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{2^3} = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-R_1}}{2}.$$

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với số tự nhiên $k \geq 3$. Khi đó

$$\cos\frac{\pi}{2^{k+1}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^k}}{2}} = \frac{\sqrt{2+R_{k-1}}}{2} = \frac{R_k}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^k}}{2}} = \frac{\sqrt{2-R_{k-1}}}{2}.$$

Như vậy, mệnh đề đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học các công thức đúng với mọi $n \geq 3$. ☺

Ví dụ 2.20. *Chứng minh rằng* $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ *là số nguyên với* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Lời giải. *Bước cơ sở*: Mệnh đề đúng với $n = 0$.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$. Ta cần phải chứng minh
$$\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^4}{2} + \frac{(k+1)^3}{3} - \frac{k+1}{30}$$
là số nguyên. Ta khai triển biểu thức trên
$$\frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k+}{5} + \frac{k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} +$$
$$+ \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} - \frac{k+1}{30}.$$
Nhóm lại để xuất hiện $P(k)$
$$(\frac{k^5}{5} + \frac{k^4}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k}{30}) + ((k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) + (2k^3 + 3k^2 + 2k) + (k^2 + k) + 1)$$
Như vậy nhóm thứ nhất theo giả thiết là số nguyên và các nhóm sau cũng là số nguyên, suy ra tổng của chúng là số nguyên và đó cũng là mệnh đề bài toán với $n = k + 1$. ☺

Ví dụ 2.21. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$ và $|x| < 1$ thì bất đẳng thức sau luôn đúng:*
$$(1 - x)^n + (1 + x)^n < 2^n.$$

Lời giải. *Bước cơ sở*: Khi $n = 2$ bất đẳng thức đúng hiển nhiên.

Bước quy nạp: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$; do giả thiết đầu bài và giả thiết quy nạp ta có
$$(1-x)^{k+1} + (1+x)^{k+1} < [(1-x)^k + (1+x)^k][(1-x) + (1+x)]$$
$$< 2^k.2 = 2^{k+1}.$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh với $n = k + 1$. ☺

Ví dụ 2.22. *Với mọi x trong $0 \leq x \leq \pi$, chứng minh rằng $|\sin nx| \leq n \sin x$, ở đây n là số nguyên không âm.*

Lời giải. *Bước cơ sở*: Với $n = 1$ bất đẳng thức đúng là tất nhiên. *Bước quy nạp*: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$: $|\sin kx| \leq k\sin x$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k+1$. Ta xét

$$\begin{aligned}
|\sin(k+1)x| = |\sin(kx+x)| &= |\sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x| \\
&= |\sin(kx)\cos x| + |\cos(kx)\sin x| \\
&= |\sin(kx)||\cos x| + |\cos(kx)||\sin x| \\
&\leq |k\sin x| + |\sin x| \leq (k+1)\sin x.
\end{aligned}$$

Những bất đẳng thức trên được suy ra bởi $0 \leq x \leq \pi$ nên $\sin x \geq 0$ và $|\cos kx| \leq 1$. Như vậy ta đã chứng minh bất đẳng thức đúng cho $n = k+1$. Suy ra nó đúng với mọi $n \geq 1$. ☺

2.5. Quy nạp toán học và phép truy hồi

Nhiều bài toán ta đã xét có liên quan đến dãy số như cấp số cộng, cấp số nhân, ... mỗi số hạng của chúng được biểu diễn bằng cách lấy những giá trị của số hạng trước nó, ngoài những số hạng khởi đầu của dãy. Những công thức số hạng chung của dãy như vậy được đưa ra và coi như là định nghĩa một dãy. Phương pháp cho một dãy như vậy rất giống với nguyên lý quy nạp toán học. Ta có thể dùng quy nạp để định nghĩa một khái niệm mới. Những nhà toán học gọi nó là *loại định nghĩa quy nạp*, nhưng các nhà khoa học máy tính gọi nó là *định nghĩa hồi quy*. Để hiểu vấn đề này ta xét một ví dụ. Định nghĩa giai thừa của một số nguyên, ký hiệu là $P(n) = n!$, như sau: nếu $n = 0$ ta gán $P(n) = 1$ và nếu với mỗi $n > 0$ gán giá trị $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ nghĩa là tích

n số nguyên dương đầu tiên. Ta tính một số giá trị đầu

$$\begin{aligned}
&0! = 1,\\
&1! = 1 = 1 \cdot 0!,\\
&2! = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! = 2,\\
&3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2! = 6.
\end{aligned}$$

Như vậy với mọi số tự nhiên n, hoặc là $n = 0$ có P(n)=1; hoặc là $n > 0$ có $P(n) = n \cdot (n-1)!$. Điều này gợi ý ta định nghĩa theo quy nạp của $P(n)$ như sau:

Bước cơ sở: Nếu $n = 0$, thì $n! = 1$ và

Bước quy nạp: Nếu $n!$ đã xác định, thì ta có thể xác định $(n+1)!$ bằng $(n+1) \cdot n!$.

Bước quy nạp trong định nghĩa trên trong tin học người ta thường gọi là *Bước hồi quy* và gọi định nghĩa kiểu như trên là định nghĩa theo hồi quy. Ta thấy rằng định nghĩa hồi quy ở trên hoàn toàn như nguyên lý quy nạp toán học. Bước cơ sở cho ta giá trị tại số tự nhiên ban đầu 0. Bước hồi quy cho ta biết nếu ta đã biết định nghĩa tại n thì ta có thể định nghĩa được tại $n+1$ (bước tiếp theo). Như vậy định nghĩa đầy đủ cho mọi số tự nhiên n.

Định nghĩa xuất phát từ 0 và từng bước liên tiếp định nghĩa $P(n)$ cho những số tự nhiên càng ngày càng lớn. Nhưng để tính toán $P(n)$ ta đi ngược lại, từ mệnh đề lớn nhất đến mệnh đề nhỏ nhất. Ví dụ ta tính

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Theo định nghĩa muốn tính giá trị $P(n)$ ta kiểm tra xem nếu $n = 0$ thì áp dụng bước cơ sở của định nghĩa; ngược lại ta trừ n đi 1 để đưa bài toán về số nguyên nhỏ hơn, như vậy bước hồi quy giảm bậc của bài toán đến khi về bước cơ sở và tính toán xong hoàn toàn.

Rất nhiều ngôn ngữ lập trình cũng cho ta tính toán được công thức theo định nghĩa hồi quy, chẳng hạn như câu lệnh sau trong ngôn ngữ lập trình Pascal:

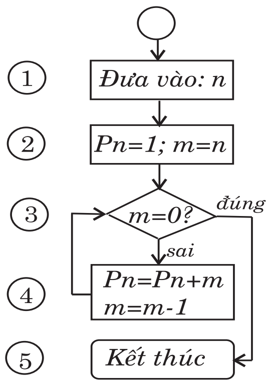
if $n = 0$ then $Pn := 1$ else $Pn := n \cdot (n-1)!$;

Dòng lệnh trên nói với chương trình biên dịch rằng:

1. Kiểm tra xem $n = 0$ có đúng không ?
2. Nếu trả lời là Đúng, thì gán $P(n) = 1$;
3. Nếu trả lời là Sai, thì gán $P(n) := n \cdot (n-1)!$;

Để tính tiếp tục máy phải gọi dòng lệnh lần nữa để tính $(n-1)!$ và cứ tiếp tục như vậy tới khi $n = 0$. Một câu lệnh không thể hiện hết việc tính toán hồi quy.

Trong toán học và tin học người ta tạo ra các thuật toán thể hiện chu trình tính toán. Có nhiều cách mô tả thuật toán như liệt kê từng bước thực hiện hoặc bằng sơ đồ khối (biểu đồ). Như chúng ta đã thấy thuật toán cũng là một công cụ mô tả việc thực hiện nguyên lý quy nạp toán học, nhất là các biểu đồ thuật toán hồi quy. Ta lấy ví dụ tìm thuật toán tính giai thừa của số tự nhiên cho trước ?



Hình 2.1:

1. Cho giá trị số tự nhiên n;
2. Đặt kết quả $Pn := 1$ và biến đếm $m := n$;

3. Kiểm tra $m = 0$? nếu đúng đi đến bước 5; nếu sai đến bước 4;
4. Tính $Pn := Pn * m$ và $m := m - 1$; đi đến bước 3;
5. Kết thúc.

Sơ đồ khối thể hiện qua hình 1.

Như vậy việc chuyển từ công thức hồi quy hoặc các mệnh đề hồi quy sang thuật toán và biểu đồ thể hiện quá trình tính toán từ nhập dữ liệu vào và lấy kết quả ra, cũng như các bước tính toán đòi hỏi ta phải hiểu thấu đáo phương pháp quy nạp toán học. Trong cuốn sách này ta sẽ đề cập đến một số bài tập về thuật toán và biểu đồ để minh hoạ.

Ta đưa vào định nghĩa hệ số Newton[3]

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (n = 0, 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2.15}$$

Dùng định nghĩa giai thừa và giản ước thừa số chung, ta nhận được

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad (n = 0, 1, \ldots; k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.16}$$

Chúng ta thiết lập *tam giác Pascal* theo nguyên tắc: Cột đầu tiên và ¨cạnh huyền¨ chỉ gồm toàn số một; số đứng ở hàng thứ n và cột k, là tổng của hai số ở hàng $n-1$, tại cột thứ $k-1$ và k.

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1
...	...	...	...	...

[3] Ký hiệu tương đương $C_n^k \equiv C_n^k$.

Ví dụ 2.23. *Chứng minh rằng những số trong bảng trên là những hệ số Newton: mỗi số đứng ở hàng thứ n và cột thứ k là C_n^k.*

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp, với $n = 0$ mệnh đề đúng.

Giả sử hàng thứ n được tạo bởi các số $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k$ và ký hiệu $\beta_{n+1,0}, \beta_{n+1,1}, \ldots, \beta_{n+1,n+1}$ là những số ở hàng thứ $n+1$. Ta sẽ chứng minh rằng $\beta_{n+1,k} = C_{n+1}^k$. Thật vậy, áp dụng nguyên tắc tạo bảng số và giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}\beta_{n+1,k} = C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}.\end{aligned}$$

Thực tế ta đã chứng minh công thức

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k. \tag{2.17}$$

Ví dụ 2.24. *Hãy viết thuật toán và vẽ sơ đồ khối tương ứng để tính hệ số Newton C_n^k khi cho $n, k (1 \leq k \leq n)$.*

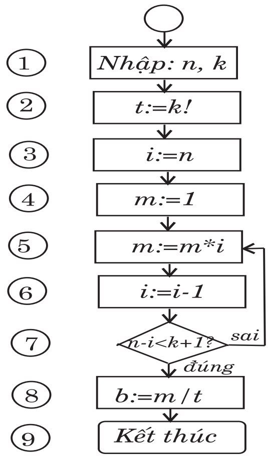
Lời giải. Hình 2 thể hiện biểu đồ của thuật toán.
1. Nhập thông số n và k;
2.Tính $t := k!$ theo thuật toán và sơ đồ đã biết;
3. Chuẩn bị tính $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, biến i nhận giá trị đầu là n;
4. Đưa vào biến m chứa giá trị của mẫu số, khởi đầu là 1;
5. Bắt đầu tính mẫu số k bước với giá trị $n(n-1)\ldots(i+1), i < n$ nhân với i và nhận giá trị $m = n(n-1)\ldots i$.
6. Giá trị của chỉ số giảm đi 1.
7. Kiểm tra chỉ số có nhỏ hơn số hạng sau cùng $n-k+1$ không

? nếu không đúng quay về bước 5; nếu đúng đi tiếp bước 8.
8. Gán biến b chứa giá trị thương của $m = n(n-1)\dots(n-k+1)$ và $t = 1, 2, \dots, k$.
9. Kết thúc: kết quả $c = C_n^k$. ☺

Trong thực tế nhiều bài toán cho dãy số

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

xác định bằng công thức hồi quy $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$ với $1 \le k \le n-1$ và f là một hàm đã biết. Cũng như định nghĩa ở trên khi cho một số số hạng ban đầu và hàm f thì các số hạng của dãy đều tính được. Dẫy số như vậy đều gọi là dãy hồi quy.



Hình 2.2:

Ví dụ 2.25. *Cho dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ được định nghĩa theo công thức sau:*

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{2.18}$$

và $a_1 = 0, a_2 = 1$. Hãy tìm a_n?

Lời giải. Ta viết lại công thức (2.18)

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n. \tag{2.19}$$

Dễ thấy rằng những số hạng mang chỉ số lẻ bằng 0. Thật vậy, đặt $n = 2k-1$, khi đó với $k = 1, 2, \dots$ ta có

$$a_{2k+1} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)} a_{2k-1}. \tag{2.20}$$

Vì $a_1 = 0$, từ (2.20) theo quy nạp suy ra $a_3 = 0, a_5 = 0, \ldots$. Khi ta đặt $n = 2k$, thì những số hạng chẵn có công thức

$$a_{2k+2} = \frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)} a_{2k}. \tag{2.21}$$

Với $k = 1, 2, 3$ từ (2.21) ta tính được

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{2}{2.3}.a_2 = \frac{1}{1.3}.1 = \frac{1}{3}, \\ a_6 &= \frac{2.2^2}{3.5}.a_4 = \frac{2.4}{3.5}.\frac{1}{3}, \\ a_8 &= \frac{2.3^2}{4.7}.a_6 = \frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ta so sánh mỗi số hạng với chỉ số và đưa ra giả thiết

$$a_{2k} = \frac{2.4.6\ldots(2k-2)}{1.3.5\ldots(2k-1)} \frac{1}{k}. \tag{2.22}$$

Từ (2.22) với $k = 2, 3, 4$ nhận được a_2, a_4 và a_8 ở trên. Giả sử (2.22) đúng với số k nào đó, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $k + 1$:

$$a_{2k+2} = \frac{2.4.6\ldots 2k}{1.3.5\ldots(2k+1)} \frac{1}{k+1}. \tag{2.23}$$

Thật vậy, do (2.21) và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= \frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)}.\frac{2.4\ldots(2k-2)}{1.3\ldots(2k-1)}.\frac{1}{k} \\ &= \frac{2.4\ldots(2k-2)2k}{1.3\ldots(2k-1)(2k+1)}.\frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Như vậy, công thức (2.22) được chứng minh. Tóm lại,

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k-1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \\ \dfrac{2.4\ldots(2k-2)}{1.3\ldots(2k-1)}.\dfrac{1}{k} & n = 2k. \end{cases}$$

Ví dụ 2.26. *Chia mặt phẳng thành bao nhiêu phần từ n đường thẳng, đôi một cắt nhau và không có ba đường thẳng nào đồng quy?*

Lời giải. Ta đặt $F(n)$ là số phần mặt phẳng do n đường thẳng tạo ra. Ta xét $n+1$ đường thẳng bất kỳ theo giả thiết bài ra. n đường thẳng đầu chia mặt phẳng ra $F(n)$ phần; còn đường thẳng thứ $n+1$, g bị cắt tại n điểm khác nhau với n đường thẳng đầu, như vậy đường thẳng g được chia ra $n+1$ phần. Suy ra đường thẳng g đi qua $n+1$ phần đã cho, mỗi phần được chia làm đôi, do đó g tạo thêm ra $n+1$ phần mới, nghĩa là

$$F(n+1) = F(n) + n + 1.$$

Thay n trong đẳng thức trên bằng $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ ta có

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1) + n, \\ F(n-1) &= F(n-2) + n - 1, \\ &\cdots\cdots \\ F(3) &= F(2) + 3, \\ F(2) &= F(1) + 2. \end{aligned}$$

Do $F(1) = 2$ và cộng các đẳng thức trên ta nhận được

$$F(n) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Hoặc là

$$F(n) = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \qquad ☺$$

Ví dụ 2.27. *(Bài toán tháp Hà nội). Cho ba chiếc cọc. Cọc thứ nhất xâu n cái đĩa có đường kính khác nhau sao cho các đĩa có đường kính lớn hơn ở dưới. Chúng ta muốn chuyển tất cả các đĩa,* *mỗi lần một chiếc, sang cọc thứ hai mà các đĩa vẫn xếp thứ tự từ lớn lên đến nhỏ. Trong thời gian chuyển qua các cọc không được đặt đĩa lớn lên đĩa nhỏ (đều này cần thiết có cọc thứ ba). Số lần ít nhất để chuyển toàn bộ đĩa trong cọc một sang cọc hai là bao nhiêu?*

Lời giải. Ký hiệu M_n là số lần nhỏ nhất chuyển xong n đĩa từ cọc một sang cọc hai. Rõ ràng $M_1 = 1$, như vậy ta giả sử $n > 1$. Để chuyển được đĩa dưới cùng sang cột hai, ta phải chuyển $n-1$ đĩa ở trên sang cột ba. Như vậy ta có số lần chuyển ít nhất là M_{n-1}. Một lần chuyển đĩa to nhất sang cột thứ hai, và lại phải thực hiện M_{n-1} lần chuyển số $n-1$ đĩa từ cột thứ ba về cột thứ hai. Như vậy,

$$M_n = 2M_{n-1} + 1, \quad M_1 = 1.$$

Dễ dàng bằng quy nạp ta chứng minh được $M_n = 2^n - 1$. Thật vậy, với $n = 1$ công thức đúng. Giả sử công thức đúng với số $n = k$, $M_k = 2^k - 1$. Ta xét $M_{k+1} = 2M_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, do đó công thức đúng với $n = k + 1$. ☺

2.6. Quy nạp toán học và tổng quát hoá

Rất nhiều bài toán dễ giải hơn ở dạng tổng quát. Nhất là chứng minh bằng phương pháp quy nạp khi dự đoán giả thiết quy nạp. Chẳng hạn như ta phải chứng minh dãy mệnh đề $P(1), P(2), \ldots$ không có đủ thông tin để thực hiện bước quy nạp. Trong trường hợp đó ta xét dãy mệnh đề tổng quát hơn $Q(1), Q(2), \ldots$ mà với mỗi n mệnh đề $Q(n)$ kéo theo $P(n)$, và sau đó ta lại áp dụng phương pháp quy nạp cho $Q(1), Q(2), Q(3), \ldots$ Trong mục này ta xét một số ví dụ như vậy:

Ví dụ 2.28. *Tính tổng*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}. \tag{2.24}$$

Lời giải. Ta nhận xét tổng trên có thể viết lại là

$$S_n(x) = 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n. \tag{2.25}$$

Tổng ta cần tính chỉ là trường hợp riêng của (2.25) $S_n(\frac{1}{2})$. Ta có thể dùng kỹ thuật tính tổng ở cuối Chương 1 để có công thức tính tổng (2.25)(bạn đọc thực hiện như một bài tập). Ta đưa ra công thức ở đây và chứng minh bằng quy nạp toán học:

$$S(x) = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}, \tag{2.26}$$

với $x \neq 1$.

Với $n = 1$ đẳng thức (2.26) có dạng $x = \dfrac{x - 2x^2 + x^3}{(1-x)^2}$ hiển nhiên đúng.

Giả sử (2.26) đúng với số tự nhiên n. Khi đó

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + (n+1)x^{n+1} \\ &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1} = \end{aligned}$$

$$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x - (n+2)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}.$$

Như vậy (2.26) đúng với $n+1$.

Áp dụng (2.26) tại giá trị $x = \frac{1}{2}$ ta có

$$S_n(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} - (n+1)\frac{1}{2^{n+1}} + n\frac{1}{2^{n+2}}}{\frac{1}{2^2}} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

☺

Ví dụ 2.29. *Chứng minh rằng nếu* $A_1 + \cdots + A_n = \pi, 0 < A_i \leq \pi, i = 1, 2, \ldots, n$, *thì*

$$\sin A_1 + \sin A_2 + \cdots + \sin A_n \leq n \sin \frac{\pi}{n}.$$

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp toán học đến bước quy nạp k, mệnh đề $P(k)$ đúng có dạng nếu $A_1 + \cdots + A_k = \pi, 0 < A_i \leq \pi, i = 1, 2, \ldots, k$, thì

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_k \leq k \sin \frac{\pi}{k}.$$

Để chứng minh mệnh đề $P(k+1)$ đúng ta cho trước $A_1 + \cdots + A_k + A_{k+1} = \pi, 0 < A_i \leq \pi, i = 1, \ldots, k+1$ phải chứng minh

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_k + \sin A_{k+1} \leq (k+1) \sin \frac{\pi}{k+1}.$$

Nếu ta dùng giả thiết quy nạp thì

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_{k-1} + \sin(A_k + A_{k+1}) \leq k \sin \frac{\pi}{k}$$

không thể suy ra được bước tiếp theo. Do việc tổng của các A_i bằng π dẫn đến hạn chế rất nhiều khi chứng minh. Bây giờ ta xét mệnh đề rộng hơn $Q(n)$:

Nếu $0 < A_i \leq \pi, i = 1, \ldots, n$, khi đó

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_n \leq n \sin \frac{A_1 + \cdots + A_n}{n}.$$

Ta thấy rằng $Q(n)$ suy ra $P(n)$. rõ ràng $Q(1)$ đúng. Giả sử $Q(k)$

đúng, và giả sử có $0 < A_i \leq \pi, i = 1, \ldots, k+1$, khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin A_1 + \cdots + \sin A_k + \sin A_{k+1} \\
&\qquad \leq k \sin(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}) + \sin A_{k+1} \\
&\qquad = (k+1)[\frac{k}{k+1} \sin(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}) + \frac{1}{k+1} \sin A_{k+1}] \\
&\qquad \leq (k+1)[\sin(\frac{k}{k+1}(\frac{A_1 + \cdots + A_k}{k}) + \frac{1}{k+1} A_{k+1})] \\
&\qquad \leq (k+1) \sin(\frac{A_1 + \cdots + A_k + A_{k+1}}{k+1}).
\end{aligned}$$

Trong biến đổi hai bất đẳng thức sau cùng cần phải chứng minh cho hai góc có đánh giá như trên có thể chứng minh được (bạn đọc hãy kiểm tra lại). Như vậy từ sự đúng đắn của mệnh đề $Q(k+1)$ suy ra $P(k+1)$ cũng đúng. ☺

Ví dụ 2.30. *Cho u_i là số hạng thứ i của dãy Fibonacci. Chứng minh rằng*

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}.$$

Lời giải. Khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$. Khi đó

$$\begin{aligned}
u_{k+2}^2 + u_{k+1}^2 &= (u_{k+1} + u_k)^2 + u_{k+1}^2 \\
&= u_{k+1}^2 + 2u_{k+1}u_k + u_k^2 + u_{k+1}^2 \\
&= (u_{k+1}^2 + u_k^2) + (2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2) \\
&= u_{2k+1} + (2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2).
\end{aligned}$$

Theo công thức dãy Fibonacci thì bước quy nạp được chứng minh hoàn toàn nếu ta chỉ ra rằng $2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2 = u_{2k+2}$. Do có công thức đó nên $u_{2k+1} + (2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2) = u_{2k+1} + u_{2k+2} = u_{2k+3}$. Bây giờ chỉ còn chứng minh $2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2 = u_{2k+2}$. Ta cũng tiến hành theo quy nạp, với $n = 1$ công thức đúng hiển nhiên, giả sử đúng với $n = k$ ta có

$$\begin{aligned}
2u_{k+2}u_{k+1} + u_{k+2}^2 &= 2(u_{k+1} + u_k)u_{k+1} + u_{k+2}^2 \\
&= 2u_{k+1}^2 + 2u_k u_{k+1} + u_{k+2}^2 \\
&= (2u_{k+1}u_k + u_{k+1}^2) + (u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2) \\
&= u_{2k+2} + (u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2).
\end{aligned}$$

Chúng ta lại vướng phải bài toán ban đầu, nếu đẳng thức sau đúng $u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = u_{2k+3}$. Nếu có vậy thì $u_{2k+2} + (u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2) = u_{2k+2} + u_{2k+3} = u_{2k+4}$ và bước quy nạp phần này hoàn toàn xong. Kết quả là nếu đúng mệnh đề thứ nhất thì đúng mệnh đề thứ hai và ngược lại. Thực ra bài toán xét hai dãy mệnh đề

$$\begin{aligned}
&P(n) : u_{n+1}^2 + u_{n+1}^2 = u_{2n+1}, \\
&Q(n) : 2u_{n+2}u_{n+1} + u_{n+2}^2 = u_{2n+2}.
\end{aligned}$$

$P(1)$ và $Q(1)$ đều đúng. Theo lý luận của phần trên thấy rằng $P(k)$ và $Q(k)$ đúng suy ra $P(k+1)$ đúng, và với $P(k+1)$ và $Q(k)$ lại suy ra $Q(k+1)$ đúng. Như vậy từ $P(k)$ và $Q(k)$ suy ra $P(k+1)$ và $Q(k+1)$ đều đúng. ☺

2.7. Bài tập

▷ **2.31.** Cho $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ là những số nguyên dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5) + (x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_n^7) \geq 2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)^2. \tag{2.27}$$

Chứng minh rằng đẳng thức chỉ xẩy ra khi và chỉ khi $x_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

▷ **2.32.** Chứng minh bất đẳng thức

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 \leq k(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2), \tag{2.28}$$

ở đây $k \geq 1$ là số tự nhiên và $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là những số thực bất kỳ.

▷ **2.33.** Cho $f(x) = (x^2 - 1)^{1/2}, x > 1$. Chứng minh rằng $f^{(n)}(x) > 0$ với n lẻ và $f^{(n)}(x) < 0$ với n chẵn.

▷ **2.34.** Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = z^n$ có nghiệm nguyên (x, y, z) với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$

CHƯƠNG 3

TÌM CÔNG THỨC TỔNG QUÁT

Phương pháp quy nạp toán học gồm hai bước như hai chương trước ta đã khảo sát. Bước cơ sở chuyển sang bước giả thiết quy nạp là rất quan trọng, nó đòi hỏi nhiều kinh nghiệm giải toán, phán đoán đúng, đưa ra khẳng định chung chính xác và có lý. Chương này ta dừng lại việc thiết lập một số cách tìm công thức tổng quát cho các mệnh đề khẳng định là dãy số. Sau khi tìm ra tổng ta có thể chứng minh bằng quy nạp toán học.

3.1. Cấp số cộng và cấp số nhân

Trong các chương trình phổ thông ta đã học cấp số cộng và cấp số nhân, ở đây ta nhắc lại hai công thức tính tổng nhưng được chứng minh bằng quy nạp.

Ví dụ 3.1. *Chứng minh đẳng thức sau:*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \tag{3.1}$$

với mọi $q \neq 1$ *và với mọi* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *(cấp số nhân).*

Lời giải. Giả thiết quy nạp có ngay trong đầu bài.

Đặt $S_n = 1 + q + \cdots + q^n$. Với $n = 0, S_0 = 1$ công thức (3.1) đúng.

Giả sử với số tự nhiên $n = k$ nào đó ta có đẳng thức

$$S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức đúng với số tự nhiên tiếp theo, nghĩa là

$$S_{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$

Thật vậy,

$$S_{k+1} = S_k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$ ☺

Ví dụ 3.2. *Cho* b *và* d *là hai số. Tìm số hạng tổng quát* a_n *của dãy, được xác định theo công thức sau (cấp số cộng):*

$$a_1 = b, a_n = a_{n-1} + d \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Lời giải. Ta cần tìm số hạng a_n theo những số đã cho b và d, cũng như chỉ số n đã cho. Ta tính một số giá trị: $a_1 = b, a_2 = a_1 + d = b + d$, $a_3 = a_2 + d = (b + d) + d = b + 2d$, $a_4 = a_3 + d = b + 3d$. Dễ dàng đưa ra giả thiết quy nạp

$$a_n = b + (n - 1).d. \tag{3.2}$$

Ta sẽ chứng minh (3.2) đúng với mọi số tự nhiên n. Thật vậy,

Bước cơ sở: Với $n = 1$, (3.2) đúng với cách tính phần trên.

Bước quy nạp: Giả sử (3.2) đúng với số tự nhiên n nào đó. Khi đó, từ (3.2) cho ta kết quả

$$a_{n+1} = a_n + d = [b + (n-1)d] + d = b + nd.$$

Như vậy (3.2) đúng với mọi số tự nhiên n. ☺

Bây giờ ta xét cấp số cộng và cấp số nhân mà công sai và công bội của chúng không là hằng số, chúng biến đổi như số hạng tổng quát của cấp số cộng hoặc cấp số nhân.

Ví dụ 3.3. *Cho một dãy số n số hạng*

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d_1, a_3 = a_2 + d_2, \ldots, a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, \qquad (3.3)$$

ở đây dãy số $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ là một cấp số cộng với công sai $d \neq 0$ (cấp số cộng-cộng) . Chứng minh rằng

$$a_k = a_1 + (k-1)d_1 + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)d, \qquad (3.4)$$

$$S_n = n(a_1 + d - d_1) + \frac{n(n-1)(2d_1 - 3d)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)d}{12}. \qquad (3.5)$$

Lời giải. Công thức trên có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp nhưng để ngắn gọn ta chỉ dùng phương pháp tính toán và biến đổi. Dãy số (3.3) gọi là cấp số cộng-cộng với số hạng thứ k, a_k, công sai thứ k, d_k và công sai d. Dễ dàng có $a_k = a_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1}$. Với dãy số là các số gia của (3.3) ta có

$$d_k = d_1 + (k-1)d,$$

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \frac{d_1 + d_k}{2}k = \frac{2d_1 + (k-1)d}{2}k.$$

Vậy

$$a_k = a_1 + (k-1)d_1 + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)d.$$

Tổng của những số hạng cấp số cộng-cộng tính được như sau:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}[(a_1 + d - d_1) + (d_1 - \frac{3}{2}d)k + \frac{d}{2}k^2]$$
$$= n(a_1 + d - d_1) + (d_1 - \frac{3}{2}d)\sum_{k=1}^{n} k + \frac{d}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

Từ đây suy ra công thức (3.5). ☺

Ví dụ 3.4. *Cho một dãy số n số hạng*

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d_1, a_3 = a_2 + d_2, \ldots, a_n = a_{n-1} + d_{n-1},$$

ở đây dãy số $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ (cấp số cộng-nhân). Chứng minh rằng

$$a_k = a_1 + \frac{d_1(q^{k-1} - 1)}{q - 1} \tag{3.6}$$

$$S_n = n(a_1 + \frac{d_1}{1 - q}) + \frac{d_1(q^n - 1)}{(q - 1)^2}. \tag{3.7}$$

Lời giải. Từ giả thiết của bài toán và công thức cho cấp số cộng và cấp số nhân ta có công thức

$$d_k = d_1 q^{k-1}, \quad d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \frac{d_1(q^k - 1)}{q - 1}.$$

Ta dễ dàng tính được

$$a_k = a_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1} = a_1 + \frac{d_1(q^{k-1} - 1)}{q - 1}.$$

Từ đẳng thức sau cùng suy ra

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}[(a_1 + \frac{d_1}{1 - q}) + \frac{d_1}{q - 1}q^{k-1}]$$
$$= n(a_1 + \frac{d_1}{1 - q}) + \frac{d_1(q^n - 1)}{(q - 1)^2}.$$

☺

Ví dụ 3.5. *Cho dãy hữu hạn n số*

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1q_1, a_3 = a_2q_2, \dots, a_n = a_{n-1}q_{n-1}, \tag{3.8}$$

ở đây dãy số $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ là cấp số cộng với công sai $d \neq 0$. Dãy số (3.8) gọi là cấp số nhân-cộng với số hạng thứ k, a_k, công bội thứ k, q_k và công sai d. Hãy lập công thức tính số hạng tổng quát của cấp số nhân-cộng và tổng những số hạng đầu của nó.

Lời giải. Vì $q_k = q_1 + (k-1)d$, thì ta có

$$a_k = a_1q_1q_2\dots q_{k-1} = a_1\prod_{l=1}^{k-1} q_l = a_1\prod_{l=1}^{k-1}[q_1 + (l-1)d]$$

$$= a_1[q_1^{k-1} + S_1^{k-2}dq_1^{k-2} + S_2^{k-2}d^2q_1^{k-3} + \dots + S_{k-3}^{k-2}d^{k-3}q_1^2 + S_{k-2}^{k-2}d^{k-2}q_1]$$

hoặc là

$$a_k = \begin{cases} a_1\sum_{l=0}^{k-2} S_l^{k-2}d^lq_1^{k-l-1}, & \text{với k=2, 3, \dots, n ;} \\ a_1 & \text{với k=1 ,} \end{cases}$$

ở đây $S_0^n = 1$ với $n = 0, 1, 2, \dots$, còn S_i^n với $0 < i \leq n$ và i nguyên, là tổng của tất cả các tích dạng $p_1p_2..p_i$, Những thừa số của mỗi tích là i số, hoàn toàn khác nhau và nhận giá trị nguyên từ 1 đến n. Nếu trong tổng S_i^n ta nhóm những số hạng không chứa số n như một số hạng, và các số hạng có chứa n như một thừa số, và sau đó ở nhóm thứ hai ta đưa n ra ngoài ngoặc, ta sẽ nhận được

$$S_i^n = S_i^{n-1} + nS_{i-1}^{n-1}. \tag{3.9}$$

Ta dùng (3.9) viết các giá trị S_i^n vào bảng tam giác mở rộng đến vô cùng như sau

t	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								...
1	1	1							...
2	1	3	2						...
3	1	6	11	6					...
4	1	10	35	50	24				...
5	1	15	85	225	274	120			...
6	1	21	175	735	1624	1764	720		...
7	1	28	322	1960	6769	13132	13068	5040	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

Bảng trên có nhiều tính chất rất hay, ví dụ đường chéo là $a_n = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, nhưng ta không nghiên cứu ở đây.

Bây giờ ta tìm công thức tổng S_n của cấp số nhân-cộng. Từ (3.9) ta có đẳng thức

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 S_0^0 q_1,$$

$$a_3 = a_1(S_0^1.q_1^2 + S_1^1.d.q_1)$$

....

$$a_k = a_1(S_0^{k-2}q_1^{k-1} + S_1^{k-2}dq_1^{k-2} + \cdots + S_{k-2}^{k-2}d^{k-2}q_1)$$

Cộng theo vế của các đẳng thức trên và sắp xếp theo số mũ tăng dần của q_1 ta nhận được

$$\begin{aligned} S_k = a_1[1 &+ q_1^1(1 + S_1^1 d^1 + S_2^2 d^2 + \cdots + S_{k-1}^{k-2} d^{k-2}) \\ &+ q_1^2(1 + S_1^2 d^1 + S_2^3 d^2 + \cdots + S_{k-3}^{k-2} d^{k-3}) + \cdots \\ &+ q_1^{k-2}(1 + S_1^{k-2} d) + q_1^{k-1}], \end{aligned}$$

hoặc là

$$S_n = a_1[1 + \sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-i-1} S_k^{i+k-1} d^k) q_1^i]. \qquad ☺$$

Ví dụ 3.6. *Cho dãy hữu hạn n số*

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 q_1, a_3 = a_2 q_2, \ldots, a_n = a_{n-1} q_{n-1}, \tag{3.10}$$

ở đây dãy số $q_1, q_2, .., q_{n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q \neq 1$. Dãy số hữu hạn trên gọi là cấp số nhân-nhân với thừa số thứ k là a_k, k-công bội là q_k và công bội q. Hãy lập công thức tính số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên của dãy cấp số nhân-nhân.

Lời giải. Ta đã biết $q_k = q_1 q^{k-1}$, khi đó

$$a_k = a_1 q_1 q_2 \ldots q_{k-1} = a_1 q_1^{k-1} q^{1+2+3+\cdots+(k-2)}$$

hay là

$$a_k = a_1 q_1^{k-1} q^{\frac{(k-2)(k-1)}{2}},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 q \sum_{k=1}^{n} q_1^{k-1} q^{\frac{k(k-3)}{2}}.$$

Những dãy số ở các bài tập trên gọi là các dãy cặp đôi. Để mở rộng hơn nữa dựa trên cơ sở của cấp số cộng và cấp số nhân người ta lại ghép thêm các cấp số cặp đôi một lần nữa, ta lấy ví dụ sau: Ta xét dãy hữu hạn từ n số

$$b_1, b_2 = b_1 + a_1, b_3 = b_2 + a_2, \ldots, b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$$

ở đây dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ là cấp số cộng-cộng với công sai d và công sai thứ k là d_k. Khi đó vì $b_k = b_1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$ và vì (3.4) ta tìm được số hạng thứ k của cấp số cặp ba

$$b_k = b_1 + (k-1)(a_1 + d - d_1) + \frac{(k-1)k(2d_1 - 3d)}{4} + \frac{(k-1)k(2k-1)d}{12}. \tag{3.11}$$

Tổng những số hạng của dãy ta tìm được

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} [(b_1 + d_1 - a_1 - d) + k(a_1 - \frac{3}{2}d_1 + \frac{11}{6}d) + k^2(\frac{d_1}{2} - d) + k^2\frac{d}{6}].$$

Ta nhận được

$$S_n = n(b_1 + d_1 - a_1 - d) + \frac{n(n+1)(6a_1 - 9d_1 + 11d)}{12} + \frac{n(n+1)(2n+1)(d_1 - 2d)}{12} + \frac{n^2(n+1)^2 d}{24}. \quad (3.12)$$

☺

Để minh họa áp dụng công thức trên ta xét bài tập:

Ví dụ 3.7. *Tìm số hạng tổng quát của dãy cấp số cặp ba sau đây*

$$2, 5, 9, 17, 32, 57, 95, \ldots \quad (3.13)$$

và tính tổng n số hạng đầu tiên.

Lời giải. Dãy tạo ra bởi những hiệu liên tiếp của dãy đã cho là

$$3, 4, 8, 15, 25, 38, \ldots$$

Tiếp tục tạo ra dãy gồm những hiệu của các phần tử là

$$1, 4, 7, 10, 13, \ldots \quad (3.14)$$

đây là cấp số cộng có số hạng đầu tiên là $d_1 = 1$ và công sai $d = 3$. Vì $b_1 = 2, a_1 = 3$, theo công thức (3.11) số hạng tổng quát cho dãy (3.13) là

$$b_n = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 14n - 6).$$

Về tổng của n số hạng đầu theo công thức (3.12) ta có

$$S_n = \frac{1}{24}n(3n^3 - 14n^2 + 57n + 2).$$

☺

Ví dụ 3.8. *Tìm công thức tính tổng*

$$S_n = 3.2 + 5.5 + 7.8 + \cdots + (2n+1)(3n-1).$$

Lời giải. Nếu chúng ta lại lặp lại cách thử mấy giá trị ban đầu và mầy mò tìm kết quả thì khá vất vả. Ta hãy nhìn kỹ vào đề bài và đặt số hạng tổng quát $a_n = (2n+1)(3n-1)$. Ta thấy rằng thừa số thứ nhất là cấp số cộng và thừa số thứ hai cũng là cấp số cộng. Câu hỏi đặt ra là dựa vào công thức đã có của cấp số cộng có tính được tổng S_n ở trên không? Bài toán có thể phải đưa về trường hợp tổng quát hơn:

Tính tổng $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là cấp số cộng có công sai d_a và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là cấp số cộng có công sai d_b. Ta có

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}[a_1 + (k-1)d_a].b_k = \sum_{k=1}^{n}[(a_1-d_a) + kd_a].b_k \\
&= (a_1 - d_a)\sum_{k=1}^{n} b_k + d_a\sum_{k=1}^{n} k.b_k \\
&= (a_1-d_a)\frac{2b_1 + (n-1)d_b}{2}n + d_a\sum_{k=1}^{n} k.[(b_1-d_b) + kd_b] \\
&= (a_1-d_a)\frac{2b_1 + (n-1)d_b}{2}n + d_a(b\sum_{k=1}^{n} k + d_ad_b\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= (a_1-d_a)(b_1-d_b)n + \frac{1}{2}[d_a(b_1-d_b) + d_b(a_1-d_a)]n(n+1) + \\
&\quad + \frac{1}{6}d_ad_bn(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

Hoặc là

$$\begin{aligned}
S_n = \frac{1}{3}d_ad_bn^3 &+ \frac{1}{2}(d_ab_1 + d_ba_1 - d_ad_b)n^2 \\
&+ \frac{1}{6}(6a_1b_1 - 3d_ba_1 - 3d_ab_1 + d_ad_b)n. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Áp dụng công thức (3.15) vào ví dụ trên với $a_1 = 3, d_a = 2$, $b_1 = 2, d_b = 3$. Ta có kết quả

$$S_n = \frac{1}{2}n(4n^2 + 7n + 1).$$

Công thức tổng quát trên đã tính được qua trực tiếp biến đổi. Với công thức này ta cũng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học (dành cho bạn đọc). Nhưng nhiều khi chứng minh bằng quy nạp toán học dẫn đến biến đổi biểu thức vô cùng phức tạp làm nản lòng chúng ta. Mỗi phương pháp chỉ mạnh với một lớp bài toán nào đó thôi.

3.2. Tính tổng và số hạng tổng quát

Chương trước ta đã quan sát các phương án khác nhau của phương pháp quy nạp, nhiều khi đi tìm một số hạng tổng quát hoặc một tổng của một dãy người ta áp dụng phương pháp quy nạp toán học một cách hiển nhiên do các bước hồi quy liên tiếp mà ta tìm được công thức tổng quát. Những ví dụ sau đây minh họa phương pháp quy nạp này.

Ví dụ 3.9. *Dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được xây dựng theo cách sau: Hai số đầu a_0 và a_1 là những số đã cho, mỗi số sau đó là trung bình cộng của hai số trước đó. Hãy biểu diễn a_n theo a_0, a_1 và n.*

Lời giải. Ta có

$$a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2}, a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2}, a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2}, \ldots$$

từ đó suy ra

$$a_2 - a_1 = \frac{a_0 - a_1}{2}, a_3 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2}, a_4 - a_3 = \frac{a_2 - a_3}{2}, \ldots$$

Suy ra
$$a_2 - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}$$
$$a_3 - a_2 = -\frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{a_1 - a_0}{2^2}$$
$$a_4 - a_3 = -\frac{a_3 - a_2}{2} = -\frac{a_1 - a_0}{2^3}$$
....

Dễ thấy rằng (phương pháp quy nạp toán học được áp dụng ở đây)
$$a_n - a_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}.$$
Cộng theo vế của các đẳng thức trên, ta có
$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= -\frac{a_1 - a_0}{2} + \frac{a_1 - a_0}{2^2} - \frac{a_1 - a_0}{2^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}} \\ &= -\frac{a_1 - a_0}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}) \\ &= \frac{a_1 - a_0}{3}\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} - 1\}. \end{aligned}$$
Từ đó suy ra
$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{3.2^{n-1}}.$$ ☺

Ví dụ 3.10. *Dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ được xác định theo công thức*
$$a_1 = 2 \text{ và } a_n = 3a_{n-1} + 1.$$
Hãy tính $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Lời giải. Ta xét đẳng thức $a_k = 3a_{k-1} + 1$. Cho k giá trị $2, 3, 4, \ldots, n$ và cộng lại ta nhận được $\sum_{k=2}^{n} a_k = 3\sum_{k=2}^{n} a_{k-1} + n - 1$. Ta đặt $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$. Khi đó ta có $S - a_1 = 3(S - a_n) + n - 1$. Suy ra
$$S = \frac{1}{2}\{3a_n - a_1 - n + 1\}.$$

Ta chỉ còn biểu diễn a_n qua a_1. Ta có

$$a_n = 3a_{n-1} + 1, a_{n-1} = 3a_{n-2} + 1.$$

Từ đó suy ra $a_n - a_{n-1} = 3(a_{n-1} - a_{n-2})$. Vì thế

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} = 3(a_{n-1} - a_{n-2}) = 3^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \\ = 3^3(a_{n-3} - a_{n-4}) = \cdots = 3^{n-2}(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

Nhưng $a_2 = 3a_1 + 1 = 7$, vì vậy $a_n - a_{n-1} = 5.3^{n-2}$ (quy nạp toán học đã dùng ở đây). Với các giá trị n bằng $2, 3, 4, \ldots, n$ ta có

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 5.1, \\ a_3 - a_2 &= 5.3, \\ a_4 - a_3 &= 5.3^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n - a_{n-1} &= 5.3^{n-2}. \end{aligned}$$

Cộng theo các vế của đẳng thức, ta tính được

$$a_n - a_1 = 5(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2}) = \frac{5}{2}(3^{n-1} - 1).$$

Từ biểu thức của S ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\{3(a_n - a_1) + 2a_1 - n + 1\} = \\ &= \frac{1}{2}\{\frac{15}{2}(3^{n-1} - 1) + 4 - n + 1\} = \frac{1}{4}\{5(3^n - 1) - 2n\}. \end{aligned}$$ ☺

Ví dụ 3.11. *Dãy số $a_1, a_2, \ldots$ xác định theo công thức $a_n = ka_{n-1} + l$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Hãy biểu diễn a_n theo a_1, k, l và n.*

Lời giải. Ta có $a_n = ka_{n-1} + l, a_{n-1} = ka_{n-2} + l$. Suy ra

$$a_n - a_{n-1} = k(a_{n-1} - a_{n-2}) = k^2(a_{n-2} - a_{n-3)} = \ldots = k^{n-2}(a_2 - a_1),$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= (a_2 - a_1),\\
a_3 - a_2 &= k(a_2 - a_1),\\
a_4 - a_3 &= k^2(a_2 - a_1),\\
&\cdots\cdots\cdot\\
a_n - a_{n-1} &= k^{n-2}(a_2 - a_1).
\end{aligned}$$

Cộng lại các đẳng thức trên ta có

$$a_n = k^{n-1}a_1 + \frac{k^{n-1}-1}{k-1}l.$$

☺

Ví dụ 3.12. *Cho dãy $a_1, a_2, \ldots$ thoả mãn đẳng thức sau:* $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$. *Hãy biểu diễn a_n theo a_1, a_2 và n.*

Lời giải. Ta viết lại đẳng thức dưới dạng sau:

$$a_{n+1} - a_n - (a_n - a_{n-1}) = 1.$$

Ta đặt $a_n - a_{n-1} = x_n, (n = 2, 3, \ldots)$. Khi đó ta có $x_{n+1} - x_n = 1$. Thay vào đẳng thức sau cùng giá trị n bằng $2, 3, \ldots, n-1$ và cộng lại, ta nhận được $x_n - x_2 = n - 2$.

Ta lại thay $n = 3, 4, \ldots, n$ vào $a_n - a_{n-1} = x_n$ và cộng lại ta nhận được

$$a_n - a_2 = x_3 + x_4 + \cdots + x_n.$$

Hay là

$$a_n = a_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n.$$

Nhưng

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} x_k &= \sum_{k=3}^{n}(x_2 + k - 2)\\
&= (n-2)x_2 + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1\\
&= (n-2)x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 + (n-2)x_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= a_2 + (n-2)(a_2 - a_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)a_2 - (n-2)a_1. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 3.13. *Cho hai dãy số*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots$$

được xác định theo công thức sau:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; \qquad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

ở đây a_0 và b_0 là những số đã cho $a_0 > b_0 > 0$. Tính a_n và b_n theo a_0, b_0 và n.

Lời giải. Dễ thấy rằng $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$, và suy ra $a_nb_n = a_0b_0$ với mọi số nguyên n. Nhưng

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} &= \frac{a_n - \sqrt{a_nb_n}}{a_n + \sqrt{a_nb_n}} = \frac{a_n - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{a_n + \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} \\ &= \frac{\dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}{\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} + \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}} = \left(\frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}}\right)^2. \end{aligned}$$

Ta đặt $\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = u_n$. Khi đó ta có

$$u_{n-1} = u_{n-2}^2,$$

$$u_{n-2} = u_{n-3}^2,$$

$$\ldots\ldots$$

$$u_2 = u_1^2,$$
$$u_1 = u_0^2.$$

Nâng bậc lũy thừa của các đẳng thức lần lượt với $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-2}$. Ta tính được $u_{n-1} = u_0^{2^{n-1}}$. Nhưng

$$u_{n-1} = \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{b_{n-1}}} = \frac{a_{n-1} - \sqrt{a_0 b_0}}{a_{n-1} + \sqrt{a_0 b_0}},$$
$$u_0 = \frac{\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}}{\sqrt{a_0} + \sqrt{b_0}} = \frac{a_0 - \sqrt{a_0 b_0}}{a_0 + \sqrt{a_0 b_0}}.$$

Như vậy ta có

$$\frac{a_{n-1} - \sqrt{a_0 b_0}}{a_{n-1} + \sqrt{a_0 b_0}} = \left(\frac{a_0 - \sqrt{a_0 b_0}}{a_0 + \sqrt{a_0 b_0}}\right)^{2^{n-1}}.$$ ☺

3.3. Phương trình truy hồi tuyến tính

Mục trước ta thấy các bài toán đều cho dãy số và các số hạng được liên hệ với nhau bằng công thức truy hồi. Cách giải đều tìm trong công thức truy hồi mối liên hệ để tính được số hạng tổng quát và tổng n số hạng đầu tiên. Không phải lúc nào ta cũng có các phương trình truy hồi đẹp đẽ như các bài tập phần trước. Mục này ta chỉ ra một cách tổng quát tính số hạng tổng quát và tổng những dãy thoả mãn phương trình truy hồi.

Cho k số hạng đầu của dãy số

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{3.16}$$

là $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \ldots, x_k = u_k$. Mỗi số hạng thứ $k+1$ của dãy (3.16) tồn tại mối liên hệ

$$x_{k+n} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \cdots + a_k x_n = b_n, \tag{3.17}$$

ở đây $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là những số đã cho, còn $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ là dãy đã cho. Khi đó (3.17) cho phép ta tính được mọi phần tử liên tiếp của dãy (3.16) và sau đó ta cố gắng biểu diễn số hạng tổng quát của chúng. Xét ví dụ

Ví dụ 3.14. *Tìm công thức tổng quát của dãy xác định như sau:*

$$x_1 = 5, x_2 = 19, \quad x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0.$$

Lời giải. Từ mối liên hệ hồi quy $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-1}$, ta tìm được

$$x_1 = 5 = 3^2 - 2^2, x_2 = 19 = 3^3 - 2^3,$$
$$x_3 = 5x_2 - 6x_1 = 65 = 3^4 - 2^4, x_4 = 5x_3 - 6x_2 = 211 = 3^5 - 2^5,$$
$$x_5 = 5x_4 - 6x_3 = 665 = 3^5 - 2^5, x_6 = 5x_5 - 6x_4 = 2059 = 3^6 - 2^6.$$

Ta giả thiết rằng số hạng tổng quát của dãy có dạng

$$x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}. \tag{3.18}$$

Giả thiết được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

1) Ta đã kiểm tra (3.18) đúng với $n = 1$ và $n = 2$.

2) Ta giả thiết (3.18) đúng với $n = k$ và $n = k + 1$, nghĩa là $x_k = 3^{k+1} - 2^{k+1}$ và $x_{k+1} = 3^{k+2} - 2^{k+2}$. Khi đó ta tìm được

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= 5x_{k+1} - 6x_k = 5(3^{k+2} - 2^{k+2}) - 6(3^{k+1} - 2^{k+1}) \\ &= (15 - 6)3^{k+1} - (10 - 6)2^{k+1} = 3^{k+3} - 2^{k+3}. \end{aligned}$$

Như vậy (3.18) đúng với $n = k + 2$. Theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra (3.18) đúng với mọi n. ☺

Phương trình (3.17) gọi *phương trình hồi quy tuyến tính* bậc k. Những số $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ gọi là *những hệ số*, còn b_n gọi là *số hạng tự do*. Khi với mọi n, $b_n = 0$ phương trình gọi là *thuần nhất*. Bài toán đặt ra là tìm cách biểu diễn số hạng tổng quát x_n qua các đại lượng ban đầu đã cho. Trong mục này ta chỉ xét phương trình truy hồi bậc hai.

Ví dụ 3.15. *Tìm số hạng tổng quát x_n cho phương trình truy hồi thuần nhất bậc hai:*

$$a_0x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_2x_n = 0. \tag{3.19}$$

Lời giải. Ta gọi t_1 và t_2 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$a_0t^2 + a_1t + a_2 = 0 \quad (a_0 \neq 0, a_2 \neq 0).$$

Khi đó theo công thức Viet $a_0(t_1 + t_2) = -a_1, a_0t_1t_2 = a_2$.

Phương trình (3.19) có thể viết dưới dạng

$$x_{n+2} - (t_1 + t_2)x_{n+1} + t_1t_2x_n = 0. \tag{3.20}$$

Số hạng tổng quát của dãy đã cho phụ thuộc vào hai giá trị t_1 và t_2 khác nhau hoặc bằng nhau:

1) *Trường hợp* $t_1 \neq t_2$:

Thay n bằng $n-2$ vào (3.20) ta nhận được

$$x_n - (t_1 + t_2)x_{n-1} + t_1t_2x_{n-2} = 0. \tag{3.21}$$

Ta viết lại

$$x_n - t_2x_{n-1} = t_1(x_{n-1} - t_2x_{n-2}). \tag{3.22}$$

Thay n bằng các giá trị $n-1, n-2, \ldots, 4, 3$ vào (3.22) ta nhận được

$$\begin{aligned} x_{n-1} - t_2x_{n-2} &= t_1(x_{n-2} - t_2x_{n-3}) \\ x_{n-2} - t_2x_{n-3} &= t_1(x_{n-3} - t_2x_{n-4}) \\ &\cdots\cdots \\ x_4 - t_2x_3 &= t_1(x_3 - t_2x_2) \\ x_3 - t_2x_2 &= t_1(x_2 - t_2x_1). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nhân các vế tương ứng của (3.22) và (3.23), giản ước thừa số chung, ta nhận được

$$x_n - t_2x_{n-1} = t_1^{n-2}(x_2 - t_2x_1). \tag{3.24}$$

Tương tự viết (3.21) dưới dạng

$$x_n - t_1x_{n-1} = t_2(x_{n-1} - t_2x_{n-2})$$

và sau đó thay n bằng các giá trị $n-1, n-2, \ldots, 4, 3$, cũng tính được

$$x_n - t_1x_{n-1} = t_2^{n-2}(x_2 - t_1x_1). \tag{3.25}$$

Từ (3.24) và (3.25) ta có

$$t_1x_n - t_2x_n = t_1^{n-1}(x_2 - t_2x_1) - t_2^{n-1}(x_2 - t_1x_1).$$

Hoặc là nghiệm của (3.19) có dạng

$$x_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n, \tag{3.26}$$

ở đây
$$C_1 = \frac{x_2 - t_2x_1}{t_1(t_1 - t_2)}, C_2 = \frac{t_1x_1 - x_2}{t_2(t_1 - t_2)}. \tag{3.27}$$

Ngược lại, C_1 và C_2 là những hằng số bất kỳ, kiểm tra trực tiếp dãy với số hạng tổng quát (3.26) là nghiệm của phương trình ẩn (3.19). Giá trị duy nhất của dãy $\{x_n\}$ được xác định, nếu cho hai giá trị ban đầu của dãy. Khi đó C_1 và C_2 xác định theo công thức (3.27).

Trở lại ví dụ trên thì $t_1 = 3, t_2 = 2$ là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - 5t + 6 = 0$. Khi đó nếu C_1 và C_2 là những hằng số bất kỳ, thì dãy với số hạng tổng quát

$$x_n = C_1.3^n + C_2.2^n$$

là nghiệm của phương trình truy hồi $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$. Với $x_1 = 5, x_2 = 19$, ta xác định được $C_1 = 3, C_2 = -2$ và như vậy số hạng tổng quát của dãy là $x_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Trong trường hợp nghiệm t_1, t_2 là những số phức., nghĩa là $t_1 = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha), t_2 = \rho(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, theo công thức Moivre ta có

$$t_1^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha), \qquad t_2^n = \rho^n(\cos n\alpha - i\sin n\alpha)$$

và nghiệm tổng quát (3.26) trở thành

$$x_n = P_1\rho^n \cos n\alpha + P_2\rho^n \sin n\alpha, \tag{3.28}$$

ở đây P_1 và P_2 là hằng số bất kỳ. Để xác định hằng P_1 và P_2 trong (3.28) khi cho hai giá trị đầu x_1 và x_2, ta có

$$\begin{aligned} P_1 &= C_1 + C_2 = \frac{(t_1+t_2)x_1 - x_2}{t_1t_2}, \\ P_2 &= i(C_1 - C_2) = i\frac{(t_1+t_2)x_2 - (t_1^2+t_2^2)x_1}{t_1t_2(t_1-t_2)}, \end{aligned}$$

hoặc là

$$P_1 = \frac{2}{\rho}\cos\alpha.x_1 - \frac{1}{\rho^2}.x_2, P_2 = \frac{cotg\alpha}{\rho^2}x_2 - \frac{\cos 2\alpha}{\rho\sin\alpha}.x_1. \tag{3.29}$$

2) *Trường hợp* $t_1 = t_2$: Như trong trường hợp trước chúng ta suy ra từ (3.24) và (3.25) với $t_1 = t_2$

$$x_n - t_1x_{n-1} = t_1^{n-2}(x_2 - t_1x_1). \tag{3.30}$$

Để xác định được x_n cần tìm một phương trình nữa cho x_n và x_{n-1}. Từ phương trình $x_n - 2t_1x_{n-1} + t_1^2x_{n-2} = 0$ có thể viết dưới dạng

$$(n-2)x_n - 2(n-2)t_1x_{n-1} + (n-2)t_1^2.x_{n-2} = 0$$

hoặc là

$$(n-2)x_n - (n-1)t_1x_{n-1} = t_1[(n-3)x_{n-1} - (n-2)t_1x_{n-2}]. \tag{3.31}$$

Sau khi thế n tương ứng bằng $n-1, n-2, \ldots, 4, 3$ vào (3.31) ta nhận được

$$
\begin{aligned}
(n-3)x_{n-1}-(n-2)t_1x_{n-2} &= t_1[(n-4)x_{n-2}-(n-3)t_1x_{n-3}],\\
(n-4)x_{n-2}-(n-3)t_1x_{n-3} &= t_1[(n-5)x_{n-3}-(n-4)t_1x_{n-4}],\\
&\cdots\cdots\\
2x_4-3t_1x_3 &= t_1(x_3-2t_1x_2),\\
x_3-2t_1x_2 &= -t_1^2x_1.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Lần lượt thế các vế tương ứng của (3.32) vào (3.31) ta nhận được

$$(n-2)x_n-(n-1)t_1x_{n-1} = -t_1^{n-1}.x_1. \tag{3.33}$$

Từ (3.30) và (3.33) ta tìm được

$$(n-1)x_n-(n-2)x_n = (n-1)t_1^{n-2}(x_2-t_1x_1)+t_1^{n-1}x_1,$$

hoặc là

$$x_n = (C_1+C_2.n)t_1^n, \tag{3.34}$$

ở đây

$$C_1 = \frac{2t_1x_1-x_2}{t_1^2}, C_2 = \frac{x_2-t_1x_1}{t_1^2}.$$

Bạn đọc có thể kiểm tra dễ dàng (3.34) là kết quả của (3.26) khi ta cho $t_2 = t_1$. ☺

Ví dụ 3.16. *Tìm số hạng tổng quát của dãy xác định theo công thức sau:*

$$x_1 = 10, x_2 = -12, \quad x_n+4x_{n-2} = 0.$$

Lời giải. Từ phương trình $t^2+4 = 0$ ta tính được $t_1 = 2i = 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}), t_2 = -2i = 2(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$ hay là $\rho = 2, \alpha = \frac{\pi}{2}$. Khi đó nghiệm của phương trình truy hồi là

$$x_n = (P_1\cos\frac{n\pi}{2}+P_2\sin\frac{n\pi}{2})2^n.$$

Từ (3.39) suy ra $P_1 = 3, P_2 = 5$, do đó số hạng tổng quát phải tìm là
$$x_n = (3\cos\frac{n\pi}{2} + 5\sin\frac{n\pi}{2})2^n.$$
hoặc là
$$x_n = \begin{cases} 3.2^n & \text{với } n = 4k \\ 5.2^n & \text{với } n = 4k+1 \\ -3.2^n & \text{với } n = 4k+2 \\ -5.2^n & \text{với } n = 4k+3 \end{cases}$$

Ví dụ 3.17. *Bây giờ ta quan tâm câu hỏi tìm nghiệm riêng của phương trình truy hồi không thuần nhất bậc hai với hệ số hằng số*
$$a_0x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_2x_n = b_n \qquad (a_0 \neq 0, a_2 \neq 0). \tag{3.35}$$

Lời giải. Ta cũng xét nghiệm t_1, t_2 của phương trình $a_0t^2 + a_1t + a_2 = 0$.

1) *Trường hợp* $t_1 \neq t_2$: Khi đó theo phần trên t_1^n và t_2^n là những nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (3.17) và có nghiệm theo công thức (3.26).

Nghiệm riêng của phương trình (3.35) ta sẽ tìm theo phương pháp biến đổi hằng số như sau: Ta phải tìm nghiệm riêng ξ_n có dạng
$$\xi_n = \alpha_nt_1^n + \beta_nt_2^n, \tag{3.36}$$
nó chỉ khác (3.26) là hệ số α_n và β_n có thể phụ thuộc vào n. Ta có
$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \alpha_{n+1}t_1^{n+1} + \beta_{n+1}t_2^{n+1}\\ &= \alpha_nt_1^{n+1} + \beta_nt_2^{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)t_1^{n+1} + (\beta_{n+1} - \beta_n)t_2^{n+1}.\end{aligned}$$

Bây giờ ta đặt điều kiện cho các dãy $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ thoả mãn
$$\Delta\alpha t_1^{n+1} + \Delta\beta t_2^{n+1} = 0, \tag{3.37}$$

ở đây $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n, \Delta\beta = \beta_{n+1} - \beta_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \alpha_n t_1^{n+1} + \beta_n t_2^{n+1}\\ \xi_{n+2} &= \alpha_{n+1} t_1^{n+2} + \beta_{n+1} t_2^{n+2}\\ &= \alpha_n t_1^{n+2} + \beta_n t_2^{n+2} + \Delta\alpha t_1^{n+2} + \Delta\beta t_2^{n+2}.\end{aligned}$$

Ta thế biểu thức $\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}$ vào (3.35), ta nhận được

$$\begin{aligned}&(a_0 t_1^{n+2} + a_1 t_1^{n+1} + a_2 t_1^n).\alpha_n + (a_0 t_2^{n+2} + a_1 t_2^{n+1} + a_2 t_2^n).\beta_n +\\ &+ a_0(\Delta\alpha t_1^{n+2} + \Delta\beta t_2^{n+2}) = b_n.\end{aligned}$$

Do $(a_0 t_1^{n+2} + a_1 t_1^{n+1} + a_2 t_1^n).\alpha_n = 0$ và $(a_0 t_2^{n+2} + a_1 t_2^{n+1} + a_2 t_2^n).\beta_n = 0$ suy ra

$$\Delta\alpha t_1^{n+2} + \Delta\beta t_2^{n+2} = \frac{b_n}{a_0}. \tag{3.38}$$

Từ (3.38) và (3.17) ta tìm được

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{b_n}{a_0}.\frac{1}{t_1^{n+1}(t_1 - t_2)}\\ \Delta\beta &= \beta_{n+1} - \beta_n = \frac{b_n}{a_0}.\frac{1}{t_1^{n+1}(t_2 - t_1)}.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Sau khi thế lần lượt n bằng các giá trị tương ứng $n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$ vào (3.39) ta nhận được

$$\begin{aligned}\alpha_n - \alpha_{n-1} &= \frac{b_{n-1}}{a_0}.\frac{1}{t_1^n(t_1 - t_2)},\\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} &= \frac{b_{n-2}}{a_0}.\frac{1}{t_1^{n-1}(t_1 - t_2)},\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_3 - \alpha_2 &= \frac{b_2}{a_0}.\frac{1}{t_1^3(t_1 - t_2)},\\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \frac{b_1}{a_0}.\frac{1}{t_1^2(t_1 - t_2)},\end{aligned}$$

$$\alpha_1 - \alpha_0 = \frac{b_0}{a_0}.\frac{1}{t_1(t_1 - t_2)}.$$

Ta cộng theo vế của các đẳng thức trên và chú ý $\alpha_0 \neq 0$ ta tìm được

$$\alpha_n = \frac{1}{a_0 t_1^n (t_1 - t_2)} (b_0 t_1^{n-1} + b_1 t_1^{n-2} + \cdots + b_{n-2} t_1 + b_{n-1}).$$

Tương tự ta cũng tìm được

$$\beta_n = \frac{1}{a_0 t_2^n (t_2 - t_1)} (b_0 t_2^{n-1} + b_1 t_2^{n-2} + \cdots + b_{n-2} t_2 + b_{n-1}).$$

Như vậy từ công thức (3.36) ta có

$$\xi_n = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{a_0(t_1 - t_2)}, \tag{3.40}$$

ở đây $\qquad f(t) = b_0 t^{n-1} + b_1 t^{n-2} + \cdots + b_{n-2} t + b_{n-1}.$

2) *Trường hợp* $t_1 = t_2$: Tương tự cách làm trên ta cũng tìm được ξ_n dạng $\xi_n = (\alpha_n + n\beta_n) t_1^n$, và ta cũng nhận được

$$\xi_n = \frac{f'(t_1)}{a_0}.$$

Trên đây ta đã khảo sát phương trình truy hồi bậc hai. Phương trình bậc cao hơn ta cũng có thể làm tương tự. Ta cũng thành lập phương trình

$$t^k + a_1 t^{k-1} + a_2 t^{k-2} + \cdots + a_{k-1} t + a_k = 0 \tag{3.41}$$

gọi là phương trình đặc trưng của (3.17). Phương trình sau đây gọi là phương trình truy hồi tuyến tính thuần nhất

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k+1} + \cdots + a_k x_k = 0. \tag{3.42}$$

Ta không chứng minh định lí sau

Định lí 3.1: *Nếu t_1 nghiệm bội s lần của (3.41), thì s dãy số với số hạng tổng quát*

$$t_1^n, nt_1^n, n^2t_1^n, \ldots, n^{s-1}t_1^n$$

là nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (3.42)

Như vậy tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng theo định lí trên cho ta k nghiệm riêng của (3.42).

$$x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)}.$$

Định lí 3.2: *Nghiệm chung của phương trình thuần nhất (3.42) được cho bằng công thức*

$$x_n = C_1x_n^{(1)} + C_2x_n^{(2)} + \cdots + C_kx_n^{(k)}$$

ở đây $C_1, C_2, \ldots, C_k$ là những hàng số bất kỳ.

Định lí 3.3: *Nghiệm chung của phương trình truy hồi tuyến tính (3.17) được cho bằng công thức*

$$x_n = C_1x_n^{(1)} + C_2x_n^{(2)} + \cdots + C_kx_n^{(k)} + \xi_n$$

ở đây $C_1, C_2, \ldots, C_k$ là những hàng số bất kỳ và ξ_n là một nghiệm riêng của (3.17).

Hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được xác định bằng giá trị k số hạng ban đầu của dãy.

Nghiệm riêng của phương trình (3.17) được tìm bằng phương pháp biến đổi hằng số có dạng

$$\xi_n = \alpha_{1n}x_n^{(1)} + \alpha_{2n}x_n^{(2)} + \cdots + \alpha_{kn}x_n^{(k)}.$$

Trường hợp riêng định lí sau rất hay được áp dụng

Định lí 3.4: *Nếu $b_n = q^n.P_s(n)$, ở đây $P_s(n)$ là đa thức của n bậc s, còn q là m-lần nghiệm lặp của (3.42), phương trình (3.17)* *có nghiệm riêng dạng $\xi = q^n Q_{m+s}(n)$, ở đây $Q_{m+s}(n)$ là đa thức của n, bậc $m+s$.*

Sau đây là một số ví dụ áp dụng các Định lí trên

Ví dụ 3.18. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số $z_n = 4^{n+1} + 6n + 5$ chia hết cho 9.*

Lời giải. Những số $z_1 = 27, z_2 = 81$ và $z_3 = 279$ chia hết cho 9. Còn z_n có thể nhận được theo công thức tổng quát

$$x_n = C_1.4^n + C_2.n.1^n + C_3.1^n$$

với $C_1 = 4, C_2 = 6, C_3 = 5$.

Dãy với số hạng tổng quát x_n là nghiệm chung của phương trình thuần nhất tuyến tính với hệ số không đổi, mà nghiệm của phương trình thuần nhất có nghiệm $t_1 = 4$ và nghiệm lặp $t_2 = t_3 = 1$. Suy ra phương trình đặc trưng là $(t-4)(t-1)^2 = 0$ hoặc là $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$, và phương trình truy hồi là

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 9x_{n+1} - 4x_n = 0.$$

Vì z_n là nghiệm riêng của phương trình truy hồi, ta có

$$z_{n+3} = 6z_{n+2} - 9z_{n+1} + 4z_n.$$

Từ đây, nếu giả sử những số z_n, z_{n+1} và z_{n+2} chia hết cho 9, thì z_{n+3} cũng chia hết cho 9. Như vậy theo nguyên lý quy nạp toán học bài toán đã được giải đầy đủ. ☺

Ví dụ 3.19. *Tìm công thức tổng quát cho tổng*

$$x_n = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5.$$

Lời giải. Ta có

$$x_1 = 1, x_{n+1} - x_n = (n+1)^5.$$

Ta đã có phương trình truy hồi không thuần nhất bậc một với hệ số không đổi. Phương trình đặc trưng $t-1=0$ có nghiệm $t_1=1$. Theo các định lí 3.1 -3.3 nghiệm chung của phương trình này là $x_n = C_1 + \xi_n$, ở đây ξ_n là nghiệm riêng của phương trình ta đang xét.

Nhưng vì $b_n = 1^n.(n+5)^5$ và số 1 là nghiệm của phương trình đặc trưng, theo định lí 3.4 $(m=1, s=5)$ ξ_n là đa thức bậc sáu của n. Khi đó

$$x_n = B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + B_3 n^3 + B_4 n^4 + B_5 n^5 + B_6 n^6.$$

Thay vào phương trình ta thiết lập ở phần đầu, ta nhận được

$$\begin{gathered} B_1(n+1) + B_2(n+1)^2 + B_3(n+1)^3 + B_4(n+1)^4 + B_5(n+1)^5 \\ +B_6(n+1)^6 - B_1 n - B_2 n^2 - B_3 n^3 - B_4 n^4 \\ -B_5 n^5 - B_6 n^6 = (n+1)^5. \end{gathered}$$

Đồng nhất hệ số trước đồng bậc của n của hai vế đẳng thức, ta có

$$\begin{gathered} 6B_6 = 1, 5B_5 + 15B_6 = 5, 4B_4 + 10B_5 + 20B_6 = 10, \\ 3B_3 + 6B_4 + 10B_5 + 16B_6 = 10, \\ 2B_2 + 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + 6B_6 = 5, \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = 1. \end{gathered}$$

Từ đó suy ra

$$B_6 = \frac{1}{6}, B_5 = \frac{1}{2}, B_4 = \frac{5}{12}, B_3 = 0, B_2 = -\frac{1}{12}, B_1 = 0.$$

Khi đó $$x_n = B_0 - \frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6.$$

Từ đây với $n=1$ ta nhận được $1 = B_0 + 1$, nghĩa là $B_0 = 0$ suy ra

$$1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$ ☺

Ví dụ 3.20. *Giải phương trình*

$$x_{n+1} - n x_n = n! n^5 \tag{3.43}$$

với điều kiện ban đầu là $x_1 = 1$.

Lời giải. Ta xét phương trình thuần nhất tương ứng

$$y_{n+1} - ny_n = 0. \tag{3.44}$$

Sau khi thay n bởi lần lượt giá trị $n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ vào (3.44) ta có

$$\begin{aligned} y_n &= (n-1)y_{n-1} \\ y_{n-1} &= (n-2)y_{n-2} \\ &\ldots\ldots \\ y_3 &= 2y_2 \\ y_2 &= y_1 = C. \end{aligned}$$

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta tìm được $y_n = C(n-1)!$. Nghiệm riêng ξ_n của (3.43) ta tìm theo phương pháp biến đổi hằng số dạng $\xi_n = (n-1)!u_n$. Khi ta thế vào (3.43), nhận được $n!u_{n+1} - n!u_n = n!n^5$, hoặc là $u_{n+1} - u_n = n^5$. Ta nhận được phương trình truy hồi có nghiệm chung (kết quả bài tập trước)

$$u_n = B_0 + \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1).$$

với $B_0 = 0$ ta có

$$\xi_n = \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)(n-1)!.$$

Suy ra nghiệm chung của bài toán là

$$x_n = y_n + \xi_n = [C + \frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1)](n-1)!.$$

Với $n = 1$ cho giá trị ban đầu ta nhận được $C = 1$ và suy ra dãy phải tìm là:

$$x_n = [\frac{1}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1) + 1](n-1)!.$$ ☺

3.4. Tổng của những lũy thừa cùng bậc các số tự nhiên

Ta đã gặp một số bài về tính tổng của lũy thừ cùng bậc các số tự nhiên, như với lũy thừa bậc hai, bậc ba. Phần này ta áp dụng công thức Newton để tính được tổng của một số mũ nào đó các số tự nhiên từ 1 đến n. Để tính tổng

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \tag{3.45}$$

với k là một số tự nhiên, ta áp dụng đẳng thức sau

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + C_{k+1}^1 x^k + C_{k+1}^2 x^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k x + 1.$$

Thay x lần lượt các giá trị $1, 2, 3, \ldots, n$ ta nhận được

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k 1 + 1,\\
3^{k+1} &= 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k 2 + 1,\\
4^{k+1} &= 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k 3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^{k+1} &= (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + \cdots + C_{k+1}^k (n-1) + 1,\\
(n+1)^{k+1} &= n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k n + 1.
\end{aligned}$$

Cộng theo vế của các đẳng thức và ta nhận được

$$(n+1)^{k+1} = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \cdots + C_{k+1}^k S_1 + n + 1$$

hay là

$$S_k = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - C_{k+1}^2 S_{k-1} - \cdots - C_{k+1}^k S_1 - n - 1\right]. \tag{3.46}$$

Từ biểu thức (3.46) cho phép ta tính lần lượt tổng (3.45). Ví dụ với $k = 1, 2, \ldots$ từ (3.46) ta tính được

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[(n+1)^2 - n - 1\right] = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

$$S_2 = \frac{1}{3}[(n+1)^3 - 3S_1 - n - 1] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$
$$S_3 = \frac{1}{4}[(n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - n - 1] = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$$
$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,$$
$$S_4 = \frac{1}{5}[(n+1)^5 - 10S_3 - 10S_2 - 5S_1 - n - 1]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$
$$S_5 = \frac{1}{6}[(n+1)^6 - 15S_4 - 20S_3 - 15S_2 - 6S_1 - n - 1]$$
$$= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2,$$
$$S_6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$
$$= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{12}n,$$
$$S_7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$
$$= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2.$$

Ta sẽ chứng minh rằng tổng S_k là một đa thức bậc $k+1$ có số hạng tự do bằng không, hệ số trước n^{k+1} bằng $\frac{1}{k+1}$, hệ số trước n^k bằng $\frac{1}{2}$, hệ số trước n^{k-1} bằng $\frac{k}{12}$, hệ số trước n^{k-2} bằng 0.

Thật vậy, Giả thiết điều khẳng định trên đúng với những tổng $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$. Ta cần kết luận khẳng định cũng đúng với tổng S_k. Khẳng định S_k là một đa thức theo n và hệ số tự do bằng 0, suy ra từ đẳng thức (3.46). Các hệ số a_k, a_{k-1}, a_{k-2} tương ứng trước n^k, n^{k-1}, n^{k-2} trong S_k cũng từ (3.17) ta tìm được

$$a_k = \frac{1}{k+1}[C_{k+1}^1 - C_{k+1}^2 \frac{1}{k}] = \frac{1}{2},$$
$$a_{k-1} = \frac{1}{k+1}[C_{k+1}^2 - C_{k+1}^2.\frac{1}{2} - C_{k+1}^3 \frac{1}{k-1}] = \frac{k}{12},$$
$$a_{k-2} = \frac{1}{k+1}[C_{k+1}^3 - C_{k+1}^2 \frac{k-1}{12} - C_{k+1}^3.\frac{1}{2} - C_{k+1}^4 \frac{1}{k-2}] = 0.$$

Như vậy trong trường hợp chung ta có công thức

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}.n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{2}C_k^1 B_2 n^{k-1} + \frac{1}{4}C_k^3 B_4 n^{k-3} + \\ + \frac{1}{6}C_k^5 B_6 n^{k-5} + \frac{1}{8}C_k^7 B_8 n^{k-7} + \cdots \tag{3.47}$$

số hạng cuối cùng là n hoặc n^2. Trong (3.47) những số $B_2, B_4, B_6, B_8, \ldots$ gọi là những số Bernoulli. Một số số Bernoulli được liệt kê trong bảng

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$
$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = -\frac{7}{6}, \quad B_{16} = \frac{3617}{510}, \quad B_{18} = -\frac{43867}{798},$$
$$B_{20} = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22} = \frac{854513}{123}, \quad B_{24} = -\frac{236364091}{2730},$$
$$B_{26} = \frac{8553103}{6}, \quad B_{28} = -\frac{23749461029}{870}, \quad B_{30} = \frac{8615841276005}{14322},$$
$$B_{32} = -\frac{7709321041217}{510}, \quad B_{34} = \frac{2577867858367}{6}.$$

Những số này đủ cho ta tính được công thức tổng lũy thừa bậc một, hai, ba, ..., ba mươi tư của n chữ số tự nhiên đầu tiên.

Bây giờ không khó khăn gì tính được công thức dạng $\sum_{t=1}^{n}[P(t)]^k$ ở đây $P(t)$ là đa thức theo t. Ví dụ chứng minh những đẳng thức sau đây

1) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$;

2) $1^2 + 5^2 + 9^2 + \cdots + (4n+1)^2 = \dfrac{1}{3}(n+1)(16n^2+20n+3)$.

Thật vậy,

$$1)\ \sum_{t=1}^{n}(2t-1)^2 = \sum_{t=1}^{n}(4t^2-4t+1) = 4\sum_{t=1}^{n}t^2 - 4\sum_{t=1}^{n}t + n$$
$$= 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

$$2)\ \sum_{t=1}^{n}(4t+1)^2 = \sum_{t=1}^{n}(16t^2+8t+1) = 16\sum_{t=1}^{n}t^2 + 8\sum_{t=1}^{n}t + n$$
$$= 16.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8.\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
$$= \frac{(n+1)(16n^2+20n+3)}{3}.$$

Bạn đọc có thể giải nhiều bài toán tương tự như vậy.

3.5. Bài tập

▷ **3.21.** Chứng minh rằng

$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \frac{a_1b_1 - qa_nb_n}{1-q} - dqb_1\frac{q^{n-1}-1}{(1-q)^2}.$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là cấp số cộng có công sai d và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là cấp số nhân có bội số $q \neq 1$.

▷ **3.22.** Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng

$$2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots$$

và tính tổng n số hạng đầu tiên của nó.

▷ **3.23.** Hãy tìm công thức tổng

$$S_n = 3.2 + 5.5 + 7.8 + \cdots + (2n+1)(3n-1).$$

▷ **3.24.** Hãy tìm nghiệm chung của các phương trình sau:

a) $x_{n+1} + x_{n+1} + x_n = 0$;

b) $x_{n+1} + 2x_{n+1} + x_n = 0$;

c) $x_{n+2} - x_n = 0$;

d) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$.

▷ **3.25.** Tìm công thức tổng quát cho dãy xác định theo công thức sau:

a) $x_1 = 10, x_2 = 16, x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$;

b) $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -29, x_{n+3} - 9x_{n+2} + 26x_{n+1} - 24x_n = 0$;

c) $x_1 = 1, x_2 = -7, x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = -4$.

CHƯƠNG 4
SỐ HỌC

4.1. Phép chia hết

Trong số học phép chia cho ta rất nhiều tính chất về những số nguyên. Nhiều bài toán phát biểu dưới dạng các phép chia những số nguyên và kể cả các thuật toán tính toán. Ta nhắc lại một số khái niệm. Nếu a và b là những số nguyên, ta nói rằng *b chia hết* cho a, ký hiệu là $b \vdots a$, khi tồn tại một số nguyên c sao cho $b = ca$. Số c gọi là *thương* của phép chia, a nhiều khi gọi là *ước số* của b, số b gọi là *bội số* của a. Trường hợp không tồn tại c theo định nghĩa trên ta nói rằng *b không chia hết* cho a, ký hiệu $b \not\vdots a$. Từ định nghĩa đơn giản trên ta suy ra hàng loạt các tính chất của phép chia, ở đây ta chỉ lấy một ví dụ đơn giản: Nếu $b \vdots a$ và $c \vdots a$, thì $(ub + vc) \vdots a$ với mọi số nguyên bất kỳ u và v. Hai khái niệm sau đây rất hay được dùng.

Một số d gọi là *ước số chung lớn nhất* của hai số nguyên a và

b, ký hiệu d=(a, b), khi
1) a và b đều chia hết cho d;
2) d chia hết cho mọi ước số chung khác của a và b.

Một số m gọi là *bội số chung nhỏ nhất* của hai số nguyên a và b, ký hiệu m=[a, b], khi
1) m chia hết cho cả a và b;
2) Mọi bội số chung khác của a và b đều chia hết cho m.

Công thức liên quan giữa hai khái niệm trên là

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}.$$

Ví dụ 4.1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 0$, số $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169.*

Lời giải. Ta đặt $A_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$. Khi đó $A_0 = 3^3 - 27 = 0$ suy ra A_0 chia hết cho 169.

Giả sử A_n chia hết cho 169 với n nào đó. Ta biến đổi A_{n+1} như sau

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27 \\ &= A_n + 26.3^{3n+3} - 26 = A_n + 26[(3^3)^{n+1} - 1] \\ &= A_n + 26(3^3 - 1)(3^{3n} + \cdots + 1) = A_n + 4.169.(3^{3n} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra A_{n+1} chia hết cho 169. ☺

Ví dụ 4.2. *Chứng minh rằng với số n nguyên dương*
1) $C = 7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9;
2) $E = a^{4n+1} - a$ chia hết cho 30, với a là số nguyên.

Lời giải. 1) Nếu $n = 1$, thì $C_1 = 7 + 3 - 1$ chia hết cho 9. Giả sử $n = k \geq 1$ và $C_k = 7^k + 3k - 1$ chia hết cho 9. Khi đó với $n = k + 1$

số

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7.7^k + 3k + 2 \\ &= 7.7^k + 21k - 7 - 18k + 9 = 7(7^k + 3k - 1) - 9(2k-1) \\ &= 7C_k - 9(2k-1) \end{aligned}$$

cũng chia hết cho 9. Theo phương pháp quy nạp toán học C chia hết cho 9 với mọi n nguyên dương.

2) Nếu $n = 1$, thì

$$\begin{aligned} E_1 &= a^5 - a = a(a^2-1)(a^2+1) = a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5] \\ &= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5(a-1)a(a+1). \end{aligned}$$

Thừa số thứ nhất chia hết cho $5! = 120 = 4.30$, còn thừa số thứ hai chia hết cho $5.3! = 30$. Suy ra E_1 chia hết cho 30.

Giả sử $n = k \geq 1$ và $E_k = a^{4k+1} - a$ chia hết cho 30. Khi đó với $n = k+1$ số

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= a^{4k+5} - a = a^{4k+5} - a + a^{4k+1} - a^{4k+1} \\ &= (a^{4k+1} - a) + (a^{4k+5} - a^{4k+1}) = E_k + a^{4k}.E_1 \end{aligned}$$

cũng chia hết cho 30. ☺

Ví dụ 4.3. *Chứng minh rằng nếu với những số tự nhiên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$, thì mọi số có dạng $E_k = a^{2^k} + b^{2^k} + c^{2^k}$ và $F_k = (ab)^{2^k} + (bc)^{2^k} + (ca)^{2^k}$ với $k \geq 2$ chia hết cho số $D = \dfrac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4)$.*

Lời giải. Ta chứng minh đồng thời số E_k và F_k chia hết cho D. Trước tiên ta khẳng định $a^4 + b^4 + c^4$ là số chẵn. Thật vậy, nếu $c = 2k$, thì a và b là hoặc đồng thời lẻ hoặc đồng thời chẵn và suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ là chẵn. Nếu $c = 2k+1$, thì $a^2 + b^2$ là lẻ và suy ra

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$ cũng là lẻ. Do $c^4=(2k+1)^4$ là lẻ nên $(a^4+b^4)+c^4$ chẵn, vì là tổng hai số lẻ.

Ta xét số

$$\begin{aligned} F_2 &= (ab)^4+(bc)^4+(ca)^4 \\ &= a^4b^4+c^4(a^4+b^4)=2Dc^4+a^4b^4-c^8 \\ &= 2Dc^4+(a^2b^2-c^4)(a^2b^2+c^4). \end{aligned}$$

Vì $2a^2b^2=c^4-(a^4+b^4)$, nên $a^2b^2-c^4=\dfrac{c^4-(a^4+b^4)}{2}-c^4=-D$, Từ đó suy ra F_2 chia hết cho D. Cũng như vậy E_2 chia hết cho D. Mệnh đề của bài toán suy ra từ quy nạp toán học với các đẳng thức $E_{k+1}+2F_k=E_k^2$ và $F_{k+1}+2(a.b.c)^{2^k}E_k=F_k^2$. ☺

Ví dụ 4.4. *Chứng minh rằng với số tự nhiên dương bất kỳ n, số $2^{4^n}+5$ chia hết cho 21.*

Tổng quát: Với số tự nhiên bất kỳ $a>1, n\geq 1$, biểu thức $B_n=a^{4^n}+a^3-a-1$ chia hết cho $(a-1)(a+1)(a^2+a+1)$.

Lời giải. Nếu $n=1$, thì $B_1=a^4+a^3-a-1=(a-1)(a+1)(a^2+a+1)$.

Giả sử $n=k\geq 1$ và B_k chia hết cho $(a-1)(a+1)(a^2+a+1)$. Khi đó với $n=k+1$ ta nhận được

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= a^{4^{k+1}}+a^3-a-1=(a^4-a+a)^{4^k}+a^3-a-1 \\ &= [a(a^3-1)+a]^{4^k}+a^3-a-1=K(a-1)(a^2+a+1)+ \\ &+a^{4^k}+a^3-a-1=K(a-1)(a^2+a+1)+B_k. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= (a^4+a-a)^{4^k}+a^3-a-1=[a(a^3+1)-a]^{4^k}+a^3-a-1 \\ &= K(a+1)+a^{4^k}+a^3-a-1=K(a+1)+B_k. \end{aligned}$$

(Ký hiệu $K(a+1)$ là biểu thức luỹ thừa của $a+1$.) Vì các số $a-1, a+1$ và a^2+a+1 nguyên tố cùng nhau, suy ra B_{k+1} chia hết cho tích của chúng. Với $a=2$, ta có $B_n = 2^{4^n}+5$. ☺

Ví dụ 4.5. *1) Chứng minh rằng $3^{2^n}-1$ chia hết cho 2^{n+2} và không chia hết cho 2^{n+3} với n nguyên dương.*

2) Chứng minh rằng $2^{3^n}+1$ chia hết cho 3^{n+1} và không chia hết cho 3^{n+2} với n nguyên dương.

Lời giải. 1) Ta có

$$A_{n+1} = 3^{2^{n+1}} - 1 = (3^{2^n})^2 - 1 = (3^{2^n}-1)(3^{2^n}+1).$$

Với $n=1$ mệnh đề đúng. Giả sử $A_n = 3^{2^n}-1$ chia hết cho 2^{n+2}. Vì $3^{2^n}+1$ chia hết cho 2, nên A_{n+1} sẽ chia hết cho $2.2^{n+2} = 2^{n+3}$.

Mặt khác, ta giả sử $A_n = 3^{2^n}-1$ không chia hết cho 2^{n+3}. Nhưng $3^{2^n}+1$ không chia hết cho 4, vì $(3^{2^n}+1)-2 = 3^{2^n}-1$ chia hết cho 4 (thậm chí chia hết cho 4.2^n do phần trên. Vì vậy $(3^{2^n}+1)$ chia cho 4 dư 2) từ đây suy ra A_{n+1} không chia hết cho 2^{n+4}.

2) Chứng minh tương tự như phần trên. Ta sử dụng

$$\begin{aligned} 2^{3^{n+1}}+1 &= (2^{3^n})^3+1 = (2^{3^n}+1)(2^{2,3^n}-2^{3^n}+1) \\ &= (2^{3^n}+1)[(2^{3^n}+1)^2 - 3.2^{3^n}]. \end{aligned}$$

Số trong ngoặc vuông chia hết cho 3, không chia hết cho 9. ☺

Ví dụ 4.6. *1) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố, thì số $a^p - a$ chia hết cho p với mọi a (a là số nguyên dương).*

2) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố và a không chia hết cho p, thì số $a^{p-1}-1$ chia hết cho p (định lý Fermat).

Lời giải. 1) Với $a = 1$ mệnh đề là hiển nhiên, vì trong trường hợp này $a^p - a = 1 - 1 = 0$.

Giả sử mệnh đề đúng với một số a nào đấy, nghĩa là $a^p - a$ chia hết cho p. Ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng cho $a + 1$.

Thật vậy, áp dụng phân tích nhị thức Newton, ta nhận được

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + pf(a) + 1 - a - 1 = (a^p - a) + pf(a).$$

Ở đây $f(a)$ là đa thức bậc $p - 1$ theo a. Do áp dụng công thức hệ số Newton và nhóm các thừa số có p đưa ra ngoài lập ra $f(a)$. Mệnh đề đúng với $a + 1$, theo nguyên lý quy nạp toán học nó đúng với mọi $a \geq 1$.

2) Từ phần trước suy ra $a^p - a$ chia hết cho số nguyên tố p. Khi đó từ đẳng thức

$$a^p - a = a(a^{p-1} - 1).$$

Do điều kiện đầu bài a không chia hết p, nên $a^{p-1} - 1$ chia hết cho p.

Chú ý: Nếu ta đặt $a = 2, 3, \ldots, p - 1$, thì như hệ quả của kết luận trên các số $2^{p-1} - 1, 3^{p-1} - 1, \ldots, (p-1)^{p-1} - 1$ chia hết cho p hoặc là $2^{p-1}, 3^{p-1}, \ldots, (p-1)^{p-1}$ chia cho p dư 1.

Trong trường hợp này tổng $2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1}$ chia hết cho p, với p là số nguyên tố. ☺

4.2. Thuật toán Euclide

Cho $a > 0$ và $b > 0$ là những số nguyên. Tìm ước số chung lớn nhất của hai số đã cho được tìm theo thuật toán của Euclide như sau:

Để cho tiện đặt $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Chia số a cho số b được thương q_1 và số dư là r_2. Ta có thể viết

$$a = bq_1 + r_2, \quad (0 \leq r_2 < r_1).$$

Nếu $b > a$ ta có $q_1 = 0$ và $r_2 = a$. Nếu $r_2 = 0$, thì a chia hết cho b; trong trường hợp này ước số chung lớn nhất là b. Nếu $r_2 \neq 0$, ta tiến hành bước tiếp theo: Lấy b chia cho r_2, lần này ký hiệu thương và số dư là q_2 và r_3, ta có

$$b = r_2q_2 + r_3 \quad (0 \leq r_3 < r_2).$$

Nếu $r_3 = 0$, thì thuật toán dừng. Trường hợp ngược lại ta lại lấy r_2 chia cho r_3 được thương q_3 và số dư r_4, hay là $r_2 = r_3q_3 + r_4 \quad (0 \leq r_3 < r_2)$. Cứ tiếp tục như vậy, vì các số dư đều thuộc $[0, b)$ và $b > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$ dãy số giảm ngặt chứng tỏ sau một số bước (số bước không lớn hơn b) sẽ dẫn tới số dư bằng 0 và thuật toán sẽ dừng. Kết quả ta nhận được dãy

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1q_1 + r_2 \\
r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\
r_2 &= r_3q_3 + r_3 \\
&\ldots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= r_nq_n \quad (0 \leq r_i < r_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Trong công thức trên r_n là số dư cuối cùng khác 0.

Ví dụ 4.7. *Ta chứng minh rằng r_n là ước số chung lớn nhất của a và b.*

Lời giải. 1) Ta chỉ ra rằng r_n là ước số chung của a và b.

Do r_{n-1} chia hết cho r_n và công thức hồi quy

$$r_{i-1} = r_iq_i + r_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; r_{n+1} = 0). \tag{4.2}$$

Để đạt mục đích của ta thì phải chỉ ra r_n là ước số chung của tất cả $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_0$. đẳng thức cuối cùng của (4.1) cho ta thấy r_{n-2} chia hết cho r_n (vì r_{n-1} đã chia hết cho r_n). Giả sử với một số nào đó $i(1 \leq i \leq n-1)$ những số $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_i$ chia hết cho r_n. Khi đó từ (4.2) suy ra r_{i-1} chia hết cho r_n. Như vậy bằng quy nạp chúng ta kết luận $r_1 = b$ cũng chia hết cho r_n, còn đẳng thức đầu tiên của (4.1) cho ta r_n là ước số của a.

2) Ta chứng minh r_n là ước số chung lớn nhất của a và b.

Thật vậy, Ký hiệu d là ước số chung bất kỳ của a và b (nghĩa là r_0, r_1 có ước số chung d). Từ đẳng thức đầu tiên của (4.1) suy ra r_2 chia hết cho d. Vì thế d cũng là ước số chung của r_1 và r_2. Giả sử d là ước số chung của r_{i-1}, r_i với số $i(1 \leq i \leq n-1)$ nào đó; khi đó từ (4.1) suy ra d là ước số chung của r_{i+1}. Theo nguyên lý quy nạp toán học, d là ước số của r_n. Bằng cách này ta thấy rằng mọi ước số chung của a và b cũng là ước số chung của r_n, suy ra r_n là ước số chung lớn nhất. ☺

Dạng quy nạp toán học đi từ bước $i+1$ và i đến bước $i-1$ như trên gọi là *phép quy nạp ngược*.

Người ta có thể biểu diễn ước số chung lớn nhất bằng các tổ hợp tuyến tính của hai số a và b thông qua bài tập sau.

Ví dụ 4.8. *Cho a và b là hai số nguyên dương. Khi đó*

$$(a, b) = s_n a + t_n b$$

với $n = 0, 1, 2 \ldots$, s_n và t_n là những số hạng thứ n của dãy $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ xác định bởi

$$s_0 = 1, t_0 = 0, s_1 = 0, t_1 = 1$$

và

$$s_i = s_{i-2} - q_{i-1}s_{i-1},$$
$$t_i = t_{i-2} - q_{i-2}t_{i-1},$$

với $i = 2,3,\ldots,n$, *ở đây* q_i *là thương số thứ i trong thuật toán Euclide khi tìm ước số chung lớn nhất.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng

$$r_i = s_i a + t_i b, \tag{4.3}$$

với $i = 0,1,2\ldots,n$. Vì $(a,b) = r_n$ nên từ (4.3) có thể suy ra lời giải.

Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh (4.3). Với $i = 0$, ta có $a = r_0 = 1.a + 0.b = s_0 a + t_0 b$. Do đó (4.3) đúng với $i = 0$. Mặt khác $b = r_1 = 0.a + 1.b = s_1 a + t_1 b$, như vậy (4.3) cũng đúng với $i = 1$. Giả thiết $r_i = s_i a + t_i b$ đúng với mọi $i = 1,2,\ldots,k-1$. Khi đó, từ bước k trong thuật toán Euclide ta có

$$r_k = r_{k-2} - r_{k-1}q_{k-1}$$

theo giả thiết quy nạp suy ra

$$\begin{aligned} r_k &= (s_{k-2}a + t_{k-2}b) - (s_{k-1}a + t_{k-1}b)q_{k-1} \\ &= (s_{k-2} - s_{k-1}q_{k-1})a + (t_{k-2} - t_{k-1}q_{k-1})b \\ &= s_k a + t_k b. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 4.9. *Cho* a *là số tự nhiên,* $a > 1$. *Hãy tìm* $(a^m - 1, a^n - 1)$, *ở đây* m *và* n *là những số tự nhiên.*

Lời giải. Đặt $(n,m) = d$. Ta chứng minh rằng $(a^m - 1, a^n - 1) = (a^d - 1)$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $n \geq m$. Ta chứng minh quy nạp theo m. Với $m = 0$, đẳng thức hiển nhiên. Giả sử $m > 0$. Ta đặt $n = mq + r, \quad 0 \leq r < m$. Ta có

$$a^n - 1 = a^{mq}a^r - 1 = a^{mq}a^r - a^r + a^r - 1$$
$$= a^r(a^{mq} - 1) + (a^r - 1) = A(a^m - 1) + (a^r - 1),$$

ở đây A là số nguyên. Từ những đẳng thức này suy ra

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^m - 1, a^r - 1)$$

và theo giả thiết quy nạp toán học ta có

$$(a^m - 1, a^r - 1) = a^{(m,r)} - 1 = a^d - 1.$$ ☺

Ví dụ 4.10. *Chứng minh rằng bội số chung nhỏ nhất (BSCN) của dãy* $1, 2, \ldots, 2n$ *bằng bội số chung nhỏ nhất của* $n+1, n+2, \ldots, 2n$:

$$BSCN(1, 2, \ldots, n) = BSCN(n+1, n+2, \ldots, 2n).$$

Lời giải. Ta đặt $[1, 2, \ldots, 2n] = s$ và $[n+1, n+2, \ldots, 2n] = t$. vì s là một bội số chung của các số $n+1, n+2, \ldots, 2n$, còn t là bội số nhỏ nhất nên s chia hết cho t. Để chứng minh ngược lại t chia hết s ta phải chứng minh rằng mỗi số chia hết cho $n+1, n+2, \ldots, 2n$ cũng chia hết cho $1, 2, \ldots, n$. Ta sẽ chứng minh điều đó bằng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 1$ khẳng định là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đúng với n, ta chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Cho m là số chia hết cho $(n+1)+1, (n+1)+2, \ldots, 2(n+1)$. Từ m chia hết cho $2(n+1)$ nên m chia hết cho $n+1$ và suy ra m chia hết cho $n+1, n+2, \ldots, 2n$ (ta chỉ thêm vào đầu dãy các số mà theo giả thiết m đã chia hết). Theo giả thiết quy nạp m chia hết cho $1, 2, \ldots, n$, còn trước đó ta đã có m chia hết cho $n+1$. ☺

Ví dụ 4.11. *Chứng minh rằng tổng tất cả ước số của số tự nhiên $n > 2$ nhỏ hơn $n\sqrt{n}$.*

Lời giải. Ta ký hiệu tổng của tất cả ước số của số n bằng $D(n)$. Ta phải chứng minh rằng $D(n) < n\sqrt{n}$ với $n \geq 3$. Ta chọn trường hợp $n = 2^\alpha$ (α là số nguyên, $\alpha \geq 2$). Khi đó

$$\begin{aligned} D(n) &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^\alpha \\ &= 2^{\alpha+1} - 1 < 2^{\alpha+\frac{\alpha}{2}} = n\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Giả thiết rằng $n \neq 2^\alpha$ và $D(k) < k\sqrt{k}$ với mọi $3 \leq k < n$ và chúng ta sẽ chứng minh $D(n) < n\sqrt{n}$. Do những điều kể trên, ta có thể xét $n = mp$, ở đây p là số nguyên tố lẻ. Chú ý rằng $p \geq 3, 1 + p < p\sqrt{p}$ (thật vậy, với $p \geq 4$, $1 + \dfrac{1}{p} < 2 < \sqrt{p}$; với $p = 3$, $1 + 3 < 3\sqrt{3}$). Vì thế, nếu $m = 1$, thì $D(p) = 1 + p < p\sqrt{p}$; tương tự, nếu $m = 2$, thì $D(n) = 1 + 2 + p + 2p = 3 + 3p < 2p\sqrt{2p} = n\sqrt{n}$, nếu $m \geq 3$, thì theo giả thiết quy nạp $D(m) < m\sqrt{m}$. Như vậy mỗi ước số của n có dạng d hoặc dp, ở đây d là ước số của m, nên

$$\begin{aligned} D(n) &= D(m) + pD(m) = D(m)(1 + p) \\ &< m\sqrt{m}.p\sqrt{p} = n\sqrt{n}. \end{aligned}$$

☺

4.3. Số phức

Ta nhắc lại khái niệm cơ bản của số phức. Một số phức z có dạng đại số $z = x + iy$, ở đây x và y là những số thực, còn i là đơn vị ảo có tính chất $i^2 = -1$; số x gọi là phần thực, còn số y gọi là phần ảo của số phức z.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ là bằng nhau khi và chỉ khi $x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Nếu $x = y = 0$, thì $z = 0 + i0 = 0$. Mọi số thực có thể coi như là một số phức khi phần ảo của nó bằng 0.

Như vậy tập số thực chỉ là tập con của tập số phức. Những phép toán được định nghĩa trên tập số phức gồm:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Số $\bar{z}=x-iy$ gọi là *số liên hợp* của $z=x+iy$. Rõ ràng nếu z_1 là liên hợp của z_2, thì z_2 cũng liên hợp của z_1.

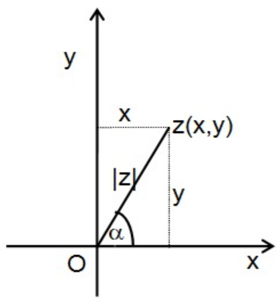
Số phức có liên hệ chặt chẽ với hệ tọa độ vuông góc như hình vẽ.

Mỗi số phức $z=x+iy$ biểu diễn như một điểm (x,y) trong hệ tọa độ vuông góc.

Độ dài từ điểm gốc tọa độ đến điểm số phức gọi là modun của z và được ký hiệu $|z|$. Từ hình vẽ ta thấy $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$. Góc giữa trục Ox và Oz đo theo chiều ngược kim đồng hồ gọi là argumen của z; và ký hiệu là $argz$. Rõ ràng

$$\begin{cases} x &= |z|\cos\alpha, \\ y &= |z|\sin\alpha, \end{cases}$$

ở đây $\alpha=argz$. Như vậy số phức $z=x+iy$ biểu diễn qua dạng lượng giác



Hình 4.1:

$$z=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha),\rho=|z|,\alpha=argz.$$

ở dạng lượng giác số phức, có nhiều thuận lợi trong các phép tính. Chẳng hạn ta lấy phép nhân hai số phức: $z_1=\rho_1(\cos\alpha_1+$

$i\sin\alpha_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
&z_1z_2 = \\
&= \rho_1\rho_2[(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_2\sin\alpha_1)] \\
&= \rho_1\rho_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)].
\end{aligned}$$

Công thức nhân và chia số phức ở dạng này khá đẹp. Kết quả tổng quát:

Ví dụ 4.12. *Cho những số phức*

$$\begin{aligned}
z_1 &= \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),\\
z_2 &= \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_n &= \rho_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n).
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
z_1z_2\dots z_n = \rho_1\rho_2\dots\rho_n(\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\\
i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)) \quad \textbf{(4.4)}
\end{aligned}$$

với $n = 2, 3, \dots$

Lời giải. Chứng minh đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo n. Với $n = 2$, công thức (4.4) đúng theo phép nhân hai số phức. Giả sử đẳng thức đúng cho một số n nào đó. Ta sẽ chứng minh đẳng thức (4.4) đúng cho $n+1$. Thật vậy, với $n+1$ số phức $z_\mu = \rho_\mu(\cos\alpha_\mu + i\sin\alpha_\mu)$, $\mu = 1, 2, \dots, n+1$. Sử dụng giả thiết quy nạp

$$\begin{aligned}
z_1z_2\dots z_nz_{n+1} = \rho_1\rho_2\dots\rho_n[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\\
+ i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)].\rho_{n+1}(\cos\alpha_{n+1} + i\sin\alpha_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\rho_{n+1}[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\cos\alpha_{n+1}\\
&\quad -\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\sin\alpha_{n+1}\\
&\quad + i[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\sin\alpha_{n+1}\\
&\quad + \sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\cos\alpha_{n+1}]\\
&= \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\rho_{n+1}[\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1})\\
&\qquad + i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1})].
\end{aligned}$$

☺

Trường hợp riêng $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ và $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \rho$ công thức vừa chứng minh trở thành

$$z^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Nếu điểm z nằm trên đường tròn đơn vị thì $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ và

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Công thức sau cùng gọi là *công thức Moivre*. Công thức Moivre có nhiều ứng dụng trong thực tế cũng như giải bài toán liên quan đến số phức. Nhiều bài toán rất hay nhưng không liên quan đến phương pháp quy nạp toán học tôi không xét đến ở đây[1] .

Ví dụ 4.13. *Chứng minh rằng nếu kết quả thực hiện một số hữu hạn phép tính (phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép chia) trên dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một số u, thì kết quả thực hiện cũng các phép tính đó trên dãy liên hợp $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ sẽ nhận được số $\bar{u}$ liên hợp của u.*

Lời giải. *Bước cơ sở:* Đầu tiên ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với từng phép tính trên hai số phức. Cho $x_1 = a + ib, x_2 = c + id$.

[1]Bạn đọc có thể tìm thấy một số ứng dụng của số phức trong [2].

khi đó

$$x_1 + x_2 = (a + c) + (b + d)i = u,$$
$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = (a - ib) + (c - id) = (a + c) - (b + d)i = \bar{u}.$$

Bằng phương pháp tương tự ta kiểm tra phép trừ, nhân, chia hai số phức, khẳng định đều đúng.

Bây giờ giả sử cho biểu thức hữu hạn các số phức $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Thực hiện tính toán biểu thức như vậy là thực hiện một dãy các phép tính trên hai số phức, việc thực hiện có thể đánh số thứ tự được. Chẳng hạn biểu thức

$$u = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{x_1 + x_2 - x_3}.$$

Để thực hiện u người ta thực hiện các bước sau:

$$\begin{aligned} 1)x_1x_2 &= u_1, & 4)u_3 - x_3 &= u_4, \\ 2)x_3x_4 &= u_2, & 5)u_1 + u_2 &= u_5, \\ 3)x_1 + x_2 &= u_3, & 6)u_5 : u_4 &= u. \end{aligned}$$

Giả sử mệnh đề đúng với tất cả các biểu thức mà trong sự tính toán đòi hỏi không quá k bước thực hiện, các bước thực hiện ở đây là: cộng, trừ, nhân hoặc chia hai số phức. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với các biểu thức đòi hỏi $k + 1$ bước thực hiện. Thật vậy, bước thực hiện cuối cùng $k + 1$ trên hai số u_i và u_j, mà những số này là kết quả của việc thực hiện không quá k phép tính. Kết quả khi ta thay $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng các số liên hợp của chúng thì theo giả thiết quy nạp các số u_i và u_j cũng thay bằng các số liên hợp của chúng trong kết quả thực hiện phép tính. Khi đó u cũng thay bằng số liên hợp của nó $\bar{u}$ trong bước thực hiện thứ $k + 1$. ☺

Ví dụ 4.14. *Cho z là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 + x + 1 = 0$. Chứng minh rằng với $n = 0, 1, \ldots$ ta có*

$$1 + z^n + z^{2n} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ không chia hết cho 3,} \\ 3, & \text{nếu } n \text{ chia hết cho 3.} \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của phương trình là $b_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta ký hiệu z là nghiệm bất kỳ của phương trình, nghĩa là $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\mu$, ở đây $\mu = 1$ khi $z = b_1$ và $\mu = -1$ khi $z = b_2$. Đặt $\alpha = \arg z (\pi \leq \alpha \leq \pi)$; bởi vì $|z| = 1$ nên $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ và $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu$, từ đây ta có $\alpha = \frac{2\pi}{3}\mu$. Suy ra z có biểu diễn lượng giác sau

$$z = \cos\frac{2\pi}{3}\mu + i\sin\frac{2\pi}{3}\mu.$$

Áp dụng công thức Moivre

$$\begin{aligned} \delta_n &= 1 + z^n + z^{2n} \\ &= 1 + (\cos\frac{2n\pi}{3}\mu + i\sin\frac{2n\pi}{3}\mu) + (\cos\frac{4n\pi}{3}\mu + i\sin\frac{4n\pi}{3}\mu). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức biến đổi lượng giác cho tổng cos và sin ta nhận được

$$\begin{aligned} \delta_n &= 1 + 2\cos n\pi\mu\cos\frac{n\pi}{3}\mu + 2i\sin n\pi\mu\cos\frac{n\pi}{3}\mu \\ &= 1 + (-1)^n 2\cos\frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

Ta chú ý $\cos n\pi\mu = \cos n\pi = (-1)^n, \sin n\pi\mu = 0$. Cho n chia hết cho 3. Khi đó $n = 3k$ (k là số tự nhiên) và

$$\begin{aligned} \delta_n = \delta_{3k} &= 1 + (-1)^{3k}.2\cos\frac{3k\pi}{3} \\ &= 1 + (-1)^k.2(-1)^k = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Ngược lại n có dạng $n = 3k + s$ ($s = 1$ và $s = 2$) và

$$\begin{aligned}\delta_n = \delta_{3k+s} &= 1 + (-1)^{3k+s}.2\cos\frac{(3k+s)\pi}{3}\\ &= 1 + (-1)^{k+s}.2(-1)^k.\cos\frac{s\pi}{3}\\ &= 1 + (-1)^{k+s}.2.(-1)^k.(-1)^{s+1}.\frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Vậy bài toán có thể viết lại dưới dạng

$$\delta_{3k+s} = 1 + z^{3k+s} + z^{6k+2s} = \begin{cases} 0, & s \neq 0, (k = 0, 1, \ldots; s = 1, 2) \\ 3, & s = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

Vì $1 + z + z^2 = 0$, nên $0 = (1 - z)(1 + z + z^2) = 1 - z^3$ suy ra $z^3 = 1$. Với $k = 0$ ta có $\delta_s = 1 + z^s + z^{2s}(s = 0, 1, 2)$; $\delta_0 = 1 + 1 + 1 = 3$, $\delta_1 = 1 + z + z^2 = 0$, $\delta_2 = 1 + z^2 + z^4 = 1 + z^2(1 + z^2$, ở đây đã áp dụng $1 + z^2 = -z$. Và như vậy với $k = 0$, (4.5) đúng. Giả sử bây giờ (4.5) đúng với $k \geq 0$ nào đó, ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng cho $k + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\delta_{3(k+1)+s} &= 1 + z^{3k+s+3} + z^{6k+2s+6} = 1 + z^{3k+s}z^3 + z^{6k+2s}z^6\\ &= 1 + z^{3k+s} + z^{6k+2s} = \delta_{3k+s},\end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng $z^3 = 1, z^6 = (z^3)^2 = 1$. ☺

4.4. Những ví dụ khác

Ví dụ 4.15. *Cho n và k là những số tự nhiên, $k \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại n số tự nhiên liên tiếp, mỗi số trong chúng phân tích ra tích ít nhất k thừa số nguyên tố.*

Lời giải. Với $k = 2$ khẳng định của bài toán có nghĩa là tồn tại n liên tiếp những hợp số. Dãy như vậy ví dụ như $(n+1)! + 2, (n +$

$1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$. Giả thiết với số k nào đó ta đã tìm được n số tự nhiên liên tiếp

$$N, N+1, \ldots, N+n-1$$

mỗi số này phân tích ra tích ít nhất k thừa số nguyên tố. Khi đó mỗi số trong những số sau

$$(N+n-1)! + N, (N+n-1)! + N+1, \ldots, (N+n-1)! + N+n-1$$

phân tích được ra ít nhất $k+1$ thừa số nguyên tố. Thật vậy, mỗi số trong các số $(N+n-1)! + N + i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ chia hết cho $N+i$, mà theo giả thiết quy nạp những số này phân tích được ra tích ít nhất k thừ số nguyên tố, còn số $\dfrac{(N+n-1)! + N + i}{N+i}$ hiển nhiên là khác 1. ☺

Ví dụ 4.16. *Cho m và n là những số tự nhiên. Chứng minh rằng ít nhất một trong các số $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ không vượt quá $\sqrt[3]{3}$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh với mọi số tự nhiên n có bất đẳng thức sau $3^n \geq n^3$. Chứng minh theo quy nạp toán học. Với $n = 1, 2, 3, 4$ ta có $3^1 \geq 1^3, 3^2 \geq 2^3, 3^3 \geq 3^3, 3^4 \geq 4^3$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k, (k \geq 4)$. Khi đó theo giả thiết quy nạp

$$3^{k+1} = 3.3^k \geq 3.k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + (k-3)k^2 + (k^2-3)k > (k+1)^3.$$

Vì $k > 3$, $(k-3)k^2 \geq 1, (k^2-3)k > 1$. Như vậy với mọi số tự nhiên n, ta có $3^n \geq n^3$ hoặc là $\sqrt[3]{3} \geq \sqrt[n]{n}$.

Cho m và n số tự nhiên và $n \geq m$. Khi đó

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}.$$ ☺

Ví dụ 4.17. *Bộ ba Pythagore là một bộ ba số tự nhiên (x, y, z), sao cho $x < y < z$ và $x^2 + y^2 = z^2$. Chứng minh rằng với số* *tự nhiên bất kỳ n, số 2^{n+1} có mặt trong n bộ ba Pythagore khác nhau.*

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp toán học theo n,

1) Với $n = 1$ kết luận hiển nhiên: Số 4 gặp 1 lần trong các bộ.

2) Giả sử mệnh đề đúng với bất kỳ $k \leq n$. Khi đó nếu bộ ba Pythagore (x, y, z) có chứa số 2^{n+2}, và những số x, y, z không nguyên tố cùng nhau, thì những số này có thừa số chung 2 và $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ là bộ ba Pythagore trong đó chứa số 2^{n+1}. Theo giả thiết quy nạp những bộ ba như vậy có số lượng n. Giả sử (x, y, z) bộ ba Pythagore , mà các số của chúng x, y, z nguyên tố cùng nhau, và một trong chúng bằng 2^{n+2}.

Theo điều kiện $x^2 + y^2 = z^2$. Vì thế nếu z là số chẵn thì x và y không chẵn (do chúng nguyên tố cùng nhau). Và suy ra x^2 và y^2 khi chia cho 4 cho dư 1. Khi đó $x^2 + y^2$ khi chia cho 4 cho số dư 2, nhưng trong khi đó z^2 chia hết cho 4. Dẫn đến vô lý. Suy ra z là số lẻ và trường hợp riêng $z \neq 2^{n+2}$.

Nhưng $x^2 = (z - y)(z + y)$, và nếu $x = 2^{n+2}$, thì $x^2 = 2^{2n+4} = (z - y)(z + y)$, từ đó $z - y = 2^k, z + y = 2^{2n+4-k}(0 \leq k \leq 2n + 4)$. Suy ra $z = \frac{1}{2}(2^k + 2^{2n+4-k})$. Như vậy z là lẻ, thì hoặc là $k = 1$, hoặc là $k = 2n + 3$. Trong trường hợp thứ nhất $z = 1 + 2^{2n+2}, y = 2^{2n+2} - 1$, $x = 2^{n+2}$ và như vậy $0 < 2^{n+2} < 2^{2n+2} - 1 < 2^{2n+2} + 1$ với $n \geq 1$, thì $(2^{n+2}, 2^{2n+2} - 1, 2^{2n+2} + 1)$ bộ ba Pythagore . Trong trường hợp thứ hai $z = 1 + 2^{2n+2}, y = 1 - 2^{2n+2}$. Như vậy trong trường hợp cuối cùng $y < 0$, thì tồn tại một bộ ba (x, y, z) sao cho x, y, z nguyên tố cùng nhau và $x = 2^{n+2}$.

Cuối cùng cho $y = 2^{n+2}$, khi đó lý luận tương tự như phần trên ta nhận được $z = 2^{n+2} + 1$ và hoặc là $x = 2^{2n+2} - 1$, hoặc là $x = 1 - 2^{2n+2}$. Nhưng với $n \geq 1$ trong trường hợp thứ nhất $x > y$, còn trường hợp thứ hai $-x < 0$.

Như vậy, tồn tại một bộ ba số Pythagore (x, y, z) sao cho x, y, z nguyên tố cùng nhau và có một số là 2^{n+2}. Vì thế tất cả cặp bộ ba trong nó chứa 2^{n+2}, bằng $n + 1$. ☺

Ví dụ 4.18. *Chứng minh rằng nếu* $a \equiv b \pmod{m}$, *thì* $a^{m^k} \equiv b^{m^k} \pmod{m^{k+1}}$, *ở đây* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Với $k = 0$ thì mệnh đề đúng hiển nhiên. Giả sử với một k nào đó, ta có $a^{m^k} \equiv b^{m^k} \pmod{m^{k+1}}$. Ta đặt $l = m^k$. Ta có

$$a^{m^{k+1}} - b^{m^{k+1}} = (a^l - b^l)(a^{l(m-l)} + a^{l(m-2)}b^l + \cdots + b^{l(m-1)}).$$

Vì theo giả thiết quy nạp, thừa số thứ nhất chia hết cho m^{k+1}, vậy chỉ còn chứng minh thừa số thứ hai chia hết cho m. Nhưng $a \equiv b \pmod{m}$, từ đó $a^l \equiv b^l \pmod{m}$ và $a^{l(m-1)} + a^{l(m-2)}b^l + \cdots + b^{l(m-1)} \equiv a^{l(m-1)} + a^{l(m-1)} + \cdots + a^{l(m-1)} \equiv ma^{l(m-1)} \equiv 0 \pmod{m}$. ☺

4.5. Bài tập

▷ **4.19.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

▷ **4.20.** Chứng minh rằng với số n nguyên dương

1) $A = n^7 + 6n$ chia hết cho 7;

2) $B = 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ chia hết cho 11;

3) $D = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ chia hết cho 54.

▷ **4.21.** Chứng minh rằng với n nguyên dương, số $2^{3n+3} - 7n + 41$ chia hết cho 49. Tổng quát: Với a, n là những số nguyên dương, biểu thức $A_n = (a+1)^n - an - 1$ chia hết cho a^2.

▷ **4.22.** Chứng minh rằng một số có số chẵn chữ số, chữ số đầu tiên và chữ số cuối cùng là 1, các số còn lại là 0, thì nó chia hết cho 11.

▷ **4.23.** Chứng minh rằng một số tạo bởi 3^n chữ số 1, chia hết cho 3^n.

▷ **4.24.** Chứng minh rằng với số tự nhiên $n \geq 2$, những số có dạng $N = 2^{2^n} + 1$ có chữ số cuối cùng là chữ số 7 (Số Fermat).

▷ **4.25.** Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sao cho $a_1 = a_2 = 1$ và $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Chứng minh rằng a_{5n} chia hết cho 5 với $n = 1, 2, \ldots$.

CHƯƠNG 5

DÃY SỐ

Phương pháp quy nạp toán học được áp dụng cho rất nhiều bài toán về dãy số. Kết hợp với các tính chất của bất đẳng thức và đẳng thức thì chứng minh bằng phương pháp này rất ngắn gọn và dễ hiểu.

5.1. Dãy số tự nhiên

Ví dụ 5.1. *Cho dãy vô hạn số tự nhiên $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ và thoả mãn bất đẳng thức sau*

$$a_n \leq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 2$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên dương có thể biểu diễn như tổng của một vài số được chọn trong dãy.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng mọi số tự nhiên N thoả mãn bất đẳng thức $0 < N < 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, có thể biểu diễn như một tổng của một vài số trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Với $n = 1$ mệnh đề đúng vì $a_1 = 1$, khi đó $0 < N < 1 + 1$ chỉ là $N = 1 = a_1$.

Giả sử mệnh đề đúng với số tự nhiên $n = k \geq 1$, nghĩa là mọi số tự nhiên N thoả mãn bất đẳng thức $0 < N < 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, có thể biểu diễn như một tổng của một vài số trong dãy $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Ta chỉ xét trường hợp sau đây là đủ

$$1 + a_1 + \cdots + a_k \leq N < 1 + a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}$$

vì nếu $0 < N < 1 + a_1 + \cdots + a_k$, thì mệnh đề đúng suy ra từ giải thiết quy nạp.

Do điều kiện đầu bài, ta nhận được

$$0 \leq 1 + a_1 + \cdots + a_k - a_{k+1} \leq N - a_{k+1} < 1 + a_1 + \cdots + a_k.$$

Nếu $N - a_{k+1} = 0$, thì mệnh đề đúng với $n = k + 1$; nếu $N - a_{k+1} > 0$, thì theo giả thiết quy nạp $N - a_{k+1}$ có thể biểu diễn như tổng của một vài số trong $a_1, a_2, \ldots, a_k$ và khi đó N biểu điễn như tổng trên và thêm vào a_{k+1}. ☺

Ví dụ 5.2. *Cho $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ là dãy số nguyên tố. Chứng minh rằng giữa hai số $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ và $p_1 + p_2 + \cdots + p_{n+1}$ luôn luôn có một số chính phương.*

Lời giải. Giả sử $2 = p_1 < p_2 < p_3 \ldots$ dãy số nguyên tố.

1) Ta chứng minh rằng với $n \geq 7$, $p_n > 2n + 1$: Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 7$, ta có $p_7 = 17 > 15$, mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng cho $n = k$, $p_k > 2k + 1$. Ta chứng

minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$, thật vậy, do p_n là số lẻ với mọi $n > 1$, nên $p_{k+1} - p_k \geq 2$, nghĩa là $p_{k+1} \geq p_k + 2 > 2k+1+2 = 2(k+1)+1$. Như vậy ta đã chứng minh đúng cho mọi $n \geq 7$, $p_n > 2n+1$.

2) Ta chứng minh với mọi n, $y_n \geq n^2$: Ký hiệu y_n là tổng

$$y_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n.$$

Ta có $y_1 = 2 > 1^2, y_2 = 5 > 2^2, y_3 = 10 > 3^3, y_4 = 17 > 4^2, y_5 = 28 > 5^2, y_6 = 41 > 6^6$ và $y_7 = 2+3+5+7+11+13+17 = 58 > 49 = 7^2$. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo n, với $n \geq 7$ ta có $y_n > n^2$.
Thật vậy, Giả sử với $n = k$, ta có $y_k > k^2$. Với $n = k+1$ ta tính $y_{k+1} = y_k + p_{k+1} > k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$, ta đã sử dụng kết quả phần trên và giả thiết quy nạp. Nghĩa là ta đã chứng minh với mọi n, $y_n \geq n^2$.

Lấy m^2 là số chính phương lớn nhất không lớn hơn y_n (có thể lấy được theo chứng minh trên và tiên đề thứ tự). Khi đó theo chứng minh trên $m \geq n$ hoặc là $m = n+k, k \geq 0$. Như vậy, với mọi $n \geq 1$ tồn tại số $k \geq 0$ sao cho

$$(n+k)^2 \leq y_n \leq (n+k+1)^2.$$

Ta sẽ chứng minh $p_{n+1} > 2(n+k)+1$. Giả sử ngược lại, ta có $p_{n+1} \leq 2(n+k)+1$. Nhưng với $n \geq 2$, $p_{n+1} \geq p_n + 2$. Suy ra

$$\begin{aligned}
p_n &\leq 2(n+k)+1-2 = 2(n+k)-1,\\
p_{n-1} &\leq 2(n+k)+1-4 = 2(n+k)-3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{n-j} &\leq 2(n+k)+1-2(j+1) = 2(n+k)-(2j+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$3 = p_2 \leq 2(n+k) + 1 - 2(n-1) = 2(n+k) - (2n-3),$$
$$2 = p_1 \leq 2(n+k) + 1 - 2n = 2(n+k) - (2n-1).$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} y_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n &\leq 2n(n+k) - (1 + 3 + \cdots + (2n-1)) \\ &= 2n(n+k) - n^2 = n^2 + 2nk + 1 - 1 = (n+k)^2 - 1. \end{aligned}$$

Nghĩa là $y_n \leq (n+k)^2 - 1$. Nhưng theo giả thiết $y_n \geq (n+k)^2$ và y_n là số nguyên. Dẫn đến vô lý. Suy ra $p_{n+1} > 2(n+k) + 1$. Khi đó

$$y_{n+1} = y_n + p_n > (n+k)^2 + 2(n+k) + 1 = (n+k+1)^2 > y_n,$$

nghĩa là

$$y_n < (n+k+1)^2 < y_{n+1}.$$

Suy ra $(n+k+1)^2$ nằm giữa y_n và y_{n+1}. ☺

Ví dụ 5.3. *Cho dãy số chia thành từng nhóm như sau:* $(1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10), (11,12,13,14,15), \ldots$ *Tính tổng* $S_1 + S_3 + S_5 + \cdots + S_{2n-1}$, *ở đây* S_k *là tổng những số của nhóm thứ* k.

Lời giải. Số đầu tiên của nhóm thứ k bằng

$$(1 + 2 + \cdots + (k-1)) + 1 = \frac{k(k-1)}{2} + 1.$$

Còn tổng của k số ở nhóm thứ k là

$$S_k = \frac{k(\frac{k(k-1)}{2} + 1 + \frac{(k+1)k}{2})}{2} = \frac{k^3 + k}{2}.$$

Bằng quy nạp toán học theo n, ta chứng minh rằng

$$S_1 + S_3 + \cdots + S_{2n-1} = n^4. \tag{5.1}$$

1) Với $n = 1$, ta có $S_1 = 1 = 1^4$.

2) Giả sử (5.1) đúng với n nào đấy, ta chứng minh cho $n+1$.

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_{2(n+1)-1} &= (S_1 + S_2 + \cdots + S_{(2n-1)}) + S_{2n+1} \\ &= n^4 + \frac{(2n+1)^3 + (2n+1)}{2} \\ &= n^4 + (2n+1)(2n^2+2n+1) \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = (n+1)^4. \end{aligned}$$

Đẳng thức (5.1) đúng với mọi n nguyên dương. ☺

Ví dụ 5.4. *Cho dãy số $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n, \ldots$ được xác định theo công thức sau: $F_1 = -1, F_2 = -1, F_n = -F_{n-1} - 2F_{n-2}$ với $n \geq 3$. Chứng minh rằng với $n \geq 2$ số $2^{n+1} - 7F_{n-1}^2$ là số chính phương.*

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp toán học theo n, mệnh đề sau: Với $n \geq 2$,

$$2^{n+1} - 7F_{n-1}^2 = (2F_n + F_{n-1})^2.$$

Thật vậy, $n = 2$ ta có $2^3 - 7 = (-2+1)^2$. Giả sử mệnh đề đúng với mọi $k \leq n$, ở đây $n \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} (2F_{n+1} + F_n)^2 &= (-2F_n - 4F_{n-1} + F_n)^2 = (-F_n - 4F_{n-1})^2 \\ &= F_n^2 + 8F_nF_{n-1} + 16F_{n-1}^2 \\ &= 2(4F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2) + 14F_{n-1}^2 - 7F_n^2 \\ &= 2(2F_n + F_{n-1})^2 + 14F_{n-1}^2 - 7F_n^2 \\ &= 2(2^{n+1} - 7F_{n-1}^2) + 14F_{n-1}^2 - 7F_n^2 \\ &= 2^{n+2} - 7F_n^2. \end{aligned}$$

Như vậy mệnh đề đúng với $k = n+1$. ☺

Ví dụ 5.5. *Cho $n \geq 1$ là một số tự nhiên. Định nghĩa dãy số $x_1, x_2, \ldots$ và $y_1, y_2, \ldots$ theo cách sau:*

$$x_1 = n, y_1 = 1, x_{i+1} = [\frac{x_i + y_i}{2}], y_{i+1} = [\frac{n}{x_{i+1}}] \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

$[x]$ *số nguyên lớn nhất không lớn hơn* x.

Chứng minh rằng $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = [\sqrt{n}]$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh với mỗi $i \quad (i = 1, 2, \ldots), x_i \geq [\sqrt{n}]$. Bất đẳng thức đúng với $i = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với $i = k$. Khi đó $x_k = [\sqrt{n}] + t, t \geq 0$,

$$y_k = [\frac{n}{[\sqrt{n}] + t}] \geq [\frac{[\sqrt{n}]^2}{[\sqrt{n}] + t}] \geq [\frac{[\sqrt{n}]^2 - t^2}{[\sqrt{n}] + t}] = [\sqrt{n}] - t$$

suy ra

$$x_{k+1} = [\frac{x_k + y_k}{2}] \geq [\frac{[\sqrt{n}] + t + [\sqrt{n}] - t}{2}] = [\sqrt{n}].$$

Khi đó theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức cần chứng minh đúng với mọi $i = 1, 2, \ldots$.

Giả sử với một số s nào đó có $x_s = [\sqrt{n}] + t$, ở đây $t \geq 1$ (điều này có thể được, chẳng hạn lấy $s = 1$). Ngoài ra nếu lấy $n = [\sqrt{n}]^2 + p$, ở đây số p thoả mãn $0 \leq p \leq 2[\sqrt{n}]$ (ta cũng lấy được do p là số tự nhiên và p thoả mãn như vậy vì nếu ngược lại thì dẫn tới điều vô lý $n \geq ([\sqrt{n} + 1]^2)$.

Khi đó

$$y_s = [\frac{n}{[\sqrt{n}] + t}] = [\frac{[\sqrt{n}]^2 + p}{[\sqrt{n}] + t}] \geq [\frac{[\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}]}{[\sqrt{n}] + 1}] = [\sqrt{n}]$$

vì

$$[\sqrt{n}] < [\frac{[\sqrt{n}]^2 + 2[\sqrt{n}]}{[\sqrt{n}] + 1}] < [\sqrt{n} + 1].$$

Từ $y_s \leq [\sqrt{n}] < [\sqrt{n}] + t = x_s$ ta nhận được $y_s \leq x_s - 1$ suy ra

$$x_{s+1} = [\frac{x_s + y_s}{2} \leq [\frac{2x_s - 1}{2}] = x_s - 1 < x_s.$$

Điều này nghĩa là khi $x_s > [\sqrt{n}]$ với $s = 1, 2, \ldots$ dãy $x_1, x_2, \ldots$ sẽ giảm thực sự và với s đủ lớn (nhưng nhỏ hơn n, vì $x_1 = n$) thì sẽ có đẳng thức $x_s = [\sqrt{n}]$. ☺

Ví dụ 5.6. *Cho dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ được định nghĩa theo đẳng thức sau: $a_k = k - 1$ với $k = 1, 2, 3, 4$ và $a_{2n-1} = a_{2n-2} + 2^{n-2}, a_{2n} = a_{2n-5} + 2^n$ với mọi $n \geq 3$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác không đẳng thức sau đúng:*

a) $1 + a_{2n-1} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n-1}\right]$; *b)* $1 + a_{2n} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n-1}\right]$.

Lời giải. Với $n = 1$ và $n = 2$ đẳng thức đúng với bằng cách kiểm tra trực tiếp. Giả sử hai đẳng thức trên đúng với hai số tự nhiên liên tiếp $n - 1$ và n. Ta sẽ chứng minh hai đẳng thức đúng cho giá trị tiếp theo $n + 1$.

Từ định nghĩa của dãy $1 + a_{2n+1} = 1 + a_{2n} + 2^{n-1}$. Chú ý tới đẳng thức b) cho giá trị n, ta có $1 + a_{2n+1} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n-1}\right] + 2^{n-1}$. Vì đẳng thức a) trong bài ▷2.4 nên có $1 + a_{2n+1} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n}\right]$ suy ra đẳng thức a) của bài toán với giá trị $n + 1$.

Từ định nghĩa của dãy $1 + a_{2n+2} = 1 + a_{2n-3} + 2^{n+1}$. Chú ý tới đẳng thức a) cho giá trị $n - 1$, ta có $1 + a_{2n+2} = \left[\dfrac{12}{7}.2^{n-2}\right] + 2^{n+1}$. Vì đẳng thức b) trong bài ▷2.4 nên có $1 + a_{2n+2} = \left[\dfrac{17}{7}.2^{n}\right]$ suy ra đẳng thức b) của bài toán với giá trị $n + 1$. ☺

5.2. Dãy trội hơn

Cho hai dãy

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{5.2}$$

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \tag{5.3}$$

Ta gọi dãy (5.2) trội hơn dãy (5.3) nếu chúng thoả mãn bất đẳng thức:

$$b_n \leq a_n, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.4}$$

Trong toán học thường dùng loại bất đẳng thức này, đặc biệt các bài toán về đánh giá một quá trình, tìm giới hạn, ...

Ví dụ 5.7. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{5.5}$$

Lời giải. Chứng minh quy nạp theo n. Bất đẳng thức (5.5) đúng với $n = 2$ suy ra từ

$$\frac{4^2}{2+1} - \frac{(2.2)!}{(2!)^2} = \frac{16}{3} - 6 < 0.$$

Giả sử (5.5) đúng với một số n nào đó. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng cho $n+1$,

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}. \tag{5.6}$$

Thật vậy, ta viết vế trái của (5.6) dưới dạng

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n}{n+1}\frac{4(n+1)}{n+2}.$$

Từ giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n}{n+1}\frac{4(n+1)}{n+2} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}.\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)},$$

mặt khác

$$0 < \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+5n+2} =$$
$$= \frac{(2n^2+5n+2)-n}{2n^2+5n+2} = 1 - \frac{n}{2n^2+5n+2} < 1$$

với $n = 1, 2, \dots$ và suy ra

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(n+2)} < \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}.$$ ☺

Ví dụ 5.8. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \qquad (n = 2, 3, \dots). \tag{5.7}$$

Lời giải. Với $n = 2$ ta có bất đẳng thức $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, bất đẳng thức này đúng qua kiểm tra trực tiếp. Giả sử (5.7) đúng với một giá trị n nào đó và ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n+1$, hoặc là

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}, (n = 2, 3, \dots). \tag{5.8}$$

Thật vậy, cộng hai vế bất đẳng thức (5.7) với số hạng $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, ta có

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{5.9}$$

Nhưng

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Từ đây và (5.9) suy ra (5.8). ☺

Ví dụ 5.9. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}\le\frac{(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)}{(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)},\tag{5.10}$$

ở đây $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ *là những số dương.*

Lời giải. Với $n=1$ bất đẳng thức đúng. Với $n=2$ ta có dạng

$$\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}\le\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)}\tag{5.11}$$

hoặc là

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)(a_1+b_1)(a_2+b_2)-a_1b_1(a_2+b_2)(a_1+a_2+b_1+b_2)-$$
$$-a_2b_2(a_1+b_1)(a_1+a_2+b_1+b_2)\ge 0$$

hoặc là $(a_1b_2-a_2b_1)^2\ge 0$ bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Giả sử (5.10) đúng với số tự nhiên $n\ge 2$ nào đó. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $n+1$. Sử dụng (5.10) và (5.11) ta có

$$\begin{aligned}\frac{a_1b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{a_n+b_n}+\frac{a_{n+1}.b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}&\le\\ \le\frac{(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)}{(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)}+\frac{a_{n+1}.b_{n+1}}{a_{n+1}+b_{n+1}}&\\ \le\frac{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})(b_1+\cdots+b_n+b_{n+1})}{(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})+(b_1+\cdots+b_n+b_{n+1})}.&\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 5.10. *Cho* $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\ge\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{x_1}{x_n}.$$

Lời giải. Với $n=2$ bất đẳng thức đúng. Với $n=3$ ta có

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_3}{x_2}-\frac{x_1}{x_3}=\frac{(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x}{x_1x_2x_3}\ge 0$$

bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k - 1$,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{k-1}}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_1}{x_{k-1}}.$$

Do chứng minh với trường hợp $n = 3$ nên ta có

$$\frac{x_1}{x_{k-1}} + \frac{x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_k}{x_1} \geq \frac{x_{k-1}}{x_1} + \frac{x_k}{x_{k-1}} + \frac{x_1}{x_k}.$$

Cộng hai bất đẳng thức sau cùng ta nhận được bất đẳng thức phải chứng minh cho $n = k$. ☺

Ví dụ 5.11. *Chứng minh rằng nếu tích n số thực dương bằng 1, thì tổng của chúng không nhỏ hơn n. Nói cách khác, cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những số dương, chứng minh rằng nếu $x_1x_2\ldots x_n = 1$ suy ra $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$*

Lời giải. Với $n = 2$, ta cần phải chứng minh từ $x_1x_2 = 1$ suy ra $x_1 + x_2 > 2$. Thật vậy, từ bất đẳng thức hiển nhiên $(x_1 - 1)^2 \geq 0$, suy ra $x_1^2 + 1 \geq 2x_1$, chia hai vế cho x_1 ta nhận được $x_1 + \dfrac{1}{x_1} \geq 2$, nghĩa là $x_1 + x_2 \geq 2$, đẳng thức xẩy ra khi $x_1 = 1$, do đó $x_1 = x_2 = 1$.

Giả sử mệnh đề đã chứng minh đúng cho $n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh đúng cho $n + 1$, nghĩa là sẽ chứng minh từ

$$x_1x_2\ldots x_nx_{n+1} = 1 \tag{5.12}$$

suy ra bất đẳng thức

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1. \tag{5.13}$$

Đẳng thức (5.12) chỉ xẩy ra hai trường hợp sau:

I. Tất cả các thừa số bằng nhau $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1$.

II. Không phải các số đều bằng nhau.

Trong trường hợp I. Ta có $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = n + 1$.

Trường hợp II. Trong các thừa số có thừa số lớn hơn 1 thì cũng có thừa số nhỏ hơn 1. Nếu không có đồng thời hai số có tính chất trên thì tích của chúng sẽ khác 1. Chẳng hạn $x_1 < 1, x_{n+1} > 1$. Khi đó ta có $y_1 x_2 x_3 \ldots x_n = 1$, ở đây ta đặt $y_1 = x_1 x_{n+1}$. Do giả thiết quy nạp đúng với n, nên ta có $y_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
x_1 + \cdots + x_{n+1} &= (y_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1} - y_1 + x_1 \\
&\geq n + x_{n+1} - y_1 + x_1 = (n+1) + x_{n+1} - y_1 + x_1 - 1 \\
&= (n+1) + x_{n+1} - x_1 x_{n+1} + x_1 - 1 \\
&= (n+1) + (x_{n+1} - 1)(1 - x_1).
\end{aligned}$$

Do ta có $x_{n+1} > 1$ và $x_1 < 1$ suy ra điều cần chứng minh. ☺

5.3. Những bất đẳng thức nổi tiếng

Bài tập về bất đẳng thức vô cùng phong phú và chủng loại khác nhau, đã có nhiều sách đề cập đến vấn đề này. Trong mục này chúng tôi chỉ liệt kê những bất đẳng thức cơ bản, tất cả đều được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 5.12. *(Bất đẳng thức Cauchy). Cho dãy số dương bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ chứng minh rằng*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{5.14}$$

Đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Lời giải. *Cách chứng minh thứ nhất:* Ta đặt $a = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ và đặt $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Khi đó đẳng thức (5.14) chỉ là hệ quả của bài ▷5.11. Thật vậy, $g^n = x_1 x_2 \ldots x_n$

suy ra $\frac{x_1}{g}.\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g} = 1$. Do kết quả bài toán trước ta số $\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \cdots + \frac{x_n}{g} \geq n$. Từ đó suy ra (5.14). Đẳng thức chỉ xẩy ra khi $\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \ldots = \frac{x_n}{g}$, nghĩa là $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Cách chứng minh thứ hai: Phương pháp chứng minh theo quy nạp dạng khác với bình thường do chính Cauchy đưa ra. Có thể nói đây là cách chứng minh quy nạp cho từng đoạn chứa các số tự nhiên.

Với $n = 1 = 2^0$ bất đẳng thức (5.14) đúng. Với $n = 2 = 2^1$, (5.14) suy ra từ $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$. Giả sử (5.14) đúng với số n. Khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} &= \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \cdots + \frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}}{n} \\
&\geq \sqrt[n]{\frac{x_1 + x_2}{2}.\frac{x_3 + x_4}{2}\ldots\frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}} \\
&\geq \sqrt[n]{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}\ldots\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \ldots x_{2n}}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (5.14) đúng với $2n$. Suy ra nó đúng với tất cả các số có dạng 2^{n-1} với mọi số tự nhiên n.

Với m là số tự nhiên. Nếu m có dạng 2^n với n là một số nào đó, thì (5.14) đúng. Vì vậy chỉ còn kiểm tra m nằm trong khoảng giữa 2^{n-1} và 2^n. nghĩa là $2^{n-1} < m < 2^n$. Ta đặt $m + q = 2^n$. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+q}}{m + q} \geq \sqrt[m+p]{x_1 x_2 \ldots x_{m+q}}.$$

Bây giờ ta đặt $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{m+q} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}$, khi đó

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m+q}+q\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}}{m+q}$$
$$\geq \sqrt[m+q]{x_1x_2\ldots x_m(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m})^q}$$

hoặc là

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right)^{m+q} \geq x_1x_2\ldots x_m\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right)^q,$$
$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right)^{m} \geq x_1x_2\ldots x_m.$$

Từ đây suy ra (4.13) đúng. Như vậy nó đúng với mọi số tự nhiên n.

Bây giờ ta chứng minh (5.14) xẩy ra đẳng thức chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, thật vậy, giả sử ít nhất có hai số trong $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chẳng hạn x_1 và x_2 không bằng nhau. Khi đó

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_1+x_2}{2}+x_3+\cdots+x_n}{n}$$
$$\geq \sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 x_3x_4\ldots x_n}.$$

Nhưng từ $x_1 \neq x_2$ suy ra

$$\frac{x_1+x_2}{2} > \sqrt{x_1x_2}$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta suy ra

$$(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}) > \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Như vậy mệnh đề được chứng minh. ☺

Chú ý: số $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ gọi là *trung bình cộng* của các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Còn số $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ gọi là *trung bình nhân* của các số đã cho.

Ví dụ 5.13. *(Bất đẳng thức Bernoulli). Chứng minh rằng với mọi $x > -1, x \neq 0$ và với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ bất đẳng thức sau đúng*

$$(1+x)^n > 1 + nx. \tag{5.15}$$

Lời giải. Với $n = 2$ bất đẳng thức (5.15) có dạng $1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ và đúng là hiển nhiên. Giả sử (5.15) đúng với một số $n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho $n+1$, nghĩa là phải chứng minh

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x.$$

Thật vậy, ta có

$$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2,$$

do $nx^2 > 0$ suy ra điều cần chứng minh. ☺

Chú ý: Bất đẳng thức Bernoulli còn đúng cho mọi số thực:

$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x, x \geq -1, \alpha > 1,$$

ở đây α là một số thực lớn hơn 1.

Ví dụ 5.14. *(Bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovski). Chứng minh rằng*

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \tag{5.16}$$

với $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ là những số thực và $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lời giải. Với $n = 1$, (5.16) đúng hiển nhiên. Với $n = 2$, ta có

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

từ đây suy ra bất đẳng thức (5.16) đúng với $n = 2$. Giả sử bất dẳng thức đúng với $n = k$, ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, do bất đẳng thức đúng với $n = 2$ và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k+1}^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{k+1}^2)\\
&\qquad \geq \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2} + x_{k+1}y_{k+1}\right)^2\\
&\qquad \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1})^2.
\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 5.15. *(Bất đẳng thức Chebychev). Cho dãy số $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1, y_2, ..., y_n$ là $2n$ số, sao cho thoả mãn*

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \\ y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Chứng minh rằng tích của trung bình cộng các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với trung bình cộng của các số $y_1, y_2, \ldots, y_n$ không vượt quá trung bình cộng của các số $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$, hoặc là

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \leq \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n}. \tag{5.18}$$

Lời giải. Ta đặt

$$\begin{aligned}
A_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
B_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n,\\
C_n &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,\\
D_n &= nC_n - A_nB_n.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Khi đó bất đẳng thức (5.18) có thể viết lại

$$D_n \geq 0 \text{ với } n = 1, 2, \ldots \tag{5.20}$$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1$. Khi đó

$$D_1 = 1C_1 - A_1B_1 = x_1y_1 - x_1y_1 = 0.$$

Như vậy (5.20) đúng với $n = 1$. Ta kiểm tra với $n = 2$,

$$\begin{aligned} D_2 &= 2C_2 - A_2B_2 = 2(x_1y_1 + x_2y_2) - (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0, \end{aligned}$$

vì $x_2 - x_1 \geq 0$ và $y_2 - y_1 \geq 0$ theo (5.17).

Như vậy nẩy ra câu hỏi là biểu diễn D_n theo các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ như thế nào? Ta phải làm thêm trường hợp riêng nữa với $n = 3$. Ta có

$$\begin{aligned} D_3 &= 3C_3 - A_3B_3 \\ &= 3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) - (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (2x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3) + (2x_2y_2 - x_2y_1 - x_2y_3) \\ &\quad + (2x_3y_3 - x_3y_1 - x_3y_2) \\ &= x_1(y_1 - y_2) + x_1(y_1 - y_3) + x_2(y_2 - y_1) + x_2(y_2 - y_3) + \\ &\quad + x_3(y_3 - y_1) + x_3(y_3 - y_2). \end{aligned}$$

Từ đây ta nhận được

$$D_3 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_1)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 - y_2).$$

So sánh hai trường hợp $n = 2, 3$ ta có thể giả thiết rằng

$$D_n = D_{n-1} + (x_n - x_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + \cdots + (x_n - x_1)(y_n - y_1). \tag{5.21}$$

Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp toán học. Với $n = 2, 3$ công thức (5.21) đúng. Giả sử nó đúng với một số n nào đó. Ta tính D_{n+1}

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= (n+1)C_{n+1} - A_{n+1}B_{n+1}\\
&= (n+1)(C_n + x_{n+1}y_{n+1}) - (A_n + x_{n+1)})(B_n + y_{n+1})\\
&= (nC_n - A_nB_n) + (C_n - B_nx_{n+1}) + (nx_{n+1}y_{n+1} - A_ny_{n+1}).
\end{aligned}$$

Nhưng $nC_n - A_nB_n = D_n$ mặt khác

$$\begin{aligned}
&C_n - B_nx_{n+1} =\\
&\quad = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - y_1x_{n+1} - y_2x_{n+1} - \cdots - y_nx_{n+1}\\
&\quad = -y_1(x_{n+1} - x_1) - y_2(x_{n+1} - x_2) - \cdots - y_n(x_{n+1} - x_n)
\end{aligned}$$

và

$$nx_{n+1}y_{n+1} - A_ny_{n+1} = nx_{n+1}y_{n+1} - x_1y_{n+1} - \cdots - x_ny_{n+1}$$

$$= (x_{n+1} - x_1)y_{n+1} + (x_{n+1} - x_2)y_{n+1} + \cdots + (x_{n+1} - x_n)y_{n+1}.$$

Và như vậy ta nhận được

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= D_n + [-y_1(x_{n+1} - x_1) - y_2(x_{n+1} - x_2) - \cdots - y_n(x_{n+1} - x_n)]\\
&\quad + [y_{n+1}(x_{n+1} - x_1) - y_{n+1}(x_{n+1} - x_2) - \cdots - y_{n+1}(x_{n+1} - x_n)]\\
&\quad = D_n + (x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) + \cdots + (x_{n+1} - x_1)(y_{n+1} - y_1).
\end{aligned}$$

Như vậy, bằng quy nạp ta kết luận rằng đẳng thức (5.21) đúng với mọi $n = 2, 3, \ldots$

Chú ý rằng điều kiện (5.17) suy ra bất đẳng thức

$$(x_{n+1} - x_n)(y_{n+1} - y_n) + \cdots + (x_{n+1} - x_1)(y_{n+1} - y_1) \geq 0$$

với mọi số tự nhiên $n > 1$. Từ đây và (5.21) ta nhận được bất đẳng thức

$$D_n \geq D_{n-1}, (n = 2, 3, \ldots). \tag{5.22}$$

Bây giờ (5.20) suy ra từ (5.22) và trường hợp $n = 1$. ☺

5.4. Dãy đơn điệu

Cho dãy số

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{5.23}$$

Ta gọi dãy (5.23) *bị chặn bên phải*, khi tồn tại hằng số a sao cho $a_n \leq a, (n = 1, 2, \ldots)$. Tương tự ta cũng định nghĩa bị chặn trái (khi đó $a_n \geq a$). Nếu một dãy bị chặn cả trái lẫn phải gọi là *dãy bị chặn*. Suy ra một dãy bị chặn khi và chỉ khi tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho $|a_n| \leq K, (n = 1, 2, \ldots)$. Dãy (5.23) gọi là *dãy tăng*, khi

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \tag{5.24}$$

và là dãy giảm khi

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \tag{5.25}$$

Một dãy mà nó có tính chất (5.24) hoặc (5.25) gọi là *dãy đơn điệu*. Ta biết rằng một dãy gọi là hội tụ khi n tiến tới vô cùng thì dãy đó tiến tới một giá trị hữu hạn. Ta có thể phát biểu một một định lý cơ bản:

Định lí 5.1: *Nếu một dãy đã cho là tăng (giảm) và bị chặn bên phải (bị chặn bên trái), thì nó hội tụ.*

Theo định lý trên nếu các điều kiện của định lý thoả mãn thì tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Theo định lý trên thì những số hạng của dãy không thoả mãn tính chất bị chặn, thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ với dãy tăng và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ với dãy giảm.

Những bài toán chứng minh tồn tại giới hạn của một dãy, tính giới hạn của dãy có thể dùng những quy tắc đã biết để tính. Nhiều khi ta phải áp dụng định lý cơ bản trên nhưng phải chứng minh dãy ta xét là đơn điệu và bị chặn. Để giải những bài toán về dãy đơn điệu thường áp dụng trực tiếp phương pháp quy nạp toán học.

Ví dụ 5.16. *Dãy số $a_1, a_2, \dots$ được xác định theo công thức*

$$a_{n+1} = a_n(2 - \alpha a_n), \tag{5.26}$$

ở đây α là một số dương, còn a_1 là một số bất kỳ trong $(0, \frac{1}{\alpha})$. Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lời giải. 1) Dãy đã cho là bị chặn: Từ (5.26) ta viết lại

$$a_{n+1} = \frac{1}{\alpha}[1 - (\alpha a_n - 1)^2]. \tag{5.27}$$

Bởi vì $\alpha > 0$ và $0 < a_1 < \frac{1}{\alpha}$, thì $(\alpha a_1 - 1)^2 < 1$ và từ (5.27) suy ra (với $n = 1$) $0 < a_2 < \frac{1}{\alpha}$. Cũng bằng phương pháp như vậy chứng minh rằng nếu a_n trong đoạn $(0, \frac{1}{\alpha})$, thì a_{n+1} cũng nằm trong đoạn này. Theo nguyên lý quy nạp toán học tất cả phần tử của dãy số đều nằm trong đoạn $(0, \frac{1}{\alpha})$. Suy ra dãy đã cho là bị chặn.

2) Tính đơn điệu: Ta lại có

$$a_{n+1} - a_n = a_n(2 - \alpha a_n) - a_n = a_n(1 - \alpha a_n) > 0,$$

vì $0 < a_n < \frac{1}{\alpha}$. Như vậy dãy đơn điệu tăng và ta có thể áp dụng định lý cơ bản, dãy đã cho hội tụ nghĩa là có giới hạn.

3) Tìm giới hạn: Do những lý luận phần trên ta gọi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ áp dụng vào (5.26) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n).(2 - \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n)$.

Ta nhận được $l = l(2 - \alpha l)$. Nghiệm của phương trình này là $l = 0$ hoặc là $l = \dfrac{1}{\alpha}$. Nhưng dãy số là tăng nên ta chỉ có thể lấy $l = \dfrac{1}{\alpha}$. ☺

Ví dụ 5.17. *Dãy số $a_1, a_2, \dots$ được xác định theo công thức*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\alpha}{a_n}\right), \tag{5.28}$$

ở đây α là một số dương, còn a_1 là một số dương bất kỳ. Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lời giải. 1) Dãy đã cho bị chặn dưới: Từ bất đẳng thức $\alpha > 0, a_1 > 0$ và (5.28) với $n = 1$ suy ra $a_2 > 0$. Giả thiết với một n nào đó $a_n > 0$; khi đó từ $\alpha > 0$ và (5.28) suy ra $a_{n+1} > 0$. Như vậy theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức $a_n > 0$ với $n = 1, 2, \ldots$

2) Dãy đã cho là đơn điệu giảm: Từ (5.28) và bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{\alpha}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n.\frac{\alpha}{a_n}} = \sqrt{\alpha}.$$

Điều này chứng tỏ rằng tất cả các số hạng không nhỏ hơn $\sqrt{\alpha}$. Mặt khác ta có

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n}) - a_n = \frac{\alpha - a_n^2}{2a_n},$$

$a_n > 0 (n = 1, 2, \ldots)$ và $\alpha - a_n^2 < 0$ (ít nhất với $n = 2, 3, \ldots$) suy ra $a_{n+1} < a_n$. Nghĩa là dãy giảm.

3) Tính giới hạn: Cũng như bài trước cho giới hạn trong (5.28) ta nhận được phương trình

$$l = \frac{1}{2}(l + \frac{\alpha}{l}),$$

từ đó tìm được giới hạn $l = \sqrt{\alpha}$ (còn trường hợp $l = -\sqrt{\alpha}$ không được). ☺

5.5. Số e

Một hằng số toán học rất quan trọng sau số π là số e. Số e được định nghĩa như là giới hạn của dãy

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n = 1, 2, \ldots \tag{5.29}$$

hoặc là

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n. \tag{5.30}$$

Ví dụ 5.18. *Dãy (5.29) là dãy tăng.*

Lời giải. Điều khẳng định không phải ngẫu nhiên: Khi n tăng số mũ trong (5.29) cũng tăng, nhưng phần cơ số giảm (nó tiến tới 1 và có giá trị lớn hơn 1). Để thuận tiện tính toán ta đưa vào số

$$p_{n,k} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n}), \tag{5.31}$$

với $n = 2, 3, \ldots; k = 2, 3, \ldots, n$.

Với $(0 < \alpha < n)$ ta có bất đẳng thức $0 < 1 - \frac{\alpha}{n} < 1 - \frac{\alpha}{n+1} < 1$ từ đó suy ra

$$0 < p_{n,k} < p_{n+1,k} < 1, \quad (n = 2, 3, \ldots; k = 2, 3, \ldots, n). \tag{5.32}$$

Khai triển theo nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} . \frac{1}{k!}, (n = 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Hoặc khi ta dùng (5.31), $(1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{p_{n,k}}{k!}$. Khi đó ta có thể viết (5.29) dưới dạng

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{p_{n,k}}{k!} \quad (n = 1, 2, \ldots; k = 2, 3, \ldots, n). \tag{5.33}$$

Ta có hiệu $a_{n+1} - a_n$ theo (5.33)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{p_{n+1,k}}{k!}) - (2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{p_{n,k}}{k!}) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{p_{n+1,k} - p_{n,k}}{k!} + \frac{p_{n+1,n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

và theo (5.32) ta có

$$a_{n+1} - a_n > \frac{p_{n+1,n+1}}{(n+1)!} > 0.$$

☺

Bây giờ, ta định nghĩa dãy $e_1, e_2, \ldots$ theo phương pháp sau:

$$e_1 = 2, e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}, \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{5.34}$$

Dễ thấy rằng dãy này là tăng. Từ (5.32) và (5.33) suy ra bất đẳng thức

$$a_n < e_n. \tag{5.35}$$

Bài tập tiếp sau chỉ ra dãy $e_1, e_2, \ldots$ là bị chặn và suy ra nó hội tụ. Từ đây và (5.35) suy ra $a_1, a_2, \ldots$ cũng bị chặn. Bằng cách này ta chứng minh được sự tồn tại giới hạn của dãy (5.30).

Ví dụ 5.19. *Chứng minh rằng những số hạng của dãy (5.34) thoả mãn*

$$e_n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}}, (n = 3, 4, \ldots). \tag{5.36}$$

Lời giải. Với $n = 3$ ta có $e_3 < 2,67 < 3 - \frac{1}{2^{3-1}} = 2,75$. Giả sử (5.36) thoả mãn với số n nào đấy. Ta sử dụng bất đẳng thức hiển nhiên $(n+1)! > 2^n$ với $n > 1$ và giả thiết quy nạp ta nhận được

$$\begin{aligned} e_{n+1} =& e_n + \frac{1}{(n+1)!} < (3 - \frac{1}{2^{n-1}}) + \frac{1}{(n+1)!} \\ &< 3 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 5.20. *Giới hạn của dãy (5.34) là số e.*

Lời giải. Ta đã chứng minh được rằng dãy $a_1, a_2, \ldots$ và $e_1, e_2, \ldots$ là hội tụ. Đặt $e^* = \lim\limits_{n\to\infty} e_n$. Từ (5.30) và (5.35) suy ra

$$e \leq e^*. \tag{5.37}$$

Ta sẽ chứng minh cùng với (5.37) cũng có

$$e^* \leq e,$$

Thật vậy, ta chọn số tự nhiên s trong khoảng $(1, n)$. Nếu bên phải của (5.33) ta bỏ đi $\dfrac{p_{n,s+1}}{(s+1)!}, \ldots, \dfrac{p_{n,n}}{n!}$, ta sẽ nhận được một số nhỏ hơn a_n, nghĩa là

$$2 + \sum_{k=2}^{s} \frac{p_{n,k}}{k!} < a_n, \quad (n = 3, 4, \ldots; s = 2, 3, \ldots, n-1). \tag{5.38}$$

Ta xét đẳng thức (5.31). Khi n tiến tới vô cùng, còn k cố định, mỗi thừa số tiến tới 1. Vì thế $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n,k} = 1$. Nếu ta cho n tiến tới vô cùng trong (5.38) ta sẽ nhận được

$$e_s = 2 + \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!} \leq e \quad (s = 2, 3, \ldots).$$

Như vậy dãy tăng $e_1, e_2, \ldots$. bị chặn từ phía phải số e, từ đó suy ra bất đẳng thức (5.38). Khẳng định suy ra từ (5.36) và (5.37).

☺

Như vậy số e có thể tính toán đến độ chính xác nào đấy theo công thức trên

$$e_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, (n = 2, 3, \ldots).$$

Từ bất đẳng thức $a_n < e_n < e$ ta thấy rằng với mỗi n cố định số e_n gần đúng e. Số e_n gọi là xấp xỉ thứ n của e, còn hiệu

$$\delta_n = e - e_n \tag{5.39}$$

gọi là *sai số* của e.

Ví dụ 5.21. *Chứng minh những bất đẳng thức sau*

$$e_i - e_n \leq \frac{2}{(n+1)!}.(1 - \frac{1}{2^{i-n}}), \quad n = 2,3,\ldots; i = n, n+1, \ldots \tag{5.40}$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh (5.40) bằng quy nạp đối với i. Với $i = n$ thì $0 \leq 0$ (5.40) đúng. Giả sử (5.40) đúng với số i nào đó, ta cần phải chứng minh nó cũng đúng với $n = i + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} e_{i+1} - e_n &= \left(e_i + \frac{1}{(i+1)!}\right) - e_n = (e_i - e_n) + \frac{1}{(i+1)!} \\ &\leq \frac{2}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{2^{i-n}}\right) + \frac{1}{(i+1)!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{2^{i-n}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(i+1)}\right). \end{aligned}$$

Tích $(n+2)(n+3)\ldots(i+1)$ có $i - n$ thừa số, mỗi thừa số lớn hơn 2. Khi đó $2(n+2)(n+3)\ldots(i+1) > 2^{i-n+1}$, ở đây $e_{i+1} - e_n < \frac{2}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{2^{i-n}} + \frac{1}{2^{i-n+1}}) = \frac{2}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{2^{(i+1)-n}})$. Như vậy, (5.40) đúng với mọi $i = n, n+1, \ldots$ ☺

5.6. Dãy số Fibonacci

Một dãy số $u_1, u_2, \ldots$ được định nghĩa bằng công thức

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{5.41}$$

và

$$u_1 = 1, u_2 = 1. \tag{5.42}$$

Những số $u_1, u_2, u_3, \ldots$ gọi là *số Fibonacci*. Dãy số này có rất nhiều ứng dụng trong bài toán thực tế. Theo đẳng thức (5.41) mọi số kể từ số thứ ba đều là tổng của hai số trước đó. Những số đầu tiên là 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Những bài tập sau liên quan đến các tính chất của dãy số này có chứng minh bằng quy nạp toán học, còn các tính chất khác của dãy số này thì rất nhiều và chứng minh bằng các cách khác nhau.

Ví dụ 5.22. *Tổng của n số đầu tiên bằng số thứ $n+2$ trừ đi 1, hoặc là*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1 \quad (n > 1). \tag{5.43}$$

Lời giải. Với $n = 2$ đẳng thức đúng vì theo (5.41) và (5.42) ta có

$$u_1 + u_2 = 1 + 1 = 3 - 1 = u_4 - 1.$$

Giả sử (5.43) đúng với số tự nhiên n nào đó. Từ giả thiết quy nạp và công thức (5.41) với tổng của $n+1$ số Fibonacci ta có :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1} &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + u_{n+1} \\ &= (u_{n+2} - 1) + u_{n+1} \\ &= u_{n+1} + u_{n+2} - 1 = u_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

☺

Ví dụ 5.23. *Chứng minh rằng đẳng thức*

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \tag{5.44}$$

đúng với số tự nhiên bất kỳ $n > 1$ và với mọi $m = 1, 2, \ldots$

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán theo m. Với $m = 1$ ta có

$$u_{n-1}u_1 + u_n u_2 = u_{n-1} + u_n = u_{n+1},$$

và với $m = 2$:

$$\begin{aligned} u_{n-1}u_2 + u_n u_3 &= u_{n-1} + 2u_n \\ &= (u_{n-1} + u_n) + u_n \\ &= u_{n+1} + u_n = u_{n+2}, \end{aligned}$$

đẳng thức (5.44) đều đúng. Giả sử với số m nào đó các đẳng thức sau đúng

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \\ u_{n+m+1} &= u_{n-1}u_{m+1} + u_n u_{m+2} \end{aligned} \tag{5.45}$$

Ta sẽ chứng minh đẳng thức sau đúng

$$u_{n+m+2} = u_{n-1}u_{m+2} + u_n u_{m+3}. \tag{5.46}$$

Thật vậy, cộng từng vế của hai đẳng thức trong (5.45) ta nhận được

$$u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n-1}(u_{m+1} + u_m) + u_n(u_{m+2} + u_{m+1})$$

đây chính là đẳng thức (5.46) khi ta biến đổi và áp dụng (5.41).

☺

Ví dụ 5.24. *Chứng minh rằng mọi số Fibonacci có thể biểu diễn dưới dạng*

$$u_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{5.47}$$

Lời giải. Với $n = 1$ và $n = 2$ ta nhận được $u_1 = 1$ và $u_2 = 1$. Giả sử với một số n nào đó có u_n và u_{n+1} theo công thức (5.47) là số hạng thứ n và $n + 1$ của dãy Fibonacci. Ta sẽ chứng minh rằng số hạng thứ $n+2$ của dãy cũng biểu diễn theo công thức (5.47). Để cho gọn ta ký hiệu

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Khi đó $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$, $u_{n+1} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$. Do cách đặt ta có $\alpha + \beta = 1$ và $\alpha\beta = -1$. Suy ra α và β là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Khi đó $\alpha^2 = \alpha + 1, \beta^2 = \beta + 1$. Như vậy ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n &= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha+1) - \beta^n(\beta+1)}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Theo quy nạp toán học biểu diễn u_n bằng (5.47) đúng với mọi n.

☺

Ví dụ 5.25. *Chứng minh rằng*

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 2$. α như ở bài tập trước.

Lời giải. Với $n = 2, 3$ đẳng thức đúng. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ và $n = k+1$, nghĩa là

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1},$$

$$\alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k.$$

Ta cộng hai đẳng thức lại kết quả nhận được

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\alpha + (u_{k-1} + u_k),$$

hoặc là

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1}.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học đẳng thức trong bài cho là đã đúng. ☺

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\beta^n = u_n\beta + u_{n-1}.$$

Ví dụ 5.26. *Chứng minh rằng $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$ với $n > 1$.*

Lời giải. Với $n = 2$, ta có $u_2^2 = u_1u_3 - 1$ đẳng thức đúng.

Giả sử rằng $u_k^2 - u_{k-1}u_{k+1} = (-1)^k$, ta cần chứng minh đẳng thức trên cũng đúng cho $n = k+1$, nghĩa là $u_{k+1}^2 - u_ku_{k+2} = (-1)^{k+2}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}
u_{k+1}^2 - u_ku_{k+2} &= u_{k+1}^2 - u_k(u_{k+1} + u_k)\\
&= u_{k+1}(u_{k+1} - u_k) - u_k^2 = u_{k+1}u_{k-1} - u_k^2\\
&= -(u_k^2 - u_{k+1}u_{k-1}) = -(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}.
\end{aligned}$$ ☺

Ví dụ 5.27. *Chứng minh rằng nếu n chia hết cho m, thì u_n chia hết cho u_m.*

Lời giải. Vì n chia hết cho m, nên ta có thể viết $n = mk$. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$, khi đó $n = m$ như vậy u_n chia hết cho u_m là hiển nhiên. Giả sử u_{mk} chia hết cho u_m, ta xét $u_{m(k+1)}$. Nhưng $u_{m(k+1)} = u_{mk+m}$ và theo công thức (5.44) ta có

$$u_{m(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}.$$

Số hạng thứ nhất có chứa u_m nên nó chia hết cho u_m, còn số hạng thứ hai theo giả thiết quy nạp u_{mk} chia hết cho u_m. Như vậy tổng của hai số hạng chia hết cho u_m, suy ra $u_{m(k+1)}$ chia hết cho u_m. ☺

5.7. Bài tập

▷ **5.28.** Hãy tìm ước số chung lớn nhất của các số

$$2^{2^2} + 2^{2^1} + 1; 2^{2^3} + 2^{2^2} + 1; \dots ; 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1; \dots$$

▷ **5.29.** Chứng minh rằng nếu p_n là số nguyên tố thứ n, thì $p_n < 2^{2^n}$.

▷ **5.30.** Chứng minh rằng nếu $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \frac{\pi}{2}$, thì

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin \beta_i - \sin \alpha_i) \leq \sin(\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)).$$

▷ **5.31.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} > \frac{13}{24}, \quad n = 2, 3, \dots$$

▷ **5.32.** Tìm giới hạn của dãy

$$a_1 = \sqrt{c}, a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, a_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \dots$$

ở đây c là hằng số dương.

CHƯƠNG 6
HÌNH HỌC

Phương pháp quy nạp toán học áp dụng rất nhiều trong các bài tập hình học. Bạn đọc có thể tìm thấy trong [7] những khía cạnh cần thiết cho phương pháp này trong hình học. Ta chỉ liệt kê dưới đây một số bài rất điển hình.

6.1. Ví dụ quy nạp toán học cho hình học

Ví dụ 6.1. *Trong mặt phẳng cho n hình lồi ($n > 3$), mỗi cặp ba trong chúng có điểm chung. Chứng minh rằng tồn tại điểm, mà nó nằm trên tất cả các hình.*

Lời giải. 1. Với $n = 4$, ta ký hiệu những hình bằng C_1, C_2, C_3, C_4. Cho $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = A_4$, $C_1 \cap C_2 \cap C_4 = A_3$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4 = A_2$, $C_2 \cap C_3 \cap C_4 = A_1$.

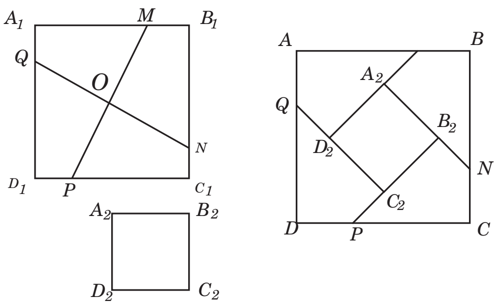
a. Nếu A_4 nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$, thì bởi vì $A_1A_2A_3 \subset C_4$, ta có $A_4 \in C_4$ và suy ra $A_4 \in C$, ở đây C ký hiệu là giao của các hình C_1, C_2, C_3, C_4.

b. Nếu $A_1A_2A_3A_4$ là tứ giác lồi và A là điểm cắt của các đường chéo của chúng, thì dễ thấy rằng $A \in C$.

2. Giả sử đã chứng minh cho khẳng định đúng với $n-1$. Ta xét n hình $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Lấy $C = C_{n-1} \cap C_n$. Ta xét dãy $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C$. Ta sẽ chứng minh mọi cặp ba các hình này đều cắt nhau. Thật vậy, nếu giữa ba hình cắt nhau không là C, thì điều kết luận trên hiển nhiên đúng. Nếu C nằm trong số ba hình và ví dụ như C_1, C_2, C, thì vì thế những hình C_1, C_2, C_{n-1}, C_n có điểm chung X (theo chứng minh tại điểm 1.). Suy ra $X \in C_{n-1} \cap C_n = C$. Từ đây khẳng định của bài toán suy ra bằng quy nạp. ☺

Ví dụ 6.2. *Cho n hình vuông bất kỳ. Chứng minh rằng ta có thể cắt chúng ra thành một số phần để từ các phần đó ta có thể ghép lại thành một hình vuông mới.*

Lời giải. Khi $n = 1$, điều khẳng định là hiển nhiên.



Hình 6.1:

Ta chứng minh rằng khi $n = 2$, điều khẳng định đó cũng đúng. Gọi độ dài các cạnh của hai hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$ tương ứng là x_1 và x_2. Giả sử $x_1 \geq x_2$. Trên các cạnh của hình $A_1B_1C_1D_1$ với cạnh x_1 ta đặt các đoạn $A_1M = B_1N = C_1P = D_1Q = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ và cắt hình vuông đó theo các đường

MP và NQ, rõ ràng MP và NQ cắt nhau tại O của hình vuông và tạo với nhau một góc vuông. Các đường đó chia hình vuông thành 4 phần bằng nhau những hình đó ghép vào hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ như hình bên. Hình nhận được sẽ là hình vuông vì các giá trị góc M, N, P, Q bù nhau, các góc A, B, C, D là vuông và $AB = BC = CD = DA$.

Giả sử mệnh đề đã được chứng minh đối với n hình vuông và giả sử ta có $n+1$ hình vuông $V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$. Ta lấy ra bất kỳ hai hình vuông, chẳng hạn V_n và V_{n+1} như đã chứng minh ở trên sau khi đã cắt một hình vuông và ghép vào hình vuông thứ hai ta được một hình vuông mới V'. Do vậy ta có n hình vuông $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V'$ theo giả thiết quy nạp có thể cắt ra được các phần và từ các phần đó có thể ghép lại thành một hình vuông mới. ☺

Ví dụ 6.3. *Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm, tất cả không nằm trên đường thẳng. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng nối hai điểm trong các điểm đã cho tạo ra số đường thẳng khác nhau không nhỏ hơn n.*

Lời giải. Với $n = 3$ điểm, mệnh đề hiển nhiên đúng: Ba điểm không nằm trên một đường thẳng nối từng đôi với nhau tạo ra ba đường thẳng khác nhau.

Giả sử mệnh đề đúng với $n \geq 3$ điểm. Ta chứng minh nó cũng đúng với $n+1$ điểm. Ta có thể chứng minh rằng tồn tại ít nhất một đường thẳng chỉ chứa hai điểm. Ta ký hiệu đường thẳng đi qua hai điểm A_n và A_{n+1} là A_nA_{n+1}. Nếu những điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nằm trên một đường thẳng, thì số lượng các đường thẳng sẽ đúng là $n+1$: Gồm n đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và đường thẳng chúng nối chung. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ không nằm trên một đường thẳng, thì theo giả thiết quy nạp có n đường thẳng khác nhau. Bây giờ ta thêm các đường thẳng nối A_{n+1} với các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Vì đường thẳng $A_n A_{n+1}$ không chứa một điểm nào trong $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, thì đường thẳng này khác hoàn toàn với n đường thẳng tạo ra bởi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Như vậy số đường thẳng tạo ra cũng không nhỏ hơn $n+1$. ☺

Ví dụ 6.4. *Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm. Đường kính của một hệ thống điểm là đoạn thẳng nối hai điểm trong hệ thống và độ dài d của đoạn này là lớn nhất. Chứng minh rằng số đường kính không vượt quá n.*

Lời giải. Nếu xuất phát từ một điểm A của hệ đã cho, ta có ba đường kính AB, AC và AD. Khi đó dễ thấy ba điểm B, C và D sẽ nằm trên đường tròn $k_1(A, d)$. Tất cả những điểm còn lại của hệ thống sẽ nằm hoặc trên k_1 hoặc bên trong nó. bởi vì mỗi đoạn thẳng BC, BD và CD không lớn hơn d, thì những điểm B, C và D sẽ nằm trên cung của k_1, tương ứng góc không lớn hơn 60^0. Gọi điểm C bên trong cung $\overset{\frown}{BD}$, với nó $\overset{\frown}{BD} \leq 60^0$.Ta vẽ đường tròn $k_2(C, d)$; Những điểm cuối của tất cả đường kính của hệ đã cho xuất phát từ C, phải nằm trên cung $\overset{\frown}{MN}$ của k_2 (M, N là giao điểm của k_1 và k_2) và nằm trong hình tròn k_1. Nhưng mỗi điểm của cung $\overset{\frown}{MN}$, ngoài A, đứng cách xa những điểm B hoặc D một khoảng cách lớn hơn d, từ đó suy ra CA là đường kính duy nhất, xuất phát từ C.

Như vậy ta kết luận rằng với một hệ đã cho n điểm, tồn tại hai khả năng: hoặc là trong hệ có một điểm, từ nó xuất phát không quá một đường kính, hoặc là từ mỗi điểm đều xuất phát đúng hai đường kính.

Khẳng định của bài toán chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 3$ khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử nó đúng với $n = k \geq 3$. Ta sẽ chứng minh nó còn đúng cả với hệ có $n = k + 1$ điểm.

Thật vậy, nếu trong hệ có $k + 1$ điểm: $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ có điểm, ví dụ A_1, từ nó không xuất phát đường kính hoặc từ nó xuất phát chỉ một đường kính, thì số lượng những đường kính của hệ này nhiều hơn số lượng đường kính của hệ $A_2, A_3, \ldots, A_{k+1}$ nhiều nhất là 1, nghĩa là số lượng đường kính của hệ ta đang xét không lớn hơn $k + 1$. Nếu một điểm như vậy không tồn tại, thì từ mỗi điểm A_i xuất phát đúng hai đường kính và từ đó suy ra số lượng đường kính bằng $\dfrac{2(k+1)}{2} = k + 1$, Như vậy kết luận của bài toán đúng với mọi n. ☺

Ví dụ 6.5. *Chứng minh rằng n đường thẳng trong một mặt phẳng chia mặt phẳng ra những miền khác nhau, có thể tô màu trắng hoặc đen cho mỗi miềm sao cho những miền cạnh nhau khác màu nhau.*

Lời giải. 1) Đường thẳng AB chia mặt phẳng P ra hai nửa mặt phẳng P_1 và P_2. Tô P_1 màu trắng, P_2 màu đen và như vậy thoả mãn đòi hỏi bài toán. Với $n = 1$ mệnh đề được chứng minh.

2) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ và mặt phẳng P được tô màu như yêu cầu bài toán. Đường thẳng thứ $k + 1$, CD chia mặt phẳng P ra hai nửa Q_1 và Q_2. Tất cả các phần trong Q_1 ta giữ nguyên màu đã tô, còn trong nửa Q_2 mỗi phần ta thay trắng thành đen và đen thành trắng.

Giả sử O_1 và O_2 là hai phần bất kỳ cạnh nhau, sau khi kẻ đường CD. Chỉ có một trong hai khả năng sau xảy ra:

a) O_1 và O_2 nằm trên phần khác nhau của CD,

b) O_1 và O_2 nằm trên cùng một phía của CD.

Trường hợp a) O_1 và O_2 sau khi kẻ k đường thẳng đầu tiên, nhưng CD chưa kẻ thì chúng là một miền và được tô cùng một màu. Nhưng sau khi kẻ CD thì một miền Q_1 giữ nguyên màu , còn phần kia O_2 được đổi màu theo cách dựng. Nghĩa là O_1 và O_2 khác màu nhau.

Trường hợp b) Sau khi vẽ k đường thẳng, mà CD còn chưa kẻ , khi đó O_1 và O_2 là hai miền cạnh nhau do k đường thẳng tạo ra, theo giả thiết quy nạp chúng khác màu nhau. Sau khi kẻ đường thẳng CD, nếu O_1 và O_2 nằm cùng phía với Q_1 , thì màu của chúng không đổi, vẫn khác màu nhau. Nếu chúng nằm cùng phía với Q_2, thì màu của mỗi miền đều đổi. Như vậy mọi trường hợp O_1 và O_2 đều có hai màu khác nhau. ☺

Ví dụ 6.6. *Chứng minh rằng nếu n mặt phẳng đi qua một điểm sao cho không có ba mặt phẳng nào có chung một đường thẳng, thì chúng chia không gian ra $A_n = n(n-1)+2$ phần.*

Lời giải. 1) Một mặt phẳng chia không gian làm hai phần và $A_1 = 2$. Với $n = 1$ mệnh đề đúng.

2) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, hoặc là k mặt phẳng chia không gian ra $k(k-1)+2$ phần. Ta sẽ chứng minh $k+1$ chia không gian ra $k(k+1)+2$ phần.

Thật vậy, Giả sử P là mặt phẳng thứ $k+1$. Mỗi mặt phẳng trong k mặt phẳng cắt mặt phẳng P một đường thẳng nào đó sao cho mặt phẳng P bị chia ra những phần từ k đường thẳng khác nhau đi qua cùng một điểm. Theo bài trước mặt phẳng P được chia ra $2k$ phần, mỗi phần là góc trong mặt phẳng với đỉnh là điểm đã cho.

k mặt phẳng đầu tiên chia không gian thành một số góc đa diện. Một số góc này bị chia ra làm hai phần bởi mặt phẳng P.

Với mặt chung của hai phần có phần của mặt phẳng giới hạn bởi hai tia mà theo nó P cắt những mặt của góc đa diện một trong $2k$ góc mặt phẳng, mà nó chia ra bởi mặt phẳng P.

Điều này có nghĩa là số góc đa diện, mà bị chia làm hai phần bởi P, không thể lớn hơn $2k$.

Mặt khác, mỗi phần trong $2k$ phần, mà nó bị chia do P cắt k mặt phẳng đầu tiên, là mặt chung của hai góc đa diện và nghĩa là chia góc đa diện tạo bởi k mặt phẳng ra làm hai phần.

Điều này có nghĩa số lượng những góc đa diện, mà nó bị chia ra làm hai phần bởi P, không thể nhỏ hơn $2k$.

Vì mặt phẳng P chia đúng $2k$ phần của không gian tạo bởi k mặt phẳng. Vì thế nếu k mặt phẳng chia không gian ra $k(k-1)+2$ phần, thì $k+1$ mặt phẳng sẽ chia nó ra

$$[k(k-1)+2]+2k = k(k+1)+2$$

phần. ☺

Ví dụ 6.7. *$8n-4$ điểm nằm ở dạng chữ thập (hình vẽ với $n=4$). Có bao nhiêu khả năng để chọn bốn điểm trong chúng để tạo thành đỉnh hình vuông ?*

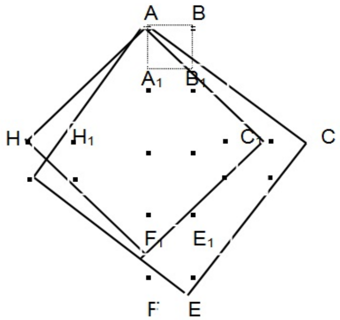
Lời giải. Ta chứng minh số lượng hình vuông cần tìm là $10n-9$.

1) Với $n=1$, hiển nhiên đúng vì ta có $1 = 10.1-9$ hình vuông.

2) Không khó khăn lắm với $n = 2$, ta có thể chọn được $11 = 10.2 - 9$ hình vuông.

3) Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, mà $k \geq 2$.

Ta xét hình gồm $8(k+1) - 4$ điểm (trong hình với $k = 3$) (hình 5)



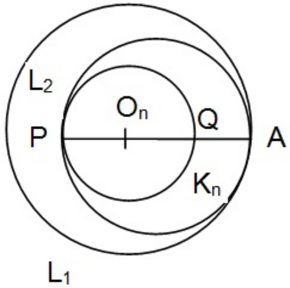
Hình 6.2:

Theo giả thiết quy nạp ta có thể chọn được $10k - 9$ hình vuông, không có một hình vuông nào trong chúng có một đỉnh trùng với các điểm A, B, C, D, E, F, G, H. Bây giờ ta xét những hình vuông có điểm trùng với A. Không khó khăn ta chỉ tìm được 3 hình vuông ABB_1A_1, $ACED, AC_1F_1H$. Như vậy, chỉ có 10 hình vuông khác nhau khi ta thay đổi đỉnh A với các điểm $B, C, \ldots, H$: 4 hình vuông dạng AC_1F_1H, 4 hình vuông dạng ABB_1A_1 và hai hình vuông $ACEF, BDFH$. Tổng cộng tất cả là $10k - 9 + 10 = 10(k+1) - 9$ hình vuông. ☺

Ví dụ 6.8. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 0$ tồn tại một đường tròn trên mặt phẳng chứa trong nó n điểm với tọa độ nguyên.*

Lời giải. Chứng minh quy nạp theo n. Nếu $n = 0$, thì thực chất đường tròn K_0 không chứa trong nó một điểm nào có tọa độ nguyên, để có điều đó ta lấy đường tròn bất kỳ với tâm $O(x_0, y_0)$, ở đây ta chọn một trong x_0, y_0 không phải là số nguyên và bán kính r thích hợp. Nếu, ví dụ như x_0 không nguyên, thì có thể chọn r là số nhỏ nhất trong $\{x_0\}$ và $1 - \{x_0\}$. Thật vậy, nếu $M(x, y)$ điểm bất kỳ trong đường tròn vừa dựng K_0, thì $x \leq x_0 + |OM| < x_0 + r \leq x_0 + 1 - \{x_0\} = [x_0] + 1$ và $x \geq x_0 - |OM| > x_0 - r \geq x_0 - \{x_0\} = [x_0]$ hay là $[x_0] < x < [x_0] + 1$ và vì thế x không là số nguyên.

Giả sử chúng ta đã xây dựng được đường tròn K_n với tâm O_n, chứa trong nó n điểm với tọa độ nguyên. Ta sẽ tăng bán kính đường tròn đó lên và giữ nguyên tâm, tăng đường tròn đến mức không chứa điểm có tọa độ nguyên bên trong ngoài K_n. Ta nhận được vòng tròn L_1 đồng tâm với K_n, chứa n điểm có tọa độ nguyên trong đường tròn K_n và ít nhất một điểm có tọa độ nguyên A trên đường tròn.



Hình 6.3:

Giả sử P và Q là điểm cắt (O_nA) với đường tròn K_n, hơn nữa O_n nằm giữa P và A. Ta dựng đường tròn L_2 với đường kính $[PA]$. Khi đó L_2 chứa đúng $n + 1$ điểm với tọa độ nguyên: n điểm bên trong và một điểm trên biên. Ta có thể tăng không nhiều bán kính đường tròn L_2 để được đường tròn K_{n+1} đồng tâm với L_2 , mà nó chứa $n + 1$ điểm có tọa độ nguyên và không chứa tọa độ có số nguyên nào khác. ☺

Ví dụ 6.9. *Hợp của một số hình tròn có diện tích 1. Chứng minh rằng từ trong chúng có thể chọn được một số hình tròn, từng đôi một không cắt nhau, mà diện tích chung không nhỏ hơn* $\frac{1}{9}$.

Lời giải. Bài toán được suy ra từ mệnh đề sau:

Bổ đề: *Trong mặt phẳng cho n đường tròn, chúng phủ mặt phẳng với diện tích S. Khi đó có thể chọn được một hoặc một số hình tròn đôi một không cắt nhau, tổng diện tích của chúng không nhỏ hơn $\frac{S}{9}$.*

Chứng minh. Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 1$ khẳng định đúng hiển nhiên. Ta giả thiết rằng bổ đề đúng với mọi $k < n$. Ta xét tập hợp R gồm n hình tròn, mà nó phủ mặt phẳng với diện tích S và ta ký hiệu K là đường tròn có bán kính lớn nhất r. Gọi $S(K)$ là diện tích đường tròn này. Nếu $S(K) \geq \frac{S}{9}$, thì hình tròn K thảo mãn kết luận của bổ đề. Vì vậy với $S(K) < \frac{S}{9}$. Mỗi một hình tròn từ R có bán kính không lớn hơn r, và suy ra, nếu nó có điểm chung với K, thì nó phải nằm trong đường tròn đồng tâm với K có bán kính $3r$. Vì diện tích của đường tròn lớn này là $9S(K)$, tập hợp R_1 của tất cả hình tròn mà có điểm chung với K, phủ một phần của mặt phẳng với diện tích không lớn hơn $9S(K)$, suy ra nhỏ hơn S, vì $9S(K) < S$. Khi đó có đường tròn trong R không có điểm chung với K. Tất cả những đường tròn như vậy tạo thành một tập khác rỗng $R_2 = R \setminus R_1$ và phủ một phần mặt phẳng với diện tích $S_2 \geq S - 9S(K)$; Với những đường tròn như vậy từ R_2 số lượng nhỏ hơn n. Theo giả thiết quy nạp từ tập hợp R_2 có thể chọn được một hoặc một số hình tròn đôi một không giao nhau, tổng diện tích của chúng không nhỏ hơn $\frac{S_2}{9}$, suy ra không nhỏ hơn $\frac{1}{9}(S - 9S(K)) = \frac{S}{9} - S(K)$. Hình tròn K không có những điểm chung với bất cứ một đường tròn nào trong những đường tròn ta đang xét. Thêm vào tập hợp những đường tròn đang xét đường tròn K, ta sẽ nhận được tập hợp những đường tròn đôi một không giao nhau, mà tổng diện tích của chúng không nhỏ hơn $\frac{S}{9}$. ☺

Ví dụ 6.10. *Dãy những số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ xác định theo đẳng thức*

$$a_1 = 2, a_{n+1} = (n+1)a_n + 1, n = 1, 2, \ldots$$

Trong một mặt phẳng cho $a_n + 1$ điểm khác nhau, không có ba điểm nào nằm trên một đường thẳng. Tất cả các đoạn thẳng nối những điểm này được tô bằng một trong n màu đã cho. Chứng minh rằng với mọi $n = 1, 2, \ldots$ tồn tại tam giác với những đỉnh trong các điểm đã cho, mà những cạnh của nó đều được tô cùng một màu.

Lời giải. Chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1$ khẳng định đúng hiển nhiên. Ta giả thiết rằng nó cũng đúng với $n = k$. Cho $a_{k+1} + 1$ điểm thỏa mãn điều kiện bài toán và O là một trong những điểm đó. Tất cả đoạn thẳng nối O với mỗi điểm còn lại từ a_{k+1} điểm, là $a_{k+1} = (k+1)a_k + 1$. Những đoạn này được tô nhiều nhất bằng $k+1$ màu khác nhau. Suy ra từ những đoạn thẳng xuất phát từ O, có ít nhất $a_k + 1$ đoạn thẳng tô cùng một màu (nguyên lý Dirichlet), lấy đó là màu đỏ. Ta xét những điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{a_k+1}$, mà chúng nối với O bằng đoạn thẳng màu đỏ. Nếu giữa chúng có hai A_i và A_j cũng nối bằng đoạn thẳng màu đỏ, thì tam giác OA_iA_j là cùng một màu. Nếu mọi cặp hai điểm của $A_1, A_2, \ldots, A_{a_k+1}$ được nối bằng đoạn thẳng không phải màu đỏ, ta có $a_k + 1$ điểm, những đoạn thẳng giữa chúng được tô bằng k màu. Theo giả thiết quy nạp ba đoạn nào đó trong chúng là đỉnh của một tam giác cùng màu. ☺

Ví dụ 6.11. *Trong một mặt phẳng cho 2000 điểm, không có ba điểm nào nằm trên một đường thẳng. Một số trong chúng được nối thành đoạn thẳng theo nguyên tắc sau: Nếu điểm A được nối với điểm B và điểm B được nối với điểm C, thì A không được nối với điểm C. Chứng minh rằng với cách nối trên ta thu được không quá 1 000 000 đoạn thẳng.*

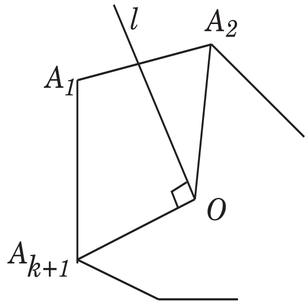
Lời giải. Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng nếu trong mặt phẳng cho $2n$ điểm thỏa mãn điều kiện đầu bài, thì những đoạn thẳng kẻ được không quá $n^2 (n = 2, 3, \ldots)$. Với $n = 2$ khẳng định là hiển nhiên. Giả thiết rằng khẳng định đúng với $2n$ điểm, và ta xét $2n + 2$ điểm. Lấy hai điểm A và B từ những điểm nối được bằng đoạn thẳng. Còn lại $2n$ điểm, theo giả thiết quy nạp những đoạn thẳng kẻ được giữa $2n$ điểm này không lớn hơn n^2. Những đoạn thẳng kẻ từ A và B tới $2n$ điểm còn lại, không quá $2n$ (vì nếu một điểm được nối với A, nó sẽ không được nối với B và ngược lại). Chỉ còn thêm một đoạn nối A và B. Như vậy tất cả các đoạn thẳng kẻ được không quá $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. ☺

Ví dụ 6.12. *a) Điểm O nằm trong phần trong của đa giác lồi $A_1 A_2 \ldots A_n$. Ta xét tất cả các góc $A_i O A_j$, ở đây i và j là những số tự nhiên khác nhau giữa các số $1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng giữa những góc này có ít nhất $n - 1$ góc phải là góc nhọn (nghĩa là hoặc là góc vuông, góc tù hoặc là góc bẹt).*

b) Cùng bài toán cho đa diện với n đỉnh.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 3$ khẳng định được chứng minh dễ dàng. Ta giả thiết rằng nó đúng với $n = k$, ở đây k là một số tự nhiên nào đó và ta xét đa giác lồi có số cạnh $k+1$, $A_1A_2\ldots A_{k+1}$. Ta kẻ đường thẳng l đi qua O vuông góc với OA_{k+1} (hình 7).

Ít nhất một trong những đỉnh của $(k+1)$-đa giác nằm trong nửa mặt phẳng khác phía với A_{k+1} ngăn bởi đường thẳng l. Cho đó là đỉnh A_2. Khi đó góc A_2OA_{k+1} là tù. Theo giả thiết quy nạp k-đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_k$ có ít nhất $k-1$ góc không nhọn dạng A_iOA_j và chúng khác với góc A_2OA_{k+1}. Bằng cách đó chứng minh được rằng số lượng những góc A_iOA_j không nhọn trong $(k+1)-$đa giác $A_2\ldots A_{k+1}$ ít nhất là k. ☺



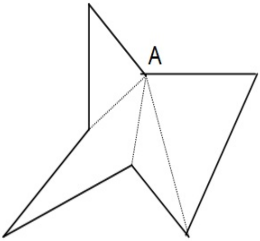
Hình 6.4:

Ví dụ 6.13. *a) Chứng minh rằng trong mọi $n-$ giác $(n\geq 4)$ có ít nhất một đường chéo nằm trọn vẹn bên trong đa giác.*

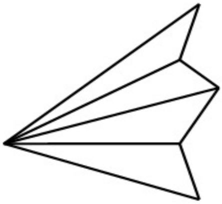
b) Số nhỏ nhất các đường chéo như vậy trong $n-$ giác là bao nhiêu?

Lời giải. a) Nếu đa giác là lồi thì bài toán là hiển nhiên. Bây giờ giả sử góc trong của đa giác tại đỉnh A lớn hơn 180^0. Bởi góc nhìn trọn vẹn một cạnh của đa giác từ đỉnh A luôn dưới một góc nhỏ hơn 180^0, cho nên từ đỉnh A sẽ nhìn được trọn vẹn ít nhất hai cạnh. Do đó tồn tại tia xuất phát từ điểm A mà trên đó xảy ra việc đổi (các phần) các cạnh được nhìn từ điểm A (hình 9). Mỗi tia đó cho một đường chéo nằm trọn vẹn bên trong đa giác.

b) Từ hình 8 ta thấy cách dựng một $n-$ giác có đúng $n-3$ đường chéo nằm trọn vẹn trong nó. Còn lại ta phải chứng minh rằng trong mọi $n-$ giác có ít nhất $n-3$ đường chéo nằm bên



Hình 6.5:



Hình 6.6:

trong. Với $n = 3$ mệnh đề đó dúng. Giả sử mệnh đề đó đúng cho tất cả các $k-$ giác, với $k < n$, ta phải chứng minh nó cho $n-$giác. Theo kết quả bài trên, $n-$ giác có thể được chia bởi một đường chéo nằm trọn vẹn bên trong thành hai đa giác $(k+1)-$ giác và $(n-k+1)-$ giác, với $k+1 < n$ và $n-k+1 < n$. Trong các đa giác đó có ít nhất $(k+1)-3$ và $(n-k+1)-3$ đường chéo nằm bên trong tương ứng. Do đó trong $n-$giác có ít nhất $1+(k-2)+(n-k-2) = n-3$ đường chéo nằm bên trong. ☺

Ví dụ 6.14. *Chứng minh rằng mọi $n-$giác có thể cắt ra thành các tam giác bằng các đường chéo không cắt nhau.*

Lời giải. Ta chứng minh mệnh đề này bằng quy nạp theo n. Với $n = 3$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng cho tất cả $k-$giác, với $k < n$, ta cần chứng minh nó cho mọi $n-$ giác. Một $n-$ giác bất kỳ có thể được chia bởi một đường chéo ra thành hai đa giác (bài trước), trong đos mỗi đa giác có số cạnh nhỏ hơn n, tức là chúng có thể được chia ra thành các tam giác theo giả thiết quy nạp. ☺

Ví dụ 6.15. *Chứng minh rằng tổng các góc trong của một $n-$giác bất kỳ bằng $(n-2)180^0$.*

Lời giải. Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp. Với $n = 3$ mệnh đề đúng là hiển nhiên. Giả sử mệnh đề đã được chứng minh cho tất cả các $k-$giác, với $k < n$, ta phải chứng minh nó cho mọi $n-$ giác. Một $n-$ giác bất kỳ có thể được chia bởi một đường chéo ra làm 2 đa giác (Xem bài trước). Nếu số cạnh của một đa giác đó bằng $k + 1$, thì số cạnh của đa giác kia bằng $n - k + 1$, hơn nữa cả hai số đó đều nhỏ hơn n. Do đó tổng các góc của các đa giác đó tương ứng bằng $(k - 1)180^0$ và $(n - k - 1)180^0$. Cũng rõ ràng rằng tổng các góc của $n-$giác bằng tổng các góc của các đa giác đó, tức là bằng $(k - 1 + n - k - 1)180^0 = (n - 2)180^0$. ☺

Ví dụ 6.16. *Chứng minh rằng mọi $n-$giác lồi với $n \geq 5$ đều có thể cắt ra thành ngũ giác lồi.*

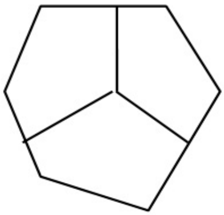
Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng mọi $n-$ giác lồi với $n \geq 5$ đều có thể cắt ra thành các ngũ giác lồi. Với $n = 5$ điều đó là hiển nhiên, còn với $n = 6$ và 7 có thể xem hình 10 và 11.

Bây giờ giả sử rằng $n \geq 8$ và mọi $m-$ giác lồi với $5 \leq m < n$ đều có thể cắt ra thành các ngũ giác. Từ $n-$ giác có thể cắt ra một ngũ giác tạo bởi 5 đỉnh liên tiếp. Khi đó còn lại $(n - 3)-$ giác. Bởi vì $5 \leq n - 3 < n$, nên $(n - 3)-$ giác lại có thể cắt ra thành các ngũ giác theo giả thiết quy nạp toán học. ☺

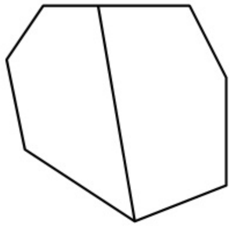
6.2. Bài tập

▷ **6.17.** Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm. Chứng minh rằng mỗi điểm có thể nối với một số điểm còn lại sao cho những đoạn thẳng nhận được không tự cắt nhau và tạo thành một đa giác lồi gép bởi những tam giác.

▷ **6.18.** Độ dài của mỗi đoạn thẳng trong $n \geq 3$ đoạn thẳng đã



Hình 6.7:



Hình 6.8:

cho lớn hơn 1. Biết rằng không có k ($k = 3, 4, \ldots, n$) số đoạn có thể tạo ra các cạnh một đa giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của các đoạn lớn hơn 2^{n-1}.

▷ **6.19.** Trên mặt phẳng bị chia bởi n đường tròn ra các mảnh khác nhau. Chứng minh rằng mặt phẳng có thể tô bằng hai màu sao cho mỗi mảnh tô một màu duy nhất và hai mảnh liền nhau có màu khác nhau.

▷ **6.20.** Ở đầu đường kính một đường tròn ta viết số 1. Mỗi nửa đường tròn lại chia đôi và ở điểm giữa ta viết tổng những số ở hai đầu cung. Sau đó mỗi phần tư cung ta lại chia làm đôi và ở điểm giữa viết số tổng ở hai đầu cung. Cách làm này lặp lại n lần. Hãy tính tổng các số đã viết ra.

CHƯƠNG 7

ĐA THỨC

7.1. Phân tích đa thức ra thừa số

Đa thức bậc n gọi là hàm số có dạng

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, (a_0 \neq 0) \tag{7.1}$$

ở đây $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những hằng số (hệ số đa thức), còn $n \geq 0$ là một số nguyên (bậc của đa thức). Đa thức là một lớp hàm đơn giản, nhưng có rất nhiều ứng dụng trong toán học. Với $n = 0$ đa thức (7.1) là hằng số a_0, với $n = 1$, $P(x)$ trở thành hàm tuyến tính $P(x) = a_0x + a_1$, còn với $n = 2$, P là tam thức bậc hai $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$. Để đa thức có bậc là n thì luôn có điều kiện $a_0 \neq 0$. Trong trường hợp ngược lại thì bậc cao nhất của đa thức P là n.

Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức, thì $P(x) + Q(x), P(x) - Q(x)$ và $P(x).Q(x)$ cũng là đa thức, nhưng phép chia hai đa thức cho nhau không luôn luôn là một đa thức.

Số α gọi là nghiệm của đa thức $P(x)$, nếu $P(\alpha) = 0$. Như vậy, Nếu tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$, mà $b^2 - 4ac \geq 0$ thì hai nghiệm của tam thức này x_1, x_2 đưa ta đến phân tích $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Tổng quát hơn ta có

Ví dụ 7.1. *Nếu $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ và α là một số thực, thì α là nghiệm của $P(x)$ khi và chỉ khi tồn tại một đa thức $Q(x)$ bậc $n-1$, mà nó thoả mãn đẳng thức sau*

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \tag{7.2}$$

với mọi x.

Lời giải. Điều kiện đủ là tất nhiên đúng. Ta chứng minh điều kiện cần, nếu $P(x)$ là đa thức bậc n

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i \tag{7.3}$$

và $P(\alpha) = 0$, nghĩa là

$$P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \alpha^i = 0. \tag{7.4}$$

Ta sử dụng đẳng thức $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$, từ (7.3) và (7.4) ta nhận được

$$P(x) = P(x) - P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(x^i - \alpha^i) =$$

$$= (x - \alpha) \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}(x^{i-1} + x^{i-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) = (x - \alpha)Q(x),$$

ở đây $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}(x^{i-1} + x^{i-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1})$ hiển nhiên là đa thức bậc $n-1$ (vì $a_0 \neq 0$). ☺

Ví dụ 7.2. *Không có một đa thức bậc n có nhiều hơn n nghiệm số khác nhau.*

Lời giải. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Giả sử P là một đa thức bậc n và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ là nghiệm của nó ($\alpha_i \neq \alpha_j$ với $i \neq j$). Với $n = 1$, $P(x) = a_0x + a_1(a_0 \neq 0)$ có một nghiệm duy nhất $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$. Giả sử mệnh đề đúng với số n. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Với mục đích này ta giả sử tồn tại một đa thức Q bậc $n+1$, mà nó có $n+2$ nghiệm khác nhau $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+2}$. Khi đó Q có thể biểu diễn dưới dạng (do ▷7.1)

$$Q(x) = (x - \alpha_{n+2})Q_1(x)$$

ở đây Q_1 là đa thức bậc n. Vì thừa số $x - \alpha_{n+2}$ không có nghiệm là một trong các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, thì chúng là nghiệm của Q_1. Nhưng điều này có nghĩa là một đa thức bậc n có $n+1$ nghiệm hoàn toàn khác nhau, trái với giả thiết quy nạp. ☺

Ví dụ 7.3. *Chứng minh rằng mỗi đa thức*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, (a_0 \neq 0)$$

có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

ở đây $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là nghiệm của đa thức.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Nếu $n = 1$, thì $P(x) = a_0x + a_1$ có một nghiệm duy nhất $\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$ và hiển nhiên $P(x) = a_0(x + \dfrac{a_1}{a_0}) = a_0(x - \alpha_1)$.

Giả sử mệnh đề khẳng định đúng với đa thức bậc $n-1$ và cho $\deg P(x) = n$. Ta biết rằng $P(x)$ tồn tại nghiệm như các bài tập trên đã chứng minh, lấy α_1 là nghiệm của $P(x)$. Khi đó $P(x) = (x - \alpha_1)Q(x)$, dễ thấy $\deg Q(x) = n-1$ và hệ số trước bậc cao nhất của đa thức này trùng với a_0 của $P(x)$. Từ đó suy ra những nghiệm của $P(x)$ là α_1 và những nghiệm của $Q(x)$. Theo giả thiết quy nạp

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n),$$

ở đây $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ là tất cả nghiệm của $Q(x)$. Khi đó tất cả nghiệm của $P(x)$ là $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và

$$P(x) = (x-\alpha_1)Q(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n). \qquad ☺$$

Ký hiệu F là một tập số: tập hợp số phức, tập hợp số thực và tập hợp số hữu tỷ. Những đa thức không phải hằng số $P(x)$ với hệ số trong tập hợp F gọi là *không phân tích được* trên F, nếu nó không thể biểu diễn được như tích của hai đa thức (không phải đa thức hằng số) có hệ số thuộc F, có bậc thực sự nhỏ hơn bậc của $P(x)$.

Ví dụ 7.4. *Chứng minh rằng mọi đa thức thực sự với hệ số thuộc F có thể biểu diễn như tích của những thừa số không phân tích được trên F. Sự biểu diễn này là duy nhất theo nghĩa dãy của các thừa số có thể khác nhau tương ứng với hằng số khác không của F, nói các khác, nếu*

$$P(x) = P_1(x).P_2(x)\dots, P_r(x) = Q_1(x).Q_2(x)\dots Q_s(x)$$

là hai biểu diễn của $P(x)$ như tích các thừa số không phân tích được trên F, thì $r = s$ và $P_i(x) = \alpha_i Q_{k_i}(x)$, ở đây $0 \neq \alpha_i \in F$ và $k_1, k_2, \dots, k_r$ là những số nào đó xếp thứ tự theo $1, 2, \dots, r$.

Lời giải. Cho $P(x)$ không phải là đa thức hằng trong tập hợp F và $n = \deg P(x)$. Nếu $n = 1$, thì $P(x) = a_0x + a_1$ là không phân tích được và nó biểu diễn như tích duy nhất thừa số không phân tích được.

Cho n là số tự nhiên bất kỳ và giả thiết rằng mọi đa thức bậc nhỏ hơn n có thể biểu diễn như tích các thừa số không phân tích được trên F.

Nếu đa thức đã cho $P(x)$ là không phân tích được trên F, thì có thể công nhận nó biểu diễn như tích của một đa thức không phân tích được.

Nếu đa thức phân tích được, thì nó có dạng

$$P(x) = Q(x).H(x),$$

ở đây $Q(x)$ và $H(x)$ là những đa thức với hệ số trong F và $\deg Q(x) < n$ và $\deg H(x) < n$. Nhưng khi đó theo giả thiết quy nạp $Q(x)$ và $H(x)$ biểu diễn như tích của các thừa số đa thức trên F. Suy ra cũng đúng cho $P(x)$. Nghĩa là mọi đa thức trên F có thể biểu diễn như tích các thừa số không phân tích được có hệ số trong F. Chứng minh duy nhất dành cho bạn đọc. ☺

7.2. Nguyên lý so sánh các hệ số

Cho hai hàm số $P_1(x)$ và $P_2(x)$ xác định trên một tập con D của số thực. Chúng ta nói rằng $P_1(x)$ và $P_2(x)$ trùng nhau trong D, nếu đẳng thức $P_1(x) = P_2(x)$ đúng với mọi $x \in D$. Tập hợp các đa thức là một lớp hàm đặc biệt. Miền xác định của mỗi đa thức là tập hợp con của số thực. Như vậy hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ trùng nhau, nếu $P(x) = Q(x)$ đúng với mọi x số thực. Lớp các đa thức có một tính chất rất đặc biệt là để cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ trùng nhau chỉ cần thiết kiểm tra $P(x) = Q(x)$ đúng với một số hữu hạn giá trị của x.

Ví dụ 7.5. *Cho*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

và

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$$

là hai đa thức và $n \geq m$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $n+1$ những số từng đôi một khác nhau $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} (\alpha_i \neq \alpha_j$ với $i \neq j)$ sao cho $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i), i = 1, 2, \ldots, n+1$, thì $n = m$ và $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Lời giải. Do không có đòi hỏi gì về $b_0 \neq 0$ và lại có $n \geq m$, ta có thể giả thiết (bằng cách đánh số lại các hệ số)

$$Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

Bước cơ sở: nếu $n = 1$, thì $P(x) = a_0x + a_1, Q(x) = b_0x + b_1$ và thoả mãn các đẳng thức sau

$$a_0\alpha_1 + a_1 = b_0\alpha_1 + b_1$$
$$a_0\alpha_2 + a_1 = b_0\alpha_2 + b_1$$

Trừ theo vế ta nhận được

$$a_0(\alpha_1 - \alpha_2) = b_0(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Nhưng theo điều kiện $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ta có thể giản ước cho $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$. Ta nhận được $a_0 = b_0$, từ đó cũng suy ra $a_1 = b_1$.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với $n-1$. Ta có

$$\begin{aligned}
P(x) - P(\alpha_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha_{n+1}^{n-i} \\
&= a_0(x^n - \alpha_{n+1}^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha_{n+1}^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - \alpha_{n+1}) \\
&= (x - \alpha_{n+1})(a_0x^{n-1} + a_1'x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}') = (x - \alpha_{n+1})P_1(x)
\end{aligned}$$

ở đây $P_1(x) = a_0x^{n-1} + a_1'x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}'$

Tương tự $Q(x) - Q(\alpha_{n+1}) = (x - \alpha_{n+1})Q_1(x)$, ở đây $Q_1(x) = b_0x^{n-1} + b_1'x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}'$. Khi đó với $i = 1, 2, \ldots, n$ ta nhận được

$$P_1(\alpha_i) = \frac{P(\alpha_i) - P(\alpha_{n+1})}{\alpha_i - \alpha_{n+1}} = \frac{Q(\alpha_i) - Q(\alpha_{n+1})}{\alpha_i - \alpha_{n+1}} = Q_1(\alpha_i)$$

và theo giả thiết quy nạp $a_0 = b_0, a'_1 = b'_1, \ldots, a'_{n-1} = b'_{n-1}$. Ta đặt

$$P_2(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

$$Q_2(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n$$

với $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ sẽ thoả mãn

$$P_2(\alpha_i) = P(\alpha_i) - a_0\alpha_i^n = Q(\alpha_i) - b_0\alpha_i^n = Q_2(\alpha_i)$$

Lại áp dụng giả thiết quy nạp ta có $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.
☺

Ví dụ 7.6. *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn đẳng thức $P(x) = P(x+1)$.*

Lời giải. Dễ thấy, nếu $P(x)$ là đa thức hằng số, thì nó thoả mãn đẳng thức trên. Ta giả sử $\deg P(x) \geq 1$ và cho $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$ và $P(x)$ thoả mãn đẳng thức $P(x) = P(x+1)$. Khi đó

$$a_0(x+1)^n + a_1(x+1)^{n-1} + \cdots + a_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

từ đây so sánh hệ số trước x^{n-1}, ta nhận được $na_0 + a_1 = a_1$, tức là $a_0 = 0$ nó vô lý với giả thiết. Suy ra chỉ có những đa thức hằng số là thoả mãn điều kiện đầu bài ra. ☺

Ví dụ 7.7. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên k tồn tại duy nhất một đa thức $P_k(x)$ bậc $k+1$ sao cho $P_k(0) = 0$ và $x^k = P_k(x+1) - P_k(x)$.*

Lời giải. Việc tồn tại đa thức $P_k(x)$ ta sẽ chứng minh quy nạp theo k. Với $k = 0$ và $k = 1$ ta có

$$x^0 = 1 = (x+1) - x;$$
$$x = (\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)) - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)$$

Nghĩa là $P_0(x) = x, P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$.

Giả thiết với mỗi $l \le k$ tồn tại đa thức $P_l(x)$, với nó $P_l(0) = 0$ và $x^l = P_l(x+1) - P_l(x)$. Ta có

$$x^{k+1} = x.x^k = xP_k(x+1) - xP_k(x),$$

từ đó có

$$x^{k+1} + P_k(x+1) = (x+1)P_k(x+1) - xP_k(x).$$

Cho thêm

$$P_k(x+1) = a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0.$$

Khi đó

$$(1+a_{k+1})x^{k+1} = (x+1)P_k(x+1) - xP_k(x) - \sum_{i=0}^{k} a_lP_l(x+1) - \sum_{l=1}^{k} a_lP_l(x)$$
$$= ((x+1)P_k(x+1) - \sum_{l=0}^{k} a_lP_l(x+1)) - (xP_k(x) - \sum_{l=0}^{k} a_lP_l(x)).$$

Với bậc của đa thức $H(x) = xP_k(x) - \sum_{l=0}^{k} a_lP_l(x)$ cao nhất chỉ là $k+1$ và dễ thấy rằng hệ số trước x^{k+1} trong dạng chuẩn tắc của $H(x)$ đúng là a_{k+1}. Nếu giả sử rằng $1 + a_{k+1} = 0$, ta nhận được $H(x+1) = H(x)$ và khi đó ta có $H(x)$ là hằng số (bài trên), nó trái với $a_{k+1} \neq 0$. Suy ra $1 + a_{k+1} \neq 0$ và nếu ta đặt

$$P_{k+1}(x) = \frac{1}{1+a_{k+1}}(xP_k(x) - \sum_{l=0}^{k} a_lP_l(x)),$$

Ta nhận được

$$x^{k+1} = P_{k+1}(x+1) - P_{k+1}(x).$$

Chứng minh duy nhất dành cho bạn đọc. ☺

Ví dụ 7.8. *Hãy tìm tất cả đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện*

$$P(x^2-2) = (P(x))^2 - 2.$$

Lời giải. Ta chú ý như bài trước với mọi số tự nhiên n tồn tại nhiều nhất một đa thức $P_n(x)$ bậc n thoả mãn

$$P_n(x^2-2) = (P_n(x))^2 - 2. \tag{7.5}$$

Với việc so sánh hệ số trước số mũ cùng bậc của x trong phương trình trên ta tìm được

$$P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2, P_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$P_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2, P_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x.$$

Ngoài ra không khó khăn gì thiết lập được quan hệ

$$P_3(x) = xP_2(x) - P_1(x);$$
$$P_4(x) = xP_3(x) - P_2(x);$$
$$P_5(x) = xP_4(x) - P_3(x).$$

Điều này gợi ý cho ta đưa ra một giả thiết sau đây:

Mọi đa thức trong dãy

$$P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots, P_n(x), \ldots$$

được xác định theo các đẳng thức sau

$$P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - 2, \ldots, P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

thoả mãn điều kiện (7.5).

Vì đa thức $P_n(x)$ bậc n, theo bài tập trước, nếu giả thiết trên là đúng thì chúng là tất cả các đa thức thoả mãn điều kiện bài toán.

Bây giờ ta chứng minh giả thiết bằng quy nạp toán học theo n. Với $n = 1$ và $n = 2$ giả thiết đúng. Giả sử với n nào đó đa thức $P_n(x)$ và $P_{n+1}(x)$ thoả mãn điều kiện (7.5). Khi đó đối với $P_{n+2}(x)$ ta có

$$\begin{aligned}
&P_{n+2}(x^2-2) - (P_{n+2}(x))^2 + 2 = \\
&\quad = (x^2-2)P_{n+1}(x^2-2) - P_n(x^2-2) - (xP_{n+1}(x) - P_n(x))^2 + 2 \\
&\quad = (x^2-2)((P_{n+1}(x))^2 - 2) - ((P_n(x))^2 - 2) - x^2(P_{n+1}(x))^2 + \\
&\qquad + 2xP_{n+1}(x).P_n(x) - (P_n(x))^2 + 2 \\
&\quad = -2(P_{n+1}(x))^2 - 2(P(x))^2 + 2xP_{n+1}(x).P_n(x) - 2x^2 + 8 \\
&\quad = -2H_n(x),
\end{aligned}$$

ở đây ta đặt

$$H_n(x) = (P_{n+1}(x))^2 + (P_n(x))^2 - xP_{n+1}(x).P_n(x) + x^2 - 4.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
H_n(x) &= (xP_n(x) - P_{n-1}(x))^2 + (P_n(x))^2 - x(xP_n(x) \\
&\quad - P_{n-1}(x)).P_n(x) + x^2 - 4 \\
&= (P_n(x))^2 + (P_{n-1}(x))^2 - xP_n(x).P_{n-1}(x) + x^2 - 4 \\
&= H_{n-1}(x) = H_{n-2}(x) = \ldots = H_1(x) \\
&= (P_2(x))^2 + P_1(x))^2 - xP_2(x).P_1(x) + x^2 - 4 \\
&= (x^2-2)^2 + x^2 - x(x^2-2)x + x^2 - 4.
\end{aligned}$$

Suy ra $P_{n+2}(x^2-2) = (P_{n+2}(x))^2 - 2$. ☺

Ví dụ 7.9. *Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực nhận giá trị số hữu* *tỷ với mọi số x hữu tỷ và giá trị số vô tỷ với mọi số x vô tỷ. Chứng minh rằng $P(x)$ là đa thức tuyến tính với hệ số hữu tỷ.*

Lời giải. 1) Ta sẽ chứng minh rằng các hệ số của $P(x)$ là hữu tỷ. Chứng minh bằng quy nạp theo bậc n của $P(x)$. Thật vậy, với $n = 0, P(x)$ là hằng số và nó là một số hữu tỷ (vì bằng ví dụ như $P(0)$). Giả thiết khẳng định đúng với tất cả các đa thức bậc nhỏ hơn số tự nhiên n (tất nhiên thoả mãn điều kiện đầu bài) và cho $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Dễ thấy $a_n = P(0)$ là số hữu tỷ và nếu ta đặt

$$Q(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = \frac{P(x) - a_n}{x},$$

thì $Q(x)$ sẽ nhận giá trị hữu tỷ với biến hữu tỷ x. Theo giả thiết quy nạp khi đó những số $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ là hữu tỷ.

Như vậy hệ số của $P(x)$ là hữu tỷ. Với điều đó $P(x)$ không là hằng số, vì trong trường hợp ngược lại $P(x)$ sẽ là hữu tỷ với mọi x. Cho $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, n > 0$. Không mất tính tổng quát có thể cho rằng a_i là nguyên. Ngoài ra đa thức

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0^{n-1}.(P(x) - a_n) \\ &= (a_0x)^n + a_1(a_0x)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_0^{n-2}(a_0x). \end{aligned}$$

Nghĩa là đa thức

$$H(y) = y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}a_0^{n-2}y$$

thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi số nguyên đủ lớn m phương trình $H(y) = m$ có nghiệm. Thật vậy, lấy $m > H(0)$ và $\varphi(y) = H(y) - m$. Khi đó $\varphi(0) < 0$ và $\lim\limits_{y\to\infty} \varphi(y) = +\infty$, vì thế phương trình $H(y) = m$ có nghiệm dương y_m. Lấy $m = p$ là số nguyên tố đủ lớn. Ta có $H(y_p) = p$. Từ điều kiện suy ra y_p là số hữu tỷ và vì hệ số bậc cao nhất của $H(y)$ là 1, thì y_p là nguyên và ngoài ra y_p được chia hết bởi số hạng tự do của $\varphi(y)$, hoặc là y_p là ước số của p. Nghĩa là $y_p = 1$ hoặc là $y_p = p$. Nhưng đẳng thức $y_p = 1$ chỉ có khả năng nhiều nhất với một p. Nghĩa là $y_p = p$ cho tất cả số nguyên tố đủ lớn p. Nói cách khác, ta đã nhận được $H(p) = p$ với tất cả số nguyên tố đủ lớn. Từ nguyên lý so sánh các hệ số suy ra khi đó $H(y) = y$ và nghĩa là $P(x) = a_0x + a_1$. ☺

Ví dụ 7.10. *Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên, với nó $P(0) = P(1) = 1$. và a_0 là số nguyên bất kỳ. Ta định nghĩa $a_{n+1} = P(a_n)$ với $n \geq 0$. Hãy chứng minh rằng với $m \neq n$ có đẳng thức sau $(a_m, a_n) = 1$.*

Lời giải. Ta chia đa thức $P(x)$ cho $x(x-1)$. Lấy

$$P(x) = x(x-1)Q(x) + ax + b,$$

Từ quá trình chia đa thức suy ra $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Trong đẳng thức trên ta cho $x = 0$ và $x = 1$ và chú ý rằng $P(0) = P(1) = 1$, đối với a và b ta nhận được hệ phương trình $b = 1, a + b = 1$, từ đây suy ra $b = 1$ và $a = 0$, và như vậy ta có $P(x) = x(x-1)Q(x) + 1$, ở đây $Q(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n, đẳng thức

$$a_n \equiv 1 \pmod{a_0a_1 \dots a_{n-1}},$$

từ đây suy ra kết luận của bài toán. Thật vậy, cho $m < n$ và $(a_m, a_n) = d$, Khi đó $a_0a_1 \dots a_{n-1}$ chia hết cho d và suy ra $a_n - 1$ chia hết cho d. Nhưng a_n chia hết cho d, từ đây $a_n - 1 - a_n$ chia hết cho d hay là 1 chia hết cho d hoặc là $d = 1$.

Chỉ còn chứng minh rằng $a_n \equiv 1 \pmod{a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}}$ với mọi n. Với $n = 1$ ta có $a_1 = a_0(a_0-1)Q(a_0)+1$ và suy ra $a_1 \equiv 1 \pmod{a_0}$. Giả thiết đúng với n nào đó $a_n \equiv 1 \pmod{a_0a_1\ldots a_{n-1}}$ hoặc là $a_n = 1 + ka_0a_1\ldots a_{n-1}$, ở đây k là nguyên. Với a_{n+1} ta tìm được

$$a_{n+1} = a_n(a_n-1)Q(a_n)+1 = ka_0a_1\ldots a_{n-1}a_nQ(a_n)+1,$$

từ đây ta có $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{a_0a_1\ldots a_{n-1}a_n}$. ☺

Ví dụ 7.11. *Cho dãy các đa thức $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ trong đó $P_0(x) = 2, P_1(x) = x$ và với mọi $n \geq 1$ thì*

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = xP_n(x).$$

Chứng minh rằng tồn tại ba số a, b và c sao cho với mọi $n \geq 1$ ta đều có

$$(x^2-4)[P_n^2(x)-4] = [aP_{n+1}(x)+bP_n(x)+cP_{n-1}(x)]^2. \tag{7.6}$$

Lời giải. Giả sử tồn tại a, b, c để (7.6) đúng với mọi n. Khi đó (7.6) đúng với $n = 1$. Thay $n = 1$ vào (7.6) suy ra

$$(x^2-4)(x^2-4) = [a(x^2-2)+bx+2c]^2.$$

Ta nhận thấy nếu chọn $a = 1, b = 0$ và $c = -1$ thì đẳng thức trên được thoả mãn.

Bây giờ ta chứng minh: nếu chọn $a = 1, b = 0, c = -1$ thì (7.6) đúng với mọi $n \geq 2$, tức là ta phải chứng minh

$$(x^2-4)(P_n^2(x)-4) = (P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x))^2. \tag{7.6´}$$

Vì $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ nên (7.6´) tương đương với

$$\begin{aligned} x^2P_n^2(x) - 4P_n^2(x) - 4x^2 + 16 &= (xP_n(x) - 2P_{n-1}(x))^2 \\ &= x^2P_n^2(x) - 4xP_n(x)P_{n-1}(x) + 4P_{n-1}^2(x). \end{aligned}$$

Tương đương với

$$P_n^2(x) + x^2 - 4 = P_{n-1}(x)(xP_n(x) - P_{n-1}(x)) = P_{n-1}(x)P_{n+1}(x). \tag{7.7}$$

Ta sẽ chứng minh (7.7) bằng phương pháp quy nạp. Với $n = 1$ thì $P_2(x) = x^2 - 2$, nên dễ dàng thấy (7.7) đúng. Giả sử (7.7) đúng với $n = k$, tức là

$$P_k^2(x) + x^2 - 4 = P_{k-1}(x)P_{k+1}(x). \tag{7.8}$$

Ta phải chứng minh (7.7) đúng với $n = k + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} &xP_{k+1}(x)P_k(x) = xP_k(x)P_{k+1}(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &(P_{k+2}(x) + P_k(x))P_k(x) = (P_{k+1}(x) + P_{k-1}(x))P_{k+1}(x) \\ \Leftrightarrow &P_k^2(x) + P_k(x)P_{k+2}(x) = P_{k+1}^2(x) + P_{k-1}(x)P_{k+1}(x) \\ \Leftrightarrow &P_{k+1}^2(x) = P_k^2(x) - P_{k-1}(x)P_{k+1}(x)) + P_k(x)P_{k+2}(x). \end{aligned}$$

Từ (7.8) suy ra

$$P_{k+1}^2(x) = -(x^2 + 4) - P_k(x)P_{k+2}(x).$$

đó là điều cần chứng minh. ☺

7.3. Đạo hàm của đa thức

Cho đa thức

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, (a_0 \neq 0).$$

Đa thức

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}, (a_0 \neq 0)$$

gọi là *đạo hàm bậc nhất* của đa thức $P(x)$. Đạo hàm của đạo hàm bậc nhất $P'(x)$ gọi là đạo hàm bậc hai của $P(x)$ và ký hiệu là $P''(x)$. Ta có thể định nghĩa theo quy nạp: đạo hàm bậc k của đa thức $P(x)$ là đạo hàm của đạo hàm bậc $k-1$ của hàm $P(x)$ và ký hiệu là $P^{(k)}(x)$. Hoặc là, $P^{(k)}(x) = (P^{(k-1)}(x))'$.

Từ định nghĩa đạo hàm của đa thức ta dễ thấy các tính chất sau đúng:

1. Nếu bậc của $P(x)$ là n, thì bậc của $P'(x)$ là $n-1$ và $P^{(n+1)}(x) = 0$.

2. Các phép tính đối với đạo hàm: nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức bất kỳ, còn α là một số bất kỳ, thì

a) $(P(x) \pm Q(x))' = P'(x) \pm Q'(x); (\alpha P(x))' = \alpha P'(x);$

b) $(P(x).Q(x))' = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x).$

Ví dụ 7.12. *Chứng minh rằng* $((P(x))^n)' = n(P(x))^{n-1}.P'(x).$

Lời giải. 1) Nếu $n = 1$ thì $P'(x) = P'(x).(P(x))^0$.

2) Giả sử

$$((P(x))^{n-1})' = (n-1)(P(x))^{n-2}.P'(x).$$

Khi đó theo tính chất b) ta có

$$\begin{aligned}((P(x))^n)' &= (P(x))^{n-1}.P'(x) + (n-1)(P(x))^{n-2}.P'(x).P(x)\\ &= n(P(x))^{n-1}.P'(x).\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 7.13. *Chứng minh rằng nếu $P(x)$ là đa thức bất kỳ bậc n, còn a là một số bất kỳ, thì*

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(Công thức Taylor).

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp theo n bậc của đa thức $P(x)$.

1) Nếu $n = 1$, giả sử $P(x) = A_0 + A_1(x-a)$. Khi đó $P'(x) = A_1(x-a)' = A_1$ và như vậy $P(a) = A_0$ và $P'(a) = A_1$, suy công thức Taylor đúng cho đa thức bậc nhất. Giả sử công thức đúng cho đa thức bậc $n-1$. Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n và nếu

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} + A_n(x-a)^n.$$

Khi đó $Q(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_{n-1}(x-a)^{n-1}$ là đa thức bậc $n-1$ và theo giả thiết quy nạp

$$A_0 = Q(a), A_1 = \frac{Q'(a)}{1!}, \ldots, A_{n-1} = \frac{Q^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

Ngoài ra ta còn có

$$P^{(i)}(x) = Q^{(i)}(x) + n(n-1)\ldots(n-i+1)A_n(x-a)^{n-i}$$

từ đó suy ra với $i < n$: $P^{(i)}(a) = Q^{(i)}(a)$ và $P^{(n)}(a) = n!A_n$. Cuối cùng chúng ta nhận được:

$$A_0 = P(a), A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \ldots, A_{n-1} = \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Suy ra công thức Taylor đúng với mọi giá trị n. ☺

Ví dụ 7.14. *Chứng minh rằng nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức bất kỳ và k là một số tự nhiên, thì*

$$(P(x).Q(x))^{(k)} = C_k^0 P^{(k)}(x).Q(x) + C_k^1 P^{(k-1)}(x)Q'(x) + \cdots + C_k^k P(x)Q^{(k)}(x).$$

(Công thức Leibniz).

Lời giải. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo k.

1) Với $k = 1$ ta có

$$(P.Q)' = P'.Q + PQ' = C_1^0 P'Q + C_1^1 P.Q'.$$

Công thức đúng với $k = 1$.

2) Giả sử công thức đúng với số tự nhiên k. Khi đó với $k+1$ ta nhận được

$$\begin{aligned}
(P.Q)^{(k+1)} &= ((P.Q)^{(k)})' = (C_k^0 P^{(k)}.Q + \cdots + C_k^s P^{(k-s)}.Q^{(s)} + \cdots)' \\
&= C_k^0(P^{(k+1)}.Q + P^k Q') + C_k^1(P^{(k)}.Q' + P^{(k-1)}.Q'') + \cdots \\
&+ C_k^s(P^{k-s+1}Q(s) + P^{(k-s)}Q^{(s+1)}) + \cdots + C_k^k(P'Q^{(k)} + PQ^{(k+1)} \\
&= C_k^0 P^{(k+1)}.g + (C_k^0 + C_k^1)P^{(k)}.Q' + \ldots \\
&\quad + (C_k^{s-1} + C_k^s)P^{(k+1-s}.Q^{(s)} + \cdots + C_k^k P.Q^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 P^{(k+1)}.g + C_{k+1}^1 P^{(k)}.Q' + \cdots \\
&\quad + C_{k+1}^s P^{(k+1-s)}.Q^{(s)} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} PQ^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

Như vậy công thức đúng với mọi số tự nhiên k. ☺

7.4. Đa thức Chebychev

Trong phần này ta xét một dạng đặc biệt của đa thức giữ vai trò rất quan trọng trong nhiều bài toán về lý thuyết cũng như kỹ thuật.

Ví dụ 7.15. *Hàm số* $\cos n\theta, (n \in N)$ *với thể biểu diễn như đa thức bậc* n *của* $\cos\theta$. *Nghĩa là,*

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}\cos^i\theta, a_0 \neq 0. \tag{7.9}$$

Lời giải. 1) $n=0$ và $n=2$ mệnh đề hiển nhiên đúng. Với $n=2$ và $n=3$ ta nhận được đa thức tương ứng bậc hai, bậc ba theo công thức lượng giác.

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

2) Giả sử mệnh đề đúng với $n-1$ và n, nghĩa là

$$\cos(n-1)\theta = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} \cos^i \theta, b_0 \neq 0. \tag{7.10}$$

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} \cos^i \theta, c_0 \neq 0.$$

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp đó $\cos(n+1)\theta$ cũng có thể biểu diễn như đa thức của $\cos\theta$ có bậc $n+1$.

$$\cos(n+1)\theta = \sum_{i=0}^{n+1} d_{n+1-i} \cos^i \theta, d_0 \neq 0. \tag{7.11}$$

Ta áp dụng công thức

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta,$$

đúng với mọi n và θ. Từ (7.11) và (7.10) suy ra

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta\\ &= 2\cos\theta\sum_{i=0}^{n} c_{n-i}\cos^i\theta - \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i}\cos^i\theta\\ &= d_0\cos^{n+1}\theta + d_1\cos^n\theta + \cdots\end{aligned}$$

Ta nhận thấy ngay đây là đa thức bậc $n+1$ của $cos\theta$, Vì $d_0 2c_0 \neq 0$ theo giả thiết quy nạp.

Trong đa thức (7.9) của $cos\theta$, ta có thể đưa về dạng một đa thức chuẩn tắc bằng cách đặt $x = cos\theta$ và ta ký hiệu đa thức này là $T_n(x)$. Theo cách này

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}x^i. \tag{7.12}$$

Đa thức (7.12) gọi là đa thức thứ n-của Chebychev. Như vậy do công thức (7.9) thì đa thức thứ n của Chebychev T_n ta có:

$$T_0(x) = 1, T_1(x),$$
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), (n = 2, 3, \ldots).$$

Từ đẳng thức trên ta tìm được lần lượt các đa thức của Chebychev với $n = 2, 3, \ldots$.

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ví dụ 7.16. *Cho T_n là đa thức thứ n của Chebychev. Chứng minh mệnh đề sau: Hệ số ở đối số có số mũ cao nhất là $2^{n-1}(n > 0)$.*

Lời giải. Từ các đẳng thức ở bài trước mệnh đề đúng với $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Giả sử mệnh đề đúng với số n nào đó. Ta chứng minh đúng cho $n + 1$ bằng cách suy ra từ công thức

$$T_{n+1}(x) = 2xT_(x) - T_{n-1}(x)$$

và nguyên lý so sánh các hệ số của đa thức. ☺

7.5. Bàii tập

▷ **7.17.** Cho n là số tự nhiên và $P(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n. Chứng minh rằng tồn tại một hàm hữu tỷ $R(x)$ sao cho

$$P(x) = x(x+1)\ldots(x+n)(R(x+1) - R(x)).$$

▷ **7.18.** Ký hiệu $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ là những đa thức

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1.2}, \ldots$$
$$P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Chứng minh rằng mọi đa thức $P(x)$ bậc n có thể biểu diễn dưới dạng

$$P(x) = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \cdots + b_nP_n(x),$$

ở đây $b_0, b_1, \ldots, b_n$ là những số nào đó.

▷ **7.19.** Cho dãy số Fibonacci $u_1 = 1, u_2 = 1, u_{i+2} = u_{i+1} + u_i$, đặt $F_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i x^i$. Chứng minh rằng

$$F_n(x) = \frac{u_n x^{n+2} + u_{n+1}x^{n+1} - x}{x^2 + x - 1}, (x^2 + x - 1 \neq 0)$$

▷ **7.20.** Chứng minh rằng hàm $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ có thể biểu diễn như đa thức U_n bậc n của $\cos\theta$ (gọi là đa thức loại hai bậc thứ n của Chebychev).

▷ **7.21.** Chứng minh rằng những đa thức loại hai Chebychev thoả mãn những đẳng thức sau:

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

▷ **7.22.** Cho đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ bậc n với hệ số thực và $a \geq 3$ là một số thực. Chứng minh rằng ít nhất một trong các số $|1 - P(0)|, |a - P(1)|, |a^2 - P(2)|, \ldots, |a^{n+1} - P(n+1)|$ không nhỏ hơn 1.

▷ **7.23.** Chứng minh rằng với đa thức $P_n(x) = x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots$ Bất đẳng thức sau đúng với mọi $x > 0$ và $n = 1, 2, \ldots$

$$P_n(x) + P_n(\frac{1}{x}) \geq n + 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

CHƯƠNG 8

TỔ HỢP VÀ ĐẲNG THỨC

Trong chương này ta chứng minh một số đẳng thức và định lý liên quan đến đẳng thức, cố gắng chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Để ngắn gọn khi áp dụng nguyên lý quy nạp toán học ta trình bày lần lượt các bước một cách tự nhiên, không nhấn mạnh như các chương trước nữa.

8.1. Một số công thức tổ hợp

Trong mục này ta quan tâm tới tập hợp gồm hữu hạn các phần tử, ví dụ như tập gồm n phần tử ký hiệu $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Khi xem xét các tập này chúng ta quan tâm tới vị trí sắp xếp của các phần tử. Khi đó ta nói tập X là tập được sắp. Những bài toán tổ hợp quan tâm tới số lượng cách sắp xếp những phần tử trong một tập hợp hữu hạn. Chúng ta quan tâm tới những dạng cơ bản của bài toán tổ hợp như sau:

Một dãy n phần tử khác nhau của tập hợp X sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là *một hoán vị* của X.

Gọi P_n là số hoán vị của n phần tử. Ta có thể xét một số trường hợp cụ thể sau

n	Tập X	Các hoán vị của X	Số hoán vị
0	$\varnothing$	$\varnothing$	$1 = 0!$
1	$\{a\}$	(a)	$1 = 1!$
2	$\{a_1, a_2\}$	$(a_1, a_2); (a_2, a_1)$	$2 = 2!$
3	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_3, a_2);$ $(a_2, a_1, a_3); (a_2, a_3, a_1);$ $(a_3, a_1, a_2); (a_3, a_2, a_1);$	$6 = 3!$
...	...	...	...

Với phương pháp quy nạp toán học ta dự đoán và chứng minh

Ví dụ 8.1. *Số lượng hoán vị của n phần tử có thể tính bằng công thức*

$$P_n = n!. \tag{8.1}$$

Lời giải. Ta chứng minh công thức (8.1) bằng phương pháp quy nạp toán học:

1) Theo bảng trên công thức (8.1) đúng với $n = 1$.

2) Giả sử (8.1) đúng với $n = k \geq 1$. Hoán vị của $k + 1$ phần tử có thể lập như sau: cố định vị trí thứ nhất cho mỗi phần tử (nghĩa là có $k + 1$ cách) rồi sắp k phần tử còn lại vào các vị trí tiếp theo (theo giả thiết có P_k cách). Do đó

$$P_{k+1} = (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!$$

Như vậy công thức (8.1) đúng với $n = k + 1$. ☺

Một dãy m phần tử khác nhau $(m \leq n)$ của tập hợp X sắp xếp theo một thứ tự xác định được gọi là **một chỉnh hợp chập** m **của** n phần tử trong X.

Ký hiệu A_n^m là số lượng các chỉnh hợp chập m của n phần tử. Ta xét một số ví dụ sau

m	Các chỉnh hợp của $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	Số chỉnh hợp
1	$(a_1); (a_2); (a_3); (a_4);$	$4 = 4$
2	$(a_1, a_2); (a_2, a_1); (a_1, a_3); (a_3, a_1);$	$12 = 4.3$
	$(a_1, a_4); (a_4, a_1); (a_2, a_3); (a_3, a_2);$	
	$(a_2, a_4); (a_4, a_2); (a_3, a_4); (a_4, a_3);$	
3	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_2, a_4); (a_2, a_1, a_4)$	$24 = 4.3.2$
	$(a_1, a_3, a_4); (a_2, a_3, a_4); (a_3, a_1, a_4)$	
...	...	...

Ta chứng minh công thức sau:

Ví dụ 8.2. *Số lượng chỉnh hợp chập m của n phần tử được tính theo công thức sau:*

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1). \tag{8.2}$$

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp toán học

1) Với $m = 1$ ta có $A_n^1 = n$, suy ra công thức (8.2) đúng với $m = 1$.

2) Giả sử (8.2) đúng với $m = k \geq 1$, nghĩa là

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

Các chỉnh hợp chập $k+1$ nhận được từ những chỉnh hợp chập k bằng cách thêm vào cuối dãy một trong $n-k$ phần tử còn lại. Như vậy một chỉnh hợp chập k sẽ cho $n-k$ chỉnh hợp chập $k+1$. Do đó

$$A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)$$

Suy ra (8.2) đúng với $m = k+1$. ☺

Chú ý: Có thể viết công thức (8.2) dưới dạng khác

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{8.3}$$

Mỗi tập con m phần tử khác nhau của tập $X(m \leq n)$ được gọi là *tổ hợp chập m của n* phần tử của X.

Gọi C_n^m (hoặc như các phần trước đã ký hiệu là C_n^m). Ta xét một số ví dụ sau

m	Các tổ hợp của $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$	Số tổ hợp
1	$(a_1); (a_2); (a_3); (a_4);$	4
2	$(a_1, a_2); (a_1, a_3); (a_1, a_4);$	6
	$(a_2, a_3); (a_2, a_4); (a_3, a_4);$	
3	$(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_2, a_4);$	4
	$(a_1, a_3, a_4); (a_2, a_3, a_4);$	
4	$(a_1, a_2, a_3, a_4);$	1
...	...	...

Chúng ta nhận ra ngay là các chỉnh hợp chập m của n phần tử nhận được từ các tổ hợp chập m bằng cách hoán vị m phần tử này. Vì vậy ta có liên hệ sau

$$A_n^m = C_n^m . P_m.$$

Từ đó suy ra

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Để chứng minh theo phương pháp quy nạp ta chứng minh

Ví dụ 8.3. *Số lượng tổ hợp chập m của n được tính theo công thức sau*

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m}. \tag{8.4}$$

Lời giải. 1) Ta chú ý rằng $C_n^1 = n$, nghĩa là với $m = 1$ công thức đúng.

2) Giả sử ta có

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{1.2\dots k(k+1)}.$$

Để nhận tất cả tổ hợp $k+1$ phần tử trong n phần tử: đầu tiên người ta viết tất cả các tổ hợp chập k của n phần tử và thêm vào mỗi tổ hợp này một phần tử thứ $k+1$ bởi một trong $n-k$ phần tử còn lại. Như vậy ta nhận được tất cả tổ hợp chập $k+1$ của n phần tử, nhưng sẽ nhận được bội $k+1$ lần. Thật vậy, tổ hợp $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ sẽ cùng nhận được theo cách; khi tổ hợp $a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ thêm vào phần tử a_1; cũng như khi tổ hợp $a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}$ thêm vào phần tử a_2; ...; cuối cùng khi tổ hợp $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ thêm vào a_{k+1}. Nghĩa là

$$C_n^k = C_n^k \frac{m-k}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)}{1.2\dots k(k+1)}. \qquad ☺$$

Ví dụ 8.4. *Chứng minh rằng hệ số Newton C_n^k là những số lẻ khi và chỉ khi $n = 2^s - 1$.*

Lời giải. Với $n \le 8$ mệnh đề khiểm tra trực tiếp đúng. Giả sử n là số tự nhiên bất kỳ và giả sử mệnh đề khẳng định đúng với mọi số tự nhiên nhỏ hơn n. Dễ thấy hệ số đa thức là

$$\frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \dots, \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2}{1.2.3\dots(n-1)},$$

tất cả là số lẻ khi và chỉ khi hệ số đa thức ngoài cùng (mà nó bằng n) là số lẻ và những số nhận được từ các hệ số đa thức còn lại bằng cách bỏ đi các thừa số lẻ ở mẫu số và tử số, cũng là lẻ. Ta đặt $n = 2m+1$. Trong trường hợp như vậy hệ số đa thức không có số cuối biểu diễn bằng các số trong dãy

$$\frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1.2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \dots, \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3.2}{1.2.3\dots(m-1)}.$$

Từ đây theo giả thiết quy nạp toán học những hệ số đa thức cuối cùng, còn suy ra tất cả hệ số đa thức sẽ là lẻ khi và chỉ khi m có dạng $2^k - 1$ nghĩa là khi đó $n2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$. ☺

Ví dụ 8.5. *Chứng minh rằng từ các chữ số* 1 *và* 2 *ta có thể lập* 2^{n+1} *số mà mỗi số đều có* 2^n *chữ số và cứ hai số một thì các chữ số ở hàng tương ứng (vị trí tương ứng) khác nhau không ít hơn* 2^{n-1}.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ ta được bốn số $11; 21; 12;$ và 22 thoả mãn mệnh đề.

Gọi a' là số có được khi thay trong a chữ số 1 bằng chữ số 2 và thay 2 bằng 1 và $\overline{ab}$ là số tạo thành khi viết b cạnh a. Giả sử đã xây dựng được tập hợp A_n từ 2^{n+1} số, mỗi số có 2^n chữ số, ngoài ra cứ hai số một khác nhau không ít hơn 2^{n-1} vị trí hàng số.

Xét tập hợp A_{n+1} gồm các số $\overline{aa}$ và $\overline{aa'}$ trong đó $a \in A_n$. Tất cả những số này có 2^{n+1} chữ số và tất cả có 2^{n+2} số. Ngoài ra bất cứ hai số nào đều khác nhau không ít hơn 2^n hàng số. Thật vậy, các số $\overline{aa}$ và $\overline{aa'}$, cũng như các số $\overline{aa}$ và $\overline{bb'}$ với mọi a, b đều khác nhau đúng 2^n hàng số (trong các hàng số này a và b khác nhau, a' và b' trùng nhau, và ngược lại). Các số $\overline{aa}$ và $\overline{bb}$ theo giả thiết quy nạp khác nhau không ít hơn 2^n hằng số. ☺

Ví dụ 8.6. *Với các số nguyên* m, n $(0 \leq m \leq n)$ *xây dựng các số* $d(n, m)$ *theo công thức sau:*

1) $d(n, 0) = d(n, m) = 1$, *với mọi* $n \geq 0$;

2) $m.d(n, m) = m.d(n-1, m) + (2n - m).d(n-1, m-1)$, *với mọi* $0 < m < n$.

Chứng minh rằng tất cả các số $d(n, m)$ *đều nguyên.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $d(n,m) = (C_n^m)^2$. Thật vậy, với $n = 1$ thì

$$d(1,0) = 1 = \left(C_1^0\right)^2; d(1,1) = 1 = \left(C_1^0\right)^2.$$

Giả sử bài toán đúng với $n = k$: $d(k,m) = (C_k^m)^2$, với mọi $0 \le m \le k$. Khi đó với $n = k+1$, ta có

1) Nếu $0 < m < k+1$ thì

$$\begin{aligned} m.d(k+1,m) &= m.d(k,m) + [2(k+1) - m]d(k,m-1) \\ &= m.\left(C_k^m\right)^2 + (2k+2-m)\left(C_k^{m-1}\right)^2 \\ &= \left[\frac{k!}{m!(k+1-m)!}\right]^2 [m(k+1-m)^2 + (2k+2-m)m \\ &= m.\left(C_{k+1}^m\right)^2. \end{aligned}$$

2) Nếu $m = 0$ hoặc $k+1$, thì $d(k+1,0) = 1 = (C_{k+1}^0)^2$ và $d(k+1,k+1) = 1 = (C_{k+1}^{k+1})^2$. Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có

$$d(n,m) = \left(C_n^m\right)^2, \forall 0 \le m \le n.$$

☺

Ví dụ 8.7. *Cho số lượng 3^n đồng xu ($n \ge 1$), một đồng xu trong đó là giả và nhẹ hơn số còn lại. Cho một chiếc cân đĩa không có quả cân. Chứng minh rằng bằng n lần cân có thể phát hiện ra đồng tiền giả. Có thể bằng n lần cân luôn luôn phát hiện ra đồng tiền giả hay không, nếu số lượng đồng xu không nhỏ hơn $3^n + 1$?*

Lời giải. Xét trường hợp $n = 1$. Ta đặt hai đồng xu lên mỗi bên một đĩa cân. Nếu cân thăng bằng, thì đồng xu giả là đồng xu còn lạ ở ngoài cân, còn trên cân không cân bằng, đồng tiền giả nằm ở bên nào nhẹ hơn.

Ta giả sử khẳng định của bài toán đúng với $n-1$. Bây giờ ta có 3^n. Ta chia chúng ra làm ba nhóm theo 3^{n-1} đồng xu và đặt hai nhóm lên từng đĩa cân. Nếu cân cân bằng, thì đồng xu giả ở nhóm thứ 3, còn ngược lại thì ở nhóm trên đĩa cân nhẹ hơn. Và cả hai trường hợp khẳng định của bài toán suy ra theo quy nạp.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu số lượng đồng xu lớn hơn 3^n, thì không phải lúc nào cũng phát hiện ra đồng xu giả bằng n lần cân và thậm trí trong trường hợp đã biết một số đồng xu thật rồi.

Trường hợp $n = 1$, khẳng định trên đúng hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với tất cả số tự nhiên $k(k \leq n-1)$ và xét trường hợp $k = n$. Ta ký hiệu F tập hợp tất cả các đồng xu đã cho, còn J tập hợp tất cả các đồng xu thật. Chú ý rằng số lượng đồng xu trong F lớn hơn 3^n, còn số lượng trong J là bất kỳ, có thể là 0. Dễ thấy rằng trên hai đĩa cân phải đặt số đồng xu bằng nhau. Bằng cách như vậy trên một đĩa cân hoặc ngoài hai đĩa cân có một nhóm nhiều hơn 3^{n-1} đồng xu từ F. Ta ký hiệu nhóm đó bằng N.

Nếu N ngoài hai đĩa cân, thì theo điều kiên hai đĩa cân cân bằng, đồng xu giả ở nhóm N và theo giả thiết quy nạp nó không thể tách đồng tiền giả được bằng $n-1$ lần cân.

Nếu nhóm N là một trong hai đĩa cân và đó là đĩa cân nhẹ hơn, thì đồng xu giả nằm trong nó, khi đó theo giả thiết quy nạp cũng không tách được đồng xu giả. ☺

Ví dụ 8.8. *Cho bảng hình vuông các số*

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}. \end{matrix}$$

Chứng minh rằng nếu M là một hằng số sao cho

$$\sum_{j=1}^{n} |x_1 a_{j1} + x_2 a_{j2} + \cdots + x_n a_{jn}| \leq M$$

với mọi cách chọn những số $x_i = \pm 1$, thì

$$|a_{11}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{nn}| \leq M.$$

Lời giải. Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với $n-1$. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ là một cách chọn bất kỳ của ± 1. Khi đó ta dùng bất đẳng thức sau

$$2|\alpha| = |2\alpha| = |(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)| \leq |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|,$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}
2\sum_{j=1}^{n-1} &|x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1}| + 2|a_{nn}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1} |x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1} + a_{nn}| + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} |x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1} - a_{nn}| + \\
&\quad + |a_{nn} + x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1}| + \\
&\quad + |a_{nn} - x_1 a_{j1} - \cdots - x_{n-1} a_{j,n-1}| \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} |x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1} + a_{nn}| + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} |x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1} - a_{nn}| \leq 2M.
\end{aligned}$$

Tức là
$$\sum_{j=1}^{n-1} |x_1 a_{j1} + \cdots + x_{n-1} a_{j,n-1}| \leq M - |a_{nn}|,$$
từ đây theo giả thiết quy nạp suy ra
$$|a_{11}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{n-1,n-1}| \leq M - |a_{nn}|,$$
nghĩa là $|a_{11}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{nn}| \leq M$. ☺

Ví dụ 8.9. *Cho các số tự nhiên* $a_1, a_2, \ldots, a_n (n > 1)$*, sao cho* $a_k \leq k$*,* $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *và tổng* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *là chẵn. Chứng minh rằng một trong các tổng đại số* $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots \pm a_n$ *bằng* 0.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Khi $n = 2$, ta dễ thấy $a_1 = a_2 = 1$. Do đó $a_1 - a_2 = 0$. Đối với $n + 1$ số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ $(n \geq 2)$ thoả mãn các điều kiện của bài toán, ta xét hai trường hợp sau:

1. $a_n \neq a_{n+1}$. Đặt $a'_n = |a_n - a_{n+1}|$, khi đó do $1 \leq a_n \leq n$ và $1 \leq a_{n+1} \leq n + 1$ nên $1 \leq a'_n \leq (n + 1) - 1 = n$. Mặt khác, tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ chẵn, riêng $a_n + a_{n+1}$ có cùng tính chẵn lẻ với $a' = |a_n - a_{n+1}|$, do đó tổng $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a'_n$ cũng thoả mãn các điều kiện của bài toán. Theo giả thiết quy nạp ta có một trong các tổng $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-1} \pm a'_n = a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-1} \pm |a_n - a_{n+1}|$ bằng 0. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2. $a_n = a_{n+1}$. Lúc này do $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$ chẵn và $a_n + a_{n+1} = 2a_n$ chẵn nên $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ cũng chẵn. Vậy $n - 1$ số $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ cũng thoả mãn các điều kiện bài toán nếu chỉ cần $n - 1 > 1$ hay $n \geq 3$. Nhưng điều này là hiển nhiên vì nếu $n = 2$, (rõ ràng chỉ cần chú ý trường hợp này mà thôi vì $n \geq 2$), thì từ giả thiết $a_1 \leq 1, a_2 \leq 2$ và $a_3 \leq 3$ và tổng $a_1 + a_2 + a_3$ chẵn, ta suy ra $a_1 = 1$ và $a_2 \neq a_3$ tức là rơi vào trường hợp 1. đã xét. Do

đó có thể sử dụng giả thiết quy nạp để suy ra rằng ít nhất một trong các biểu thức $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-1}$ bằng 0 và do đó một trong các tổng $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-1} + a_n - a_{n+1}$ cũng bằng 0. ☺

8.2. Một số đẳng thức

Phần này ta chứng minh một số hằng đẳng thức đáng nhớ.

Ví dụ 8.10. *Chứng minh nhị thức Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}, \tag{8.5}$$

ở đây n là số nguyên dương.

Lời giải. *Bước cơ sở*: Dễ thấy (8.5) đúng với $n = 1$.

Bước quy nạp: Giả sử đẳng thức (8.5) đúng với n, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \\ &= [a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n](a+b) \\ &= a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \cdots + C_n^k a^{n+1-k} b^k + \cdots + ab^n + \\ &+ a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \cdots + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left[1 + C_n^1\right] a^n b + \left[C_n^1 + C_n^2\right] a^{n-1} b^2 + \cdots \\ \cdots + \left[C_n^{k-1} + C_n^k\right] a^{n+1-k} b^k + \cdots + b^{n+1}.\end{aligned}$$

Những hệ số trong công thức trên rút gọn theo công thức (2.8) và ta có

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i.$$

Vậy đẳng thức (8.5) đúng với $n+1$. ☺

Ví dụ 8.11. *Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số thực, chứng minh rằng*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n) \tag{8.6}$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Lời giải. Với $n = 2$ công thức (8.6) là hằng đẳng thứ đáng nhớ. Giả sử công thức (8.6) đúng với $n = k - 1$, nghĩa là

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2S$$

ở đây S là tổng tất cả các khả năng từng đôi của dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Ta sẽ chứng minh

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2S_1$$

ở đây $S_1 = S + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k$. Thật vậy,

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 &= [(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2 \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2) + 2S + 2(a_1 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2) + 2S_1.\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 8.12. *Cho số nguyên dương n và số thực x, chứng minh rằng*

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx].$$

Lời giải. Bài ra không rõ cho ta phải quy nạp theo thông số nào. ý tưởng để chứng minh là chỉ lấy giá trị x trong khoảng nhỏ $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ với $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Đầu tiên giả sử x nằm trong khoảng con $[0, \frac{1}{n})$. Khi đó $[x + \frac{i}{n}] = 0$ với $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, như vậy $\sum_{i=0}^{n-1} [x + \frac{i}{n}] = 0$. Cũng có

$[nx] = 0$, như vậy ta đã chứng minh kết quả đúng cho khoảng con đầu tiên.

Bây giờ ta giả sử khẳng định đúng cho khoảng $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, ở đây k là số nguyên dương, và cho x số thực bất kỳ trong khoảng này. Khi đó

$$[x] + [x + \frac{1}{n}] + [x + \frac{2}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx].$$

Cộng thêm $\frac{1}{n}$ vào x (ta làm được vì bằng cách này ta nhận được số bất kỳ trong $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$), mỗi số hạng ở bên trái ngoài số hạng cuối cùng, đều chuyển sang số hạng bên phải nó, và số hạng cuối cùng là $[x + \frac{n-1}{n}]$ tức là $[x+1]$ thực chất cộng 1 vào $[x]$. Như vậy thay x bằng $x + \frac{1}{n}$ vào vế trái, đẳng thức trên tăng lên 1.

Đồng thời khi đó khi x ở $[nx]$ thay bằng $x + \frac{1}{n}$, giá trị của nó cũng tăng lên 1. Do mỗi bên của đẳng thức đều tăng lên 1 khi thay x bằng $x + \frac{1}{n}$, kết quả vẫn còn đúng cho tất cả các số trong khoảng $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$.

Theo giả thiết quy nạp kết quả còn đúng cho tất cả giá trị dương của x. Hoàn toàn tương tự cũng đúng cho tất cả các giá trị âm của x. ☺

Ví dụ 8.13. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$*

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n.1.3.5\ldots(2n-1).$$

Lời giải. Ký hiệu tích ở vế trái là T_n. Dùng phương pháp quy nạp toán học theo n. Với $n = 1$ công thức đúng vì $T_1 = (1+1) = 2^1$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$. Ta có

$$T_k = (k+1)(k+2)\dots(k+k) = 2^k.1.3.5\dots(2k-1).$$

Ta cần chứng minh

$$[(k+1)+1][(k+1)+2]\dots[(k+1)+k][(k+1)+(k+1)] = 2^{k+1}.1.3.5\dots(2k+$$

Hoặc là

$$(k+2)(k+3)\dots(k+1+k)(2k+2) = 2^{k+1}.1.3.5\dots(2k+1).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= (k+2)(k+3)\dots(k+1+k)(2k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+k)}{(k+1)}.(k+1+k)(2k+2) \\ &= T_k\frac{(2k+1).2(k+1)}{k+1}. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 8.14. *Chứng minh đẳng thức với mọi số nguyên* $n \geq 0$

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\dots\cos2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Lời giải. 1) Với $n = 0$ đẳng thức đúng, vì $\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$.

2) Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, tức là

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\dots\cos2^k\alpha = \frac{\sin 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha}.$$

Khi đó nó cũng đúng với $n = k+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\dots\cos2^k\alpha\cos2^{k+1}\alpha &= \frac{\sin 2^{k+1}\alpha\cos 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1}\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin 2^{k+2}\alpha}{2^{k+2}\sin\alpha}. \end{aligned}$$

☺

Ví dụ 8.15. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên* $n \geq 1$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}.$$

Lời giải. 1) Với $n = 1$ khẳng định trên là đúng.

2) Cho

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin(k+1)x = \\
&= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + \sin(k+1)x = \\
&= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{kx}{2} + 2\sin \frac{k+1}{2}x \cos \frac{k+1}{2}x \\
&= \frac{\sin \frac{k+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{k+1}{2}x,
\end{aligned}$$

vì

$$2\cos \frac{k+1}{2}x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{k+2}{2}x - \sin \frac{kx}{2}.$$ ☺

Ví dụ 8.16. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên* $n \geq 1$

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + n \sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Lời giải. 1) Với $n = 1$ khẳng định đúng, vì

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{4\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{4\sin^2 \frac{x}{2}} = \sin x.$$

2) giả sử khẳng định đúng với $n = k$ tức là

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + k\sin kx = \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \cdots + k\sin kx + (k+1)\sin(k+1)x = \\
&= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} + (k+1)\sin(k+1)x \\
&= \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x + 2(k+1)\sin(k+1)x(1-\cos x)}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{(k+2)\sin(k+1)x + (k+1)\sin kx}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} - \frac{2(k+1)\cos x\sin(k+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{(k+2)\sin(k+1)x + (k+1)\sin kx}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} - \frac{(k+1)[\sin(k+2)x + \sin kx]}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 8.17. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{cotg} x$$

với $x \neq m\pi$.

Lời giải. 1) Với $n = 1$ khẳng định đúng, vì

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2) Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, tức là

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^k}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^k} - \operatorname{cotg} x.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}} = \\
&\qquad = \frac{1}{2^k}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^k} - \operatorname{cotg} x + \frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{k+1}} \\
&\qquad = \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\operatorname{cotg}^2\dfrac{x}{2^{k+1}} - 1}{\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^{k+1}}} + \frac{1}{2^{k+1}\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2^{k+1}}} - \operatorname{cotg} x \\
&\qquad = \frac{1}{2^{k+1}}\operatorname{cotg}\frac{x}{2^{k+1}} - \operatorname{cotg} x.
\end{aligned}$$

☺

Ví dụ 8.18. *Cho a và $A > 0$ là những số bất kỳ và đặt*

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a}), a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + \frac{A}{a_1}), \ldots, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}).$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}},$$

với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Lời giải. 1) Bước cơ sở: Dễ thấy đẳng thức đúng với $n = 1$.

2) Bước quy nạp: Giả thiết đẳng thức đúng với n. Ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{A}}{a_{n+1} + \sqrt{A}} = \frac{\frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n}) - \sqrt{A}}{\frac{1}{2}(a_n + \frac{A}{a_n}) + \sqrt{A}} = \frac{a_n^2 - 2\sqrt{A}a_n + A}{a_n^2 + 2\sqrt{A}a_n + A} = (\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}})^2.$$

Nhưng theo giả thiết quy nạp

$$\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^{n-1}}.$$

Vì vậy

$$\frac{a_{n+1} - \sqrt{A}}{a_{n+1} + \sqrt{A}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n + \sqrt{A}}\right)^2 = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2.2^{n-1}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{A}}{a_1 + \sqrt{A}}\right)^{2^n}$$

☺

8.3. Bài tập

▷ **8.19.** Chứng minh rằng

$$\cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

▷ **8.20.** Chứng minh rằng

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}).$$

▷ **8.21.** Cho hai dãy số $a_1, a_2, \ldots$ và $b_1, b_2, \ldots$ Chứng minh đẳng thức

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu = a_n B_n - \sum_{\mu=1}^{n-1}(a_{\mu+1} - a_\mu)B_\mu, (n = 2, 3, \ldots),$$

ở đây $B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

▷ **8.22.** Hãy tìm tổng

$$1 - \frac{k}{m+1} + \frac{k(k-1)}{(m+1)(m+2)} - \cdots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)},$$

ở đây m là số tự nhiên cố định, k là số tự nhiên bất kỳ.

CHƯƠNG 9

LIÊN PHÂN SỐ

9.1. Khái niệm liên phân số

Một biểu thức có dạng

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{9.1}$$

trong đó $q_1, q_2, \ldots, q_n$ là số dương, còn q_0 là số không âm, gọi là *liên phân số* . Những số $q_0, q_1, \ldots, q_n$ gọi là phần *thương không đầy đủ* (phần tử), còn liên phân số

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{9.2}$$

gọi là *thương đầy đủ* của phân số (9.1).

Để thuận tiện liên phân số (9.1) được viết theo cách sau:

$$(q_0, q_1, \ldots, q_n). \tag{9.3}$$

Dễ thấy rằng với $n \geq 1$ liên phân số (9.3) biểu diễn một số dương nào đó ω, gọi là giá trị của nó. Ta ký hiệu

$$\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_n).$$

Cho một liên phân số (nghĩa là cho các phần tử của nó $q_0, q_1, \ldots, q_n$) với giá trị ω. Ta ký hiệu $\omega_k (0 \leq k \leq n)$ phần đầy đủ của (9.2). Khi đó

$$\omega_k = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \cfrac{1}{q_{k+2} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

Ta thấy rằng ω_k có thể giữ vai trò như phần không đầy đủ cuối cùng (thứ k). Bởi vậy ta có thể chú ý đến cách viết sau:

$$\begin{gathered}(q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k, \ldots, q_n) = (q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, \omega_k); \\ \omega_k = (q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n), k = 0, 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{9.4}$$

Dễ thấy với $k = 0$ phần đầy đủ của (9.2) trùng với liên phân số đã cho, với $k = n$ là phần không đầy đủ cuối cùng q_n, nghĩa là $\omega_0 = \omega, \omega_n = q_n$.

Ví dụ: a) Số $\omega = (1,2,2)$ biểu diễn như phân số bình thường. Thật vậy

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

b) Số $\frac{88}{67}$ có thể biểu diễn như liên phân số với những phần tử nguyên. Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{88}{67} &= 1 + \frac{21}{67}, && (q_0 = 1), \\ \frac{67}{21} &= 3 + \frac{4}{21}, && (q_1 = 3), \\ \frac{21}{4} &= 5 + \frac{1}{4}, && (q_3 = 5, q_4 = 4). \end{aligned}$$

Vậy ta có thể viết

$$\frac{88}{67} = (1,3,5,4).$$

9.2. Phân tích số hữu tỷ thành liên phân số

Theo định nghĩa phần trước nếu số phần tử của liên phân số là hữu hạn thì ta có thể chuyển liên phân số thành một phân số bình thường. Ngược lại, một phân số bình thường có thể biểu diễn dưới dạng liên phân số.

Ví dụ 9.1. *Chứng minh rằng mọi số hữu tỷ dương đều có thể phân tích thành liên phân số.*

Lời giải. Cho $\omega = \frac{a}{b}$, ở đây a và b là số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Theo thuật toán Euclide chương trước ta có

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1 \\ b &= r_1 q_1 + r_2 \\ &\dots\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_n, \end{aligned} \tag{9.5}$$

ở đây $b > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n = 1$. Từ đây và những đẳng thức (9.5) suy ra $q_n \geq 2$. Ta sẽ chứng minh rằng ω phân tích được thành liên phân số

$$\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_n). \tag{9.6}$$

Muốn vậy ta đặt $r_0 = b, \omega_i = \dfrac{r_{i-1}}{r_i}, (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Đẳng thức đầu tiên của (9.5) cho ta

$$\omega = \frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{r_0} = q_0 + \frac{1}{\omega_1} = (q_0, \omega_1).$$

Tương tự từ đẳng thức thứ hai ta tìm được $\omega = (q_0, q_1, \omega_2)$. Ta chứng minh rằng

$$\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}, \omega_i), i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.7}$$

Thật vậy, giả sử đẳng thức (9.7) đúng với số i nào đó $(1 \leq i \leq n-1)$. Ta sẽ chứng minh khi đó nó cũng đúng cả cho $i+1$. Thật vậy, ta chia đẳng thức $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$ với r_i, ta nhận được $\dfrac{r_{i-1}}{r_i} = q_i + \dfrac{r_{i+1}}{r_i}$, theo định nghĩa của ω_i là $\omega_i = q_i + \dfrac{1}{\omega_{i+1}} = (q_i, \omega_{i+1})$. Suy ra $\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}, \omega_i) = (q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}, q_i, \omega_{i+1})$, như vậy (9.7) đã chứng minh. Từ (9.7) suy ra (9.6) với $i = n$.

Ví dụ 9.2. *Chứng minh rằng sự phân tích thành liên phân số của mỗi số hữu tỷ là duy nhất.*

Lời giải. Giả sử cùng với sự khai triển (9.6) ω còn có biểu diễn khác

$$\omega = (q_0', q_1', \ldots, q_m'), \qquad q_m' > 1. \tag{9.8}$$

Ta cho rằng $m \geq n$. Cho ω_i' là phần đầy đủ

$$\omega_i' = (q_i', q_{i+1}', \ldots, q_m'), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Hiển nhiên ta có

$$\omega = q_0 + \frac{1}{\omega_1} = q_0' + \frac{1}{\omega_1'},$$

từ đây suy ra rằng chúng bằng nhau phần nguyên cũng như phần phân số ở hai vế của đẳng thức. Nghĩa là $q_0 = q_0', \omega_1 = \omega_1'$. Đẳng thức sau cũng có thể viết:

$$q_1 + \frac{1}{\omega_2} = q_1' + \frac{1}{\omega_2'},$$

từ đó suy ra $q_1 = q_1', \omega_2 = \omega_2'$. Theo cách này (phương pháp quy nạp toán học) ta sẽ dẫn đến đẳng thức $q_{n-1} = q_{n-1}'$ và

$$\omega_n = \omega_n', \tag{9.9}$$

ở đây $\omega_n = q_n$. Ta giả thiết rằng $m > n$. Khi đó $\omega_n' = q_n' + \dfrac{1}{\omega_{n+1}'}$, ở đây $\omega_{n+1}' > 1$ và (9.9) suy ra

$$q_n = q_n' + \frac{1}{\omega_{n+1}'}.$$

Nhưng đẳng thức đó không thể xẩy ra, vì vế phải không phải là một số nguyên. Điều vô lý đó suy ra $m = n, \omega_n' = q_n' = q_n$. ☺

9.3. Phân số xấp xỉ

Cho liên phân số $(q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Ta xét dãy liên phân số

$$\alpha_0 = (q_0), \alpha_1 = (q_0, q_1), \ldots, \alpha_n = (q_0, q_1, \ldots, q_n). \tag{9.10}$$

Ta biết rằng số α_i là số hữu tỷ. Vì thế chúng có thể biểu diễn như những phân số tối giản ($D(a,b)$ là ước số chung lớn nhất của a và b)

$$\alpha_i = (q_0, q_1, \ldots, q_i) = \frac{P_i}{Q_i}, (D(P_i, Q_i) = 1; i = 0, 1, 2, ..., n). \quad (9.11)$$

Phân số $\frac{P_i}{Q_i}$ gọi là i-phân số xấp xỉ của liên phân số $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Phân số xấp xỉ giữ vai trò quan trong trong lý thuyết liên phân số. Những ví dụ sau đây chỉ ra một số tính chất của chúng:

Ví dụ 9.3. *Chứng minh rằng với mọi liên phân số ta đều có*

$$P_{i+1} = P_i q_{i+1} + P_{i-1}, \quad (9.12)$$

$$Q_{i+1} = Q_i q_{i+1} + Q_{i-1}, \quad (9.13)$$

$$P_{i+1} Q_i - P_i Q_{i+1} = (-1)^i, \quad (9.14)$$

với $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Lời giải. Ta chứng minh quy nạp theo i. Với $i = 1$, ta tính P_i và Q_i với $i = 1, 2$. Từ (9.11) ta tìm được $q_0 = \frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}$ và vì phân số $\frac{P_0}{Q_0}$ tối giản (theo định nghĩa), nên

$$P_0 = q_0, Q_0 = 1. \quad (9.15)$$

Với $i = 1$ ta có $(q_0, q_1) = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$. Số $q_0 q_1 + 1$ và q_1 nguyên tố cùng nhau. Ta để chứng minh

$$D(a + c, b) = D(a, b) \quad (9.16)$$

với điều kiện c chia hết cho b. Áp dụng (9.16) cho $c = q_0 q_1, b = q_1, a = 1$, ta sẽ nhận được $D(q_0 q_1 + 1, q_1) = D(q_1, 1) = 1$. bây giờ từ (9.11) ta có $\dfrac{q_0q_1+1}{q_1} = \dfrac{P_1}{Q_1}$ và

$$P_1 = q_0q_1+1, Q_1 = q_1. \tag{9.17}$$

Với $i = 2$ ta có $(q_0, q_1, q_2) = \dfrac{q_0(q_1q_2+1)+q_2}{q_1q_2+1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$.

Đẳng thức sau cùng là đẳng thức giữa các phân số tối giản. Thật vậy $\dfrac{P_2}{Q_2}$ tối giản theo định nghĩa, còn bên vế trái ta sẽ áp dụng hai lần (9.16)

$$D(q_0(q_1q_2+1)+q_2, q_1q_2+1) = D(q_1q_2+1, q_2) = D(q_2, 1) = 1.$$

Suy ra

$$P_2 = q_0(q_1q_2+1)+q_2, Q_2 = q_1q_2+1. \tag{9.18}$$

Sử dụng (9.17) và (9.18) với sự kiểm tra trực tiếp suy ra (9.12), (9.13) và (9.14) với $i = 1$.

Giả sử khẳng định đúng với số i nào đó ($(1 \leq i \leq n-2)$. Ta sẽ chứng minh rằng chúng cũng đúng với $i+1$ nghĩa là thoả mãn những đẳng thức sau

$$P_{i+2} = P_{i+1}q_{i+2} + P_i, \tag{9.12a}$$

$$Q_{i+2} = Q_{i+1}q_{i+2} + Q_i, \tag{9.13a}$$

$$P_{i+2}Q_{i+1} - P_{i+1}Q_{i+2} = (-1)^{i+1}, \tag{9.14a}$$

Từ định nghĩa (9.11) và theo (9.4) ta có

$$\frac{P_{i+2}}{Q_{i+2}} = (q_0, \ldots, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}) = (q_0, \ldots, q_i, q_{i+1}^*), \tag{9.19}$$

ở đây

$$q_{i+1}^* = q_{i+1} + \frac{1}{q_{i+2}}. \tag{9.20}$$

Ta so sánh (9.19) với (9.11), đưa đến đẳng thức

$$\frac{P_{i+2}}{Q_{i+2}} = (\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}})^*, \tag{9.21}$$

ở đây dấu * chỉ ra rằng thương không đầy đủ cuối cùng q_{i+1} của phân số trong ngoặc cần được thế bằng q_{i+1}^* từ (9.20). Theo giả thiết quy nạp, nghĩa là từ (9.12) và (9.13), suy ra

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{P_i q_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i q_{i+1} + Q_{i-1}}. \tag{9.22}$$

Từ (9.11) thấy rằng P_{i-1}, Q_{i-1}, P_i và Q_i không phụ thuộc vào q_{i+1}. Khi đó áp dụng trên (9.22) toán tử *, ta nhận được

$$\left(\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}\right)^* = \left(\frac{P_i q_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i q_{i+1} + Q_{i-1}}\right)^* = \frac{P_i(q_{i+1} + \dfrac{1}{q_{i+2}}) + P_{i-1}}{Q_i(q_{i+1} + \dfrac{1}{q_{i+2}})} + Q_{i-1}$$
$$= \frac{q_{i+2}(P_i q_{i+1} + P_{i-1}) + P_i}{q_{i+2}(Q_i q_{i+1} + Q_{i-1}) + Q_i}.$$

Từ kết quả này cùng với (9.12), (9.13) và (3.21) cho ta

$$\frac{P_{i+2}}{Q_{i+2}} = \frac{P_{i+1} q_{i+2} + P_i}{Q_{i+1} q_{i+2} + Q_i}. \tag{9.23}$$

Vì $\dfrac{P_{i+2}}{Q_{i+2}}$ là phân số tối giản theo định nghĩa, Để chứng minh (9.12a) và (9.13a) chỉ còn khẳng định vế phải (9.23) cũng là phân số tối giản. Giả sử ngược lại, khi đó $P_{i+1}q_{i+2} + P_i$ và $Q_{i+1}q_{i+2} + Q_i$ có ước số chung $d > 1$. Dễ thấy d cũng là ước số chung của cả số

$$P_{i+1}(Q_{i+1}q_{i+2} + Q_i) - Q_{i+1}(P_{i+1}q_{i+2} + P_i) = P_{i+1}Q_i - Q_{i+1}P_i.$$

Nhưng theo giả thiết quy nạp hiệu sau cùng là $(-1)^i$ và không chia hết cho d, trái với điều giả sử ngược lại. Như vậy phân số ở vế phải của (9.23) cũng là tối giản, suy ra (9.12a) và (9.13a) đã chứng minh.

Ta dùng các kết quả nhận được để chứng minh (9.14a). Ta có

$$\begin{aligned} P_{i+2}Q_{i+1} - P_{i+1}Q_{i+2} &= (P_{i+1}q_{i+2} + P_i)Q_{i+1} - P_{i+1}(Q_{i+1}q_{i+2} + Q_i) \\ &= -(P_{i+1}Q_i - P_iQ_{i+1}) = -(-1)^i = (-1)^{i+1}, \end{aligned}$$

ở đây ta đã dùng (9.14) như giả thiết quy nạp. ☺

Ví dụ 9.4. *Chứng minh những đẳng thức sau*

a) $\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} - \dfrac{P_i}{Q_i} = (-1)^i.\dfrac{1}{Q_iQ_{i-1}}, \qquad (i \geq 1);$

b) $Q_iP_{i-2} - P_iQ_{i-2} = (-1)^{i-1}.q_i, \qquad (i \geq 2);$

c) $\dfrac{P_{i-2}}{Q_{i-2}} - \dfrac{P_i}{Q_i} = (-1)^{i-1}.\dfrac{q_i}{Q_iQ_{i-2}}, \qquad (i \geq 2);$

d) $\dfrac{Q_i}{Q_i - 1} = (q_i, q_{i-1}, \ldots, q_1), \qquad (i \geq 1).$

Lời giải. a) Suy ra từ đẳng thức $\dfrac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} - \dfrac{P_i}{Q_i} = \dfrac{P_{i-1}Q_i - P_iQ_{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$, với tử số ở vế phải dùng (9.14).

b) Theo (9.12) ta có $P_{i-2} = P_i - q_iP_{i-1}$, $Q_{i-2} = Q_i - q_iQ_{i-1}$.Khi đó $Q_iP_{i-2} - P_iQ_{i-2} = Q_i(P_i - q_iP_{i-1}) - P_i(Q_i - q_iQ_{i-1}) = q_i(P_iQ_{i-1} - Q_iP_{i-1}) = (-1)^{i-1}q_i$, ở đây ta đã dùng (3.5).

c) Áp dụng phần b).

d) Với $i = 1$ đẳng thức đã cho có dạng $\dfrac{Q_1}{Q_0} = (q_1)$, điều này đúng vì $Q_0 = 1, Q_1 = q_1, (q_1) = q_1$. Giả sử khẳng định đúng với $i (1 \leq i \leq n-1)$. Ta sẽ chỉ ra rằng khi đó nó cũng đúng với $i+1$ hay là

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_i} = (q_{i+1}, q_i, \ldots, q_1).$$

Thật vậy, từ (9.13) ta nhận được

$$\frac{Q_{i+1}}{Q_i} = q_{i+1} + \frac{Q_{i-1}}{Q_i} = q_{i+1} + \frac{1}{\dfrac{Q_i}{Q_{i-1}}} = (q_{i+1}, \frac{Q_i}{Q_{i-1}}).$$ ☺

9.4. Liên phân số vô hạn

Cho dãy số những số thực $a_0, a_1, \ldots$ ký hiệu

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \tag{9.24}$$

gọi là liên phân số vô hạn, còn số $a_0, a_1, \ldots$ gọi là phần thương không đầy đủ của (9.24). Để thuận tiện chúng ta viết (9.24) dưới dạng

$$(a_0, a_1, \ldots). \tag{9.25}$$

Như ta đã biết, mọi liên phân số hữu hạn đều biểu diễn một số (giá trị phân số), giá trị này nhận được qua hữu hạn bước thực hiện tính toán hữu tỉ trên phần thương không đầy đủ. Nhưng liên phân số vô hạn không có điều đó.

Tương tự như phân số hữu hạn

$$\alpha_i = (a_0, a_1, \ldots, a_i) \tag{9.26}$$

gọi là phân số xấp xỉ thứ i, còn mỗi liên phân số vô hạn

$$(a_k, a_{k+1}, \ldots) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

gọi là phần dư của (9.24). Số (9.26) xác định theo công thức (9.11) $\alpha_i = \dfrac{P_i}{Q_i}$. Theo cách này mọi phân số vô hạn (9.24) tồn tại dãy phân số xấp xỉ

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots \tag{9.27}$$

Mỗi một phân số xấp xỉ là một số thực. Nếu dãy (9.27) hội tụ và giới hạn của nó là một số ω thì phân số (9.24) gọi là hội tụ, còn ω là giá trị của liên phân số vô hạn. Ta có thể viết

$$\omega = (a_0, a_1, \ldots)$$

Trong trường hợp ngược lại, liên phân số (9.24) gọi là phân kỳ.

9.5. Ví dụ

Ví dụ 9.5. *Cho liên phân số*

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

Ta đặt

$$P_0 = b_0, Q_0 = 1, P_1 = b_0 b_1 + a_1, Q_1 = b_1, \ldots$$

và công thức chung

$$P_{k+1} = b_{k+1} P_k + a_{k+1} P_{k-1},$$
$$Q_{k+1} = b_{k+1} Q_k + a_{k+1} Q_{k-1}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

Lời giải. Dễ thấy rằng với $k = 0, 1$ công thức đúng. Giả thiết nó đúng với $k = n - 1$, ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng cho

$k = n$. Như vậy giả thiết có

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}}}} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

Nhưng từ công thức cho P_k và Q_k ta có

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{b_{n-1}P_{n-2} + a_{n-1}P_{n-3}}{b_{n-1}Q_{n-2} + a_{n-1}Q_{n-3}}$$

ở đây $P_{n-2}, P_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-3}$ không phụ thuộc vào a_{n-1} và b_{n-1}. Mặt khác, dùng giả thiết quy nạp ta nhận được

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}} = \frac{(b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n})P_{n-2} + a_{n-1}P_{n-3}}{(b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n})Q_{n-2} + a_{n-1}Q_{n-3}}$$

$$= \frac{P_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}P_{n-2}}{Q_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}Q_{n-2}} = \frac{b_nP_{n-1} + a_nP_{n-2}}{b_nQ_{n-1} + a_nQ_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}.$$

Ví dụ 9.6. *Chứng minh rằng (số mẫu số trong liên phân số bằng n).*

$$\cfrac{r}{r + 1 - \cfrac{r}{r + 1 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{r}{r+1}}}} = \frac{r^{n+1} - r}{r^{r+1} - 1}$$

Lời giải. Ta ký hiệu liên phân số theo $\dfrac{P_n}{Q_n}$. Ta có

$$P_1 = r; \qquad Q_1 = r+1;$$
$$P_2 = r(r+1); \qquad Q_2 = r^2 + r + 1;$$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

$$P_n = r\frac{r^n - 1}{r-1}; \quad Q_n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$

Với $n = 1$ công thức này đúng. Giải thiết nó đúng với $n = m$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n = m+1$. Ta có (theo ví dụ trên)

$$P_{m+1} = b_{m+1}P_m + a_{m+1}P_{m-1}.$$

Trong trường hợp của chúng ta thì

$$P_{m+1} = (r+1)r\frac{r^{m-1}-1}{r-1} - r^2\frac{r^{m-1}-1}{r-1} = r\frac{r^{m-1}-1}{r-1}.$$

Tương tự ta cũng có $Q_{m+1} = \dfrac{r^{m+2}-1}{r-1}$. ☺

Ví dụ 9.7. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{u_1 + u_2 - \cfrac{u_2^2}{u_2 + u_3 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{u_{n-1}^2}{u_{n-1}+u_n}}}}}.$$

Lời giải. Ta đặt $\dfrac{1}{u_r} + \dfrac{1}{u_{r+1}} = \dfrac{1}{u_r + x_r}$. Khi đó ta tìm được $x_r = -\dfrac{u_r^2}{u_r + u_{r+1}}$. Vì thế $\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{u_1+u_2}}$. Hơn nữa,

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 + x_2} = \frac{1}{u_1 + x_2'},$$

ở đây $x_2' = -\dfrac{u_1^2}{u_1+u_2+x_2}$. Như vậy

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\cfrac{1}{u_1-\cfrac{u_1^2}{u_1+u_2+x_2}}=\cfrac{1}{u_1-\cfrac{u_1^2}{u_1+u_2-\cfrac{u_2^2}{u_2+u_3}}}.$$

Tương tự bằng phương pháp quy nạp ta có thể chứng minh công thức chung. ☺

Ví dụ 9.8. *Hãy chứng minh đẳng thức sau*

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}=\cfrac{a_1c_1}{b_1c_1+\cfrac{a_2c_1c_2}{b_2c_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{a_nc_nc_{n-1}}{b_nc_n}}}},$$

ở đây $c_1, c_2, c_2, \ldots, c_n$ là những số bất kỳ khác 0.

Lời giải. Ta ký hiệu bên trái bằng phân số $\dfrac{P_n}{Q_n}$, bên phải bằng phân số $\dfrac{P_n'}{Q_n'}$. Ta phải chứng minh $\dfrac{P_n}{Q_n}=\dfrac{P_n'}{Q_n'}$ với mọi số nguyên dương n. Ta có

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{a_1}{b_1};\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{a_1b_2}{b_1b_2+a_2};\ldots$$
$$\frac{P_1'}{Q_1'}=\frac{c_1a_1}{c_1b_1};\ \frac{P_2'}{Q_2'}=\frac{c_1c_2a_1b_2}{c_1c_2(b_1b_2+a_2)};\ldots$$

Ta có thể đặt $P_1=a_1; Q_1=b_1; P_2=a_1b_2; Q_2=b_1b_2+a_2$ và khi đó ta có các đẳng thức sau (do bài 9.6)

$$P_{n+1}=b_{n+1}P_n+a_{n+1}P_{n-1},\quad Q_{n+1}=b_{n+1}Q_n+a_{n+1}Q_{n-1}.$$

Ta lại đặt

$$P_1'=c_1a_1; P_2'=c_1c_2a_1b_2; Q_1'=c_1b_1; Q_2'=c_1c_2(b_1b_2+a_2).$$

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi n các đẳng thức sau đúng

$$P'_n = c_1c_2 \dots c_n P_n; Q'_n = c_1c_2 \dots c_n Q_n.$$

Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp, giả thiết các đẳng thức đúng với mọi số nhỏ hơn hay bằng n, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Ta có

$$P'_{n+1} = c_{n+1}b_{n+1}P'_n + c_nc_{n+1}a_{n+1}P'_{n-1},$$
$$Q'_{n+1} = c_{n+1}b_{n+1}Q'_n + c_nc_{n+1}a_{n+1}Q'_{n-1}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P'_{n+1} &= c_{n+1}b_{n+1}c_1c_2 \dots c_nP_n + c_nc_{n+1}a_{n+1}c_1c_2 \dots c_{n-1}P_{n-1} \\ &= c_1c_2 \dots c_{n+1}(b_{n+1}P_n + a_{n+1}P_{n-1}) = c_1c_2 \dots c_{n+1}P_{n+1}. \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng chứng minh được $Q'_{n+1} = c_1c_2 \dots c_{n+1}Q_{n+1}$. ☺

Ví dụ 9.9. *Chứng minh các đẳng thức sau*

1) $$\frac{\sin(n+1)x}{\sin nx} = 2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x - \cfrac{1}{2\cos x + \ddots + \cfrac{1}{2\cos x}}}$$

liên phân số bậc n.

2) $$1 + b_2 + b_2b_3 + \dots + b_2b_3 \dots b_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{b_2}{b_2 + 1 - \cfrac{b_3}{b_3 + 1 - \ddots + \cfrac{b_n}{b_n + 1}}}}$$

Lời giải. 1) Ta đặt liên phân số bên phải bằng $\frac{P_n}{Q_n}$. Dễ thấy

$\dfrac{P_1}{Q_1} = 2\cos x$. Vì thế ta có thể đặt $P_1 = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$; $Q_1 = \dfrac{\sin x}{\sin x}$. Với n=2, thì

$$\frac{P_2}{Q_2} = 2\cos x - \frac{1}{2\cos x} = \frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x}.$$

Suy ra có thể đặt

$$P_2 = \frac{\sin 3x}{\sin x}; \quad Q_2 = \frac{\sin 2x}{\sin x}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $P_n = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$; $Q_n = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$ với mọi x. Thật vậy, giả thiết công thức đúng với n, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n+1$. Ta có (theo bài ▷9.5)

$$P_{n+1} = 2\cos x \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} - \frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}\sin(n+2)x.$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh cho $Q_{n+1} = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$, vì thế ta có công thức

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin nx}$$

với mọi số nguyên dương n.

2) Ta ký hiệu $\dfrac{P_n}{Q_n}$ cho vế phải của đẳng thức. Ta cần phải chứng minh

$$\frac{P_n}{Q_n} = 1 + b_2 + b_2b_3 + \cdots + b_2b_3\ldots b_n$$

với mọi n nguyên dương.

Thật vậy,

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{b_2+1}{1}$$

vì thế $P_1 = 1, Q_1 = 1, P_2 = b_2 + 1, Q_2 = 1$. Khi đó bằng quy nạp ta có thể chứng minh được

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + b_2 + b_2b_3 + \cdots + b_2b_3\ldots b_n \\ Q_n &= 1. \end{aligned}$$

Suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng. ☺

Ví dụ 9.10. *Chứng minh rằng nếu một liên phân số có n phần tử bằng 1, thì giá trị phân số này bằng $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, ở đây $u_1 = u_2 = 1, u_3 = 2, \ldots$ là những số Fibonacci.*

Lời giải. Ta sử dụng quy nạp theo n. Với $n = 1$ và $n = 2$ khẳng định đúng:

$$\omega_1 = (1) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{u_2}{u_1}, \omega_2 = (1,1) = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{u_3}{u_2}.$$

Giả thiết khẳng định đúng với n nào đó, nghĩa là $\omega_n = \underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp như vậy nó cũng đúng cho $n+1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \omega_{n+1} &= \underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{n+1} = (1, \omega_n) \\ &= 1 + \frac{1}{\omega_n} = \frac{u_n + u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}. \end{aligned}$$ ☺

9.6. Bài tập

▷ **9.11.** Cho liên phân số vô hạn $(q_0, q_1, \ldots)$, ở đây $q_0 \geq q_1 > 0, \ldots$ là những số tự nhiên. Hãy chứng minh những khẳng định sau:

a) Dãy $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots,$ là dãy tăng.

b) Dãy $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots,$ là dãy giảm.

▷ **9.12.** Cho $(q_0, q_1, \ldots)$ là liên phân số ở bài trên. Chứng minh mệnh đề sau

a) $(q_0, q_1, \ldots)$ hội tụ.

b) Số $\omega = (q_0, q_1, \ldots)$ là số vô tỉ.

▷ **9.13.** Chứng minh rằng $(1, 1, \ldots) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

▷ **9.14.** Cho $\omega = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Chứng minh rằng nếu ta lấy phân số xấp xỉ thứ i $\frac{P_i}{Q_i}$ đối với ω, thì với sai số $\delta_i = |\omega - \frac{P_i}{Q_i}| (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ thoả mãn đánh giá sau

$$\frac{1}{Q_i(Q_i + Q_{i+1})} < \delta_i < \frac{1}{Q_i Q_{i+1}}.$$

CHƯƠNG 10

MỘT SỐ ĐỀ THI VÔ ĐỊCH

Rất nhiều nước hàng năm đều tổ chức thi vô địch quốc gia về môn toán cho các học sinh trường phổ thông. Những kỳ thi đó có rất nhiều bài giải bằng phương pháp quy nạp. Sau đây chỉ là một số nhỏ các đề đã có, bên cạnh số bài là tên nước và năm ra đề thi.

Ví dụ 10.1. *(Hungari 1932). Chứng minh rằng nếu a, b và n là những số tự nhiên và b chia hết cho a^n, thì số $(a+1)^b - 1$ chia hết cho a^{n+1}.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 0$ mệnh đề khẳng định đúng, vì $(a+1)^b - 1$ chia hết cho a. Giả sử khẳng định đúng với số k nào đó, nghĩa là ta giả thiết nếu $b \vdots a^k$, thì $((a+1)^b - 1) \vdots a^{k+1}$. Cho b' là số tự nhiên chia hết cho a^{k+1}. Ta đặt $b = \dfrac{b'}{a}$. Khi đó $b \vdots a^k$ và vì

$$(a+1)^{b'} = (a+1)^{ab} - 1 = [(a+1)^b]^a - 1 =$$
$$= [(a+1)^b - 1][(a+1)^{(a-1)b} + (a+1)^{(a-2)b} + \cdots + (a+1)^b + 1],$$

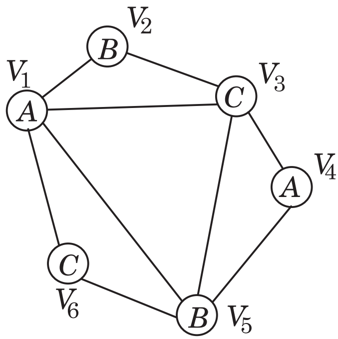
nên $(a+1)^{b'} - 1$ chia hết cho a^{k+2}. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp thừa số thứ nhất trong biểu thức sau cùng chia hết cho a^{k+1}, còn thừa số thứ hai biểu diễn dưới dạng

$$[(a+1)^{(a-1)b} - 1] + [(a+1)^{(a-2)b} - 1] + \cdots + [(a+1)^b - 1] + a$$

từ đó để thấy nó chia hết cho a. Suy ra $((a+1)^{b'} - 1) \vdots a^{k+2}$. ☺

Ví dụ 10.2. *(Hungari 1979). Những đỉnh của một đa giác lồi có số cạnh là số lẻ được tô màu sao cho mọi cặp hai điểm cạnh nhau có màu khác nhau. Chứng minh rằng bằng một số đường chéo không cắt nhau của đa giác này có thể cắt thành những hình tam giác, mà những đỉnh của mỗi tam giác được tô với những màu khác nhau.*

Lời giải. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp đối với số cạnh n của đa giác. Với $n = 3$ khẳng định của bài toán là hiển nhiên. cho $n > 3$. Dễ thấy tồn tại ba đỉnh kề nhau V_1, V_2 và V_3 của đa giác được tô tương ứng ba màu khác nhau A, B và C.



Nếu V_4 không tô màu A; hoặc là nếu V_4 tô màu A, còn V_5 không tô màu B; hoặc là nếu V_4 có màu A, V_5 có màu B, còn V_6 không phải màu C, còn lại ta áp dụng giả thiết quy nạp . Nếu V_4 có màu A, V_5 có màu B và V_6 có màu C, hình lục giác $V_1V_2V_3V_4V_5V_6$ ta có thể chia ra như hình vẽ (hình 12), phần còn lại của đa giác ta áp dụng giả thiết quy nạp. ☺

Ví dụ 10.3. *(Moscow 1945). Một số trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bằng +1, số còn lại bằng -1. Chứng minh rằng*

$$2\sin(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}})\frac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_n\sqrt{2}}}.$$

Lời giải. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Với $n = 1$ ta cần kiểm tra công thức $2\sin a_1\dfrac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2}$, hiển nhiên đúng. Giả sử công thức sau đúng với số k nào đó

$$2\sin(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}})\frac{\pi}{4} = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_k\sqrt{2}}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&2 + a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_k\sqrt{2}}} = \\
&= 2 + 2\sin(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}})\frac{\pi}{4} \\
&= 2 - 2\cos(\frac{\pi}{2} + (a_1 + + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}})\frac{\pi}{4}) \\
&= 2(1 - cos2(1 + \frac{a_1}{2} + + \frac{a_1a_2}{4} + \frac{a_1a_2a_3}{8} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^k})\frac{\pi}{4}) \\
&= 4\sin^2(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1a_2}{4} + \frac{a_1a_2a_3}{8} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^k})\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Vì $0 < 1 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_1a_2}{4} + \cdots + \dfrac{a_1a_2\ldots a_k}{2^k} < 2$, từ bất đẳng thức trên suy ra

$$\sqrt{2 + a_1\sqrt{2 + \cdots + a_k\sqrt{2}}} = 2\sin(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1a_2}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^k})\frac{\pi}{4}.$$

Bởi vì hàm sin là hàm lẻ, với $a_0 = \pm 1$, ta nhân vào hai vế của đẳng thức trên và biến đổi

$$\begin{aligned}
&a_0\sqrt{2 + a_1\sqrt{2 + \cdots + a_k\sqrt{2}}} = \\
&= a_0 2\sin(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1a_2}{4} + \frac{a_1a_2a_3}{8} + \cdots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^k})\frac{\pi}{4} = \\
&= 2\sin(a_0 + \frac{a_0a_1}{2} + \frac{a_0a_1a_2}{4} + \frac{a_0a_1a_2a_3}{8} + \cdots + \frac{a_0a_1a_2\ldots a_k}{2^k})\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

điều đó chỉ ra rằng công thức được chứng minh đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp công thức đúng với mọi n. ☺

Ví dụ 10.4. *(Moscow 1984). Cho $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là dãy n, $n \geq 4$, những số không âm, tổng của chúng bằng 1.*

a) Chứng minh rằng

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}.$$

b) Chứng minh rằng tồn tại một tổ hợp $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ của X, sao cho

$$y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Lời giải. a) Áp dụng phương pháp quy nạp đối với n, ta chứng minh

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1), \qquad \textbf{(10.1)}$$

ở đây $x_i \geq 0$ và $n \geq 4$. Từ đó với $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ ta nhận được kết quả.

Nếu $n = 4$, bất đẳng thức (10.1) tương đương với bất đẳng thức

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0$$

Ta chú ý đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$.

Bây giờ bất đẳng thức (10.1) đúng với một số cố định bất kỳ nào đó $n = k \geq 4$. Ta cần chứng minh

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1})^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1). \qquad \textbf{(10.2)}$$

Vì tổng hai vế của bất đẳng thức (10.2) là vòng tròn theo chỉ số, ta có thể giả thiết $x_{k+1} \leq x_i$ với $i = 1, 2, \dots, k$. Khi đó từ giả thiết quy nạp suy ra

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + (x_k + x_{k+1}))^2 \geq$$
$$\geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1). \qquad \textbf{(10.3)}$$

Bởi vì

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{k-1}(x_k + x_{k+1}) + (x_k + x_{k+1})x_1) =$$
$$(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) + x_{k-1}x_{k+1} + x_k(x_1 - x_{k+1}))$$

và $x_1 - x_{k+1} \geq 0$, thì từ (10.3) suy ra (10.2).

b) Với tổ hợp bất kỳ $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ của X ta đặt

$$S_Y = y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1.$$

Ta ký hiệu $\sum S_Y = S$ (tổng tính theo tất cả $n!$ hoán vị của X). Với sự cố định i và j, $i \neq j$ số lượng của những tổ hợp của X, trong đó x_i đứng trước x_j (xếp theo vòng lặp!), là $n(n-2)!$. Từ đây

$$S = n(n-2)! \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_ix_j = n(n-2)!(1 - \sum_{i=1}^{n} x_k^2 \leq$$
$$\leq n(n-2)!(1 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2) = n(n-2)!(1 - \frac{1}{n}) = (n-1)!.$$

Suy ra số nhỏ nhất trong S_Y không vượt quá

$$\frac{S}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$ ☺

Ví dụ 10.5. *(Ba lan 1952-1953). Chứng minh rằng nếu n là một số tự nhiên, thì*

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

với một số tự nhiên thích hợp nào đó m.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học khẳng định sau, với mọi số tự nhiên n tồn tại những số tự nhiên a_n và b_n sao cho

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})^n & = a_n - b_n\sqrt{2} \\ a_n^2 - 2b_n^2 & = (-1)^n. \end{cases} \tag{10.4}$$

Thật vậy, mệnh đề đúng với $n = 1$, vì trong trường hợp này $a_1 = b_1 = 1$ đưa các vế của đẳng thức trên bằng nhau. Ta giả thiết rằng với n cố định bất kỳ ta có những số thích hợp a_n và b_n, với chúng (10.4) đúng. Khi đó những đẳng thức

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^{n+1} &= (1-\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})\\ &= (a_n - b_n\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\\ &= (a_n+2b_n) - (a_n+b_n)\sqrt{2},\end{aligned}$$

suy ra sự tồn tại của những số tương ứng

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n \text{ và } b_{n+1} = a_n + b_n,$$

tại vì

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (a_n+2b_n)^2 - 2(a_n+b_n)^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2) = (-1)^{n+1}.$$

Như vậy điều khẳng định đúng với mọi n.

Ta chỉ còn đặt $m = a^2$ với n là số chẵn, và $m = 2b_n^2$ với n là số lẻ, để nhận được lời giải bài toán. ☺

Ví dụ 10.6. *(Liên xô 1976). Cho x_0 và x_1 là những số tự nhiên nhỏ hơn 1000, và đặt*

$$x_2 = |x_0 - x_1|, x_3 = |x_1 - x_2|, x_4 = |x_2 - x_3|, \ldots$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong những số $x_2, x_3, \ldots, x_{1500}$ bằng 0.

Lời giải. Chứng minh bằng quy nạp theo n kết quả mạnh hơn đề ra: *Nếu trong dãy số như đề ra số x_0 và x_1 nhỏ hơn $2n$, thì ít nhất một trong những số $x_1, x_2, \ldots, x_{3n}$ bằng 0.*

Giả sử mệnh đề đã được chứng minh với mọi số nguyên nhỏ hơn n. Nếu trong dãy thực sự có bất đẳng thức $x_3 < 2n-2, x_4 <$

$2n-2$, thì từ giả thiết quy nạp suy ra kết quả mệnh đề cần chứng minh.

Bởi vì theo điều kiện có $x_0 \leq 2n-1, x_1 \leq 2n-1$, thì với $x_2 \geq 1$ ta có $x_3 \leq 2n-2, x_4 \leq 2n-3$.

Nếu $x_3 \neq 2n-2$, thì lại đưa về giả thiết quy nạp. Nếu $x_3 = 2n-2$, thì $x_2 = 1, x_1 = 2n-1, x_0 = 2n-2$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trong trường hợp này. Ta có

$$x_3 = 2n-2, x_4 = 2n-3, x_5 = 1, x_6 = 2n-4, x_7 = 2n-5,$$
$$x_8 = 1, \ldots, x_{3k} = 2n-2k, \ldots, x_{3n} = 0.$$

☺

Ví dụ 10.7. *(Canada 1979). Cho a, b, c, d và e là những số nguyên thỏa mãn điều kiện $1 \leq a < b < c < d < e$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \leq \frac{15}{16},$$

ở đây $[m,n]$ ký hiệu là bội số chung nhỏ nhất của m và n.

Lời giải. Ta chứng minh theo quy nạp bất đẳng thức tổng quát hơn.

$$\frac{1}{[a_0,a_1]} + \frac{1}{[a_1,a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]} \leq 1 - \frac{1}{2^n} \qquad (10.5)$$

ở đây $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ là những số tự nhiên. Với $n = 1$ thì (10.5) đúng hiển nhiên. Ta giả sử rằng (10.5) đúng với n nào đó, và ta xét những số tự nhiên bất kỳ $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1}$. Nếu $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$, thì $[a_n, a_{n+1}] \geq 2^{n+1}$ và từ (10.5) suy ra

$$\frac{1}{[a_0,a_1]} + \frac{1}{[a_1,a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]} + \frac{1}{[a_n,a_{n+1}]} \leq$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Bây giờ cho $a_{n+1} < 2^{n+1}$. Ta chú ý rằng với những số tự nhiên bất kỳ p và $q, p < q$, ta có

$$\frac{1}{[p,q]} = \frac{(p,q)}{pq} \leq \frac{q-p}{pq} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

(Ta đã áp dụng đẳng thức $[p,q](p,q) = pq$ và $q-p$ chia hết cho (p,q)). Suy ra

$$\frac{1}{[a_0,a_1]} + \frac{1}{[a_1,a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]} + \frac{1}{[a_n,a_{n+1}]} \leq$$
$$\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{n+1}} < 1 - \frac{1}{2^{n+1}},$$

Bất đẳng thức (10.5) trở thành đẳng thức với $a_i = 2^i, i = 0,1,\ldots,n$. ☺

Ví dụ 10.8. *(Canada 1982). Cho a,b và c là những nghiệm của phương trình*

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0.$$

Chứng minh rằng số

$$\frac{b^{1982} - c^{1982}}{b-c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c-a} + \frac{a^{1982} - b^{1982}}{a-b}$$

là một số nguyên.

Lời giải. Ta đặt

$$r_n = \frac{b^n - c^n}{b-c}, s_n = \frac{c^n - a^n}{c-a}, t_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \text{ với } n = 1,2,\ldots$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$r_{n+3} = r_{n+2} + r_{n+1} + r_n, n \geq 1.$$

Vì những nghiệm b và c thỏa mãn đẳng thức

$$b^3 = b^2 + b + 1, c^3 = c^2 + c + 1,$$

nên

$$r_{n+3} = \frac{b^{n+3} - c^{n+3}}{b-c} = \frac{b^n(b^2+b+1) - c^n(c^2+c+1)}{b-c}$$
$$= \frac{b^{n+2} - c^{n+2}}{b-c} + \frac{b^{n+1} - c^{n+1}}{b-c} + \frac{b^n - c^n}{b-c}$$
$$= r_{n+2} + r_{n+1} + r_n.$$

Theo cùng phương pháp như vậy ta nhận được

$$s_{n+3} = s_{n+2} + s_{n+1} + s_n, t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n, n \geq 1.$$

Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học đối với n, sao cho $r_n + s_n + t_n$ là số nguyên với mọi $n \geq 1$. Vì

$$\begin{aligned}
&r_1 + s_1 + t_1 = 3,\\
&r_2 + s_2 + t_2 = 2(a+b+c) = 2,\\
&r_3 + s_3 + t_3 = 2(a+b+c)^2 - 3(bc+ca+ab) = 5.
\end{aligned}$$

Khẳng định đúng với $n = 1, 2, 3$. Ta giả sử rằng khẳng định cũng đúng với $n = 1, 2, \ldots, k+2, k \geq 1$. Khi đó

$$r_{k+3} + s_{k+3} + t_{k+3} = (r_{k+2} + s_{k+2} + t_{k+2}) + (r_{k+1} + s_{k+1} + t_{k+1}) + (r_k + s_k + t_k).$$

Theo giả thiết quy nạp nó là tổng của ba số nguyên và suy ra tổng ở đề bài là số nguyên. ☺

Ví dụ 10.9. *(CHLB Đức 1981). Dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ được cho như sau: a_1 là số tự nhiên, $a_{n+1} = [1,5a_n] + 1$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$. Có thể chọn a_1 như thế nào để cho 100 000 số hạng đầu tiên của dãy trên là những số chẵn, còn số hạng thứ 100 001 là một số lẻ ?*

Lời giải. Có thể chọn được một số như đầu bài đặt ra là $a_1 = 2^{100001} - 2$. Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh với mọi $n = 1, 2, \ldots, 100001$ đẳng thức sau đúng

$$a_n = 3^{n-1}.2^{100001-n}. \tag{10.6}$$

Thật vậy, với $n = 1$ ta có $3^{1-1}.2^{100001-n} - 2 = 2^{100001} - 2 = a_1$. Nếu ta giả thiết (10.6) đúng với n nào đó $n \leq 100000$, thì

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= [1,5a_n] + 1 = [1,5(3^{n-1}.2^{100001-n} - 2)] + 1\\
&= [3^n.2^{100000-n} - 3] + 1 = 3^n 2^{100000-n} - 2.
\end{aligned}$$

Khi đó với $n = 1, 2, \ldots, 100000$ số $2^{100001-n}$ là số chẵn, còn $2^{100001-100001} = 1$ là một số lẻ. Dễ thấy những số $a_1, a_2, \ldots, a_{100000}$ là số chẵn, còn a_{100001} là số lẻ. ☺

Ví dụ 10.10. *(A´o-Balan 1980). Chứng minh rằng*

$$\sum \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_k} = n,$$

ở đây tổng thực hiện theo tất cả tập hợp con khác rỗng $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *của* $\{1, 2, \ldots, n\}$

Lời giải. Ta áp dụng phương pháp quy nạp theo n. Với $n = 1$ ta có $\frac{1}{1} = 1$, điều hiển nhiên đúng. Ta giả thiết đẳng thức theo điều kiện bài toán đúng với số $n \geq 1$ nào đó. Mỗi tập con khác rỗng của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ là một trong những dạng sau đây:

a) Tập hợp con của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$;

b) Tập hợp con của tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$ và số $n + 1$;

c) Tập hợp một phần tử $\{n + 1\}$.

Khi đó với tổng theo điều kiện của bài toán trong trường hợp $n + 1$ ta nhận được

$$n + 1\frac{1}{n+1}.n + \frac{1}{n+1} = n + 1.$$

Như vậy chứng minh theo quy nạp đã xong và bài toán đã được giải. ☺

Ví dụ 10.11. *(Balan 1981). Cho các dãy số* $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$ *thoả mãn các điều kiện* $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n; y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n$ *với mọi* $n \geq 1$ *và* $x_1^2 = y_1 + 2$*. Chứng minh rằng* $x_n^2 = y_n + 2$ *với mọi* $n \geq 1$.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, công thức đúng theo giả thiết. Giả sử nó đúng với $n = k$, tức là $x_k^2 = y_k + 2 \quad (k \geq 2)$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$, tức là $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 1$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= (x_k^3 - 3x_k)^2 = x_k^6 - 6x_k^4 + 9x_k^2 \\ &= (y_k+2)^3 - 6(y_k+2)^2 + 9(y_k+2) \\ &= y_k^3 - 3y_k + 2 = y_{k+1} + 2 \end{aligned}$$

tức là $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 2$. ☺

Ví dụ 10.12. *(Balan 1982). Cho q là một số tự nhiên chẵn thực sự lớn hơn 0. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, số $q^{(q+1)^n} + 1$ chia hết cho $(q+1)^{n+1}$ và không chia hết cho $(q+1)^{n+2}$.*

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo theo n. Với $n = 0$, $q^{(q+1)^0} + 1 = q + 1$ không chia hết cho $(q+1)^{0+2}$. Bài toán đúng với $n = 0$.

Giả sử bài toán đúng với $n (n > 0)$, tức là $q^{(q+1)^n} + 1$ chia hết cho $(q+1)^{n+1}$ và không chia hết cho $(q+1)^{n+2}$. Nói cách khác $q^{(q+1)^n} + 1 = (q+1)^{n+1}s$ chia hết cho $q+1$. Ta phải chứng minh bài toán đúng với cả $n+1$. Thật vậy

$$q^{(q+1)^{n+1}} + 1 = ((q^{(q+1)^n} + 1) - 1)^{q+1} + 1 = ((q+1)^{n+1}s - 1)^{q+1} + 1$$

$$= \sum_{j=0}^{q+1} C_{q+1}^j (q+1)^{(n+1)j}.s^j.(-1)^{q+1-j} + 1$$

$$= \sum_{j=1}^{q+1} C_{q+1}^j (q+1)^{(n+1)j}.s^j.(-1)^{q+1-j} = (q+1)(q+1)^{n+1}s -$$

$$- C_{q+1}^2 (q+1)^{2(n+1)} s^2 + \cdots + (q+1)^{(q+1)(n+1)} s^{q+1} =$$

$$= (q+1)^{n+2}(s - C_{q+1}^2 (q+1)^n s^2 + \cdots + (q+1)^{qn+q-1} s^{q+1}).$$

Thừa số thứ hai chia hết cho $(q+1)$. Do đó $q^{(q+1)^{n+1}}+1$ chia hết cho $(q+1)^{n+2}$ và không chia hết cho $(q+1)^{n+3}$. ☺

Ví dụ 10.13. *(Anh 1978). Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1, n \in N$ thì $2\cos n\theta$ là một đa thức bậc n của $2\cos\theta$ với hệ số nguyên.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. với $n = 1$, mệnh đề đúng. Với $n = 2$, $2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1) = (2\cos\theta)^2 - 2$, tức là mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với mọi $n, n \leq k (k \geq 2)$. Ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$. Ta có $2\cos(k+1)\theta + 2\cos(k-1)\theta = 4\cos k\theta.\cos\theta = (2\cos k\theta)(2\cos\theta)$. Suy ra $2\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta(2\cos k\theta) - 2\cos(k-1)\theta$. Vế phải rõ ràng là một đa thức bậc $k+1$ của $2\cos\theta$ với hệ số nguyên. Từ đó suy ra mệnh đề đúng với $n = k+1$ và do đó nó đúng với mọi n. ☺

Ví dụ 10.14. *(Đề thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 18, 1976). Dãy $u_0, u_1, u_2, \ldots$ được xác định theo cách sau $u_0 = 2; u_1 = \frac{5}{2}$;*

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1, \qquad (n \geq 1).$$

Chứng minh rằng với $n \geq 1$ $\quad [u_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$, ở đây $[x]$ là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x.

Lời giải. Ta đặt $\alpha_k = \dfrac{2^k - (-1)^k}{3}, k \geq 0$. Ta sẽ chứng minh rằng $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + (-1)^n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Thật vậy

$$\begin{aligned} 2\alpha_n + (-1)^n &= 2\frac{2^n - (-1)^n}{3} + (-1)^n = \frac{2^{n+1} - 2(-1)^n + 3(-1)^n}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} = \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Vì $\alpha_0 = 0$ và $\alpha_1 = 1$ từ các đẳng thức này suy ra tất cả α_k là nguyên. Ta sẽ chứng minh rằng $u_n = 2^{\alpha_n} + 2^{-\alpha_n}, n \geq 0$. Với $k = 0, 1$ điều này dễ kiểm tra. Giả sử nó đúng với $k = n-1$ và $k = n$, và sử dụng mối liên quan giữa α_n và α_{n-1}, ta sẽ nhận được

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2} \\
&= (2^{\alpha_n} + 2^{-\alpha_n}).[(2^{\alpha_{n-1}} + 2^{\alpha_{n-1}})^2 - 2] - \frac{5}{2} \\
&= (2^{\alpha_n} + 2^{-\alpha_n}).(2^{2\alpha_{n-1}} + 2^{2\alpha_{n-1}})^2) - \frac{5}{2} \\
&= (2^{\alpha_n} + 2^{-\alpha_n}).(2^{\alpha_n - (-)^{n-1}} + 2^{(-1)^{n-1} - \alpha_n})^2) - \frac{5}{2} \\
&= 2^{2\alpha_n + (-1)^n} + 2^{(-1)^{n-1}} + 2^{-(-1)^{n-1}} + 2^{-2\alpha_n - (-1)^n} - \frac{5}{2} \\
&= 2^{\alpha_{n+1}} + 2^{-\alpha_{n+1}},
\end{aligned}$$

vì $2^{(-1)^k} + 2^{-(-1)^k} = \dfrac{5}{2}$ với mỗi $k \geq 1$. Bài toán đã được giải vì $[u_n] = [2^{\alpha_n} + 2^{-\alpha_n}] = 2^{\alpha_n}$, do $\dfrac{1}{2^{\alpha_n}} < 1$ với $n \geq 1$. ☺

Ví dụ 10.15. *(Đề thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 22, 1981). Biết rằng hàm số $f(x,y)$ thoả mãn những điều kiện:*

a) $f(0,y) = y+1$;

b) $f(x+1,0) = f(x,1)$;

c) $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$ với tất cả những số nguyên không âm x và y. Hãy tìm $f(4,1981)$.

Lời giải. Ta có $f(1,0) = f(0,1) = 2$, $f(1,1) = f(0, f(1,0)) = f(0,2) = 3$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $f(1,y) = y+2$. Với $y = 1$, khẳng định đúng. giả sử với số tự nhiên k nào đó ta có

$f(1,k) = k+2$. Khi đó

$$f(1,k+1) = f(0,f(1,k)) = f(0,k+2) = k+3.$$

Từ b) ta nhận được $f(2,0) = f(1,1) = 3$, còn từ c) $f(2,1) = f(1,f(2,0)) = f(1,3) = 5$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $f(2,k) = 2k+3$. Thật vậy, cho với k nào đó ta có $f(2,k) = 2k+3$. Khi đó $f(2,k+1) = f(1,f(2,k)) = f(1,2k+3) = 2k+5$.

Ta nhận được $f(3,0) = f(2,1) = 5$. Ngoài ra $f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = 2f(3,y)+3$, hoặc là với mọi số tự nhiên y ta có $f(3,y+1) = 2f(3,y)+3$. Ta áp dụng đẳng thức k lần, nhận được

$$f(3,y+1) = 2^{k+1}.f(3,y-k) + 3(2^k + 2^{k-1} + \cdots + 2 + 1),$$

từ đây với $k = y$ ta nhận được $f(3,y+1) = 52^{y+1} + 3.(2^{y+1} - 1)$. Suy ra $f(3,y) = 2^{y+3} - 3$ với mọi số tự nhiên y. Từ đẳng thức cuối cùng ta nhận được

$$\begin{aligned} f(4,y) &= f(3,f(4,y-1)) = 2^{f(4,y-1)+3} - 3 \\ &= 2^{2^{f(4,y-2)+3} - 3 + 3} - 3 = 2^{2^{f(4,y-2)+3}} - 3 \\ &= 2^{\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{y-1}\,13+3} - 3 = 2^{\overbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}^{y+2}} - 3 \end{aligned}$$

ở đây ta áp dụng đẳng thức $f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13$. Thay giá trị vào đẳng thức trên ta có được $f(4,1981)$. ☺

CHƯƠNG 11

BÀI TẬP TỰ GIẢI

▷ **11.1.** Chứng minh rằng

a) $1.2.3\dots p + 2.3\dots p.(p+1) + \dots + n(n+1)\dots(n+p-1) =$
$$= \frac{n(n+1)\dots(n+p)}{p+1}.$$

b) $2.1^2 + 3.2^2 + \dots + (n+1).n^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

c) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$.

d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}.n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

▷ **11.2.** Chứng minh các đẳng thức sau
$$\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a+7}{8} + \dots + \frac{a+2^n-1}{2^n} = \frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n} + n.$$

▷ **11.3.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

a) $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35;

b) $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ chia hết cho 24;

c) $2^{n+2}.3^n + 5n - 4$ chia hết cho 25;

d) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ chia hết cho 23.

▷ **11.4.** Chứng minh rằng

a) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ với $n \geq 2$.

b) $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$ với $n \geq 3$.

▷ **11.5.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\log(n+1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \cdots + \log n}{n}.$$

▷ **11.6.** Chứng minh đẳng thức

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = \\ = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^n-1}.$$

▷ **11.7.** Chứng minh đẳng thức sau

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{a+1}{ab} + \frac{(a+1)(b+1)}{abc} + \cdots \\ \cdots + \frac{(a+1)(b+1)\ldots(s+1)(l+1)}{abc\ldots skl} = \\ = \frac{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)}{abc\ldots kl}.$$

▷ **11.8.** Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-k+1})}{1-a^k} = n.$$

▷ **11.9.** Hãy tính tổng

$$S_n = \frac{a}{b} + \frac{a(a-1)}{b(b-1)} + \frac{a(a-1)(a-2)}{b(b-1)(b-2)} + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{b(b-1)\ldots(b-n+1)}.$$

(b không bằng một trong các số $0, 1, 2, \ldots, n-1$)

▷ **11.10.** Cho

$$S_n = a_1 + (a_1+1)a_2 + (a_1+1)(a_2+1)a_3 + \cdots \\ \cdots + (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n-1}+1)a_n.$$

Chứng minh rằng

$$S_n = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)-1.$$

▷ **11.11.** Cho $\{u_n\}$ là dãy Fibonacci, chứng minh rằng

$$u_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_{n-k-1}^{k}.$$

▷ **11.12.** Hãy tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ (m là số nguyên dương).

▷ **11.13.** Chứng minh rằng số nghiệm chung nguyên dương của những phương trình $x + 2y = n; 2x + 3y = n - 1; \dots; nx + (n + 1)y = 1$; $(n+1)x + (n+2)y = 0$; bằng $n + 1$.

▷ **11.14.** Chứng minh rằng số nghiệm chung nguyên không âm của những phương trình sau $x + 4y = 3n - 1; 4x + 9y = 5n - 4$; $9x + 16y = 7n - 9, \dots, n^2x + (n+1)^2y = n(n+1)$; bằng n.

▷ **11.15.** Chứng minh rằng với giá trị tuỳ ý $\alpha \le 1$ và các số tuỳ ý $x_1, \dots, x_n$ thoả mãn các điều kiện $1 \ge x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n > 0$, ta có bất đẳng thức

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\alpha \le 1 + 1^{\alpha-1}x_1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + \dots + n^{\alpha-1}x_n^\alpha.$$

▷ **11.16.** Chứng minh rằng với các giá trị tuỳ ý $m, n \in N$ và các số tuỳ ý $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1 \dots, y_n \in [0,1]$ thoả mãn các điều kiện $x_i + y_i = 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$, ta có bất đẳng thức

$$(1 - x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^m + (1 - y_1^m) \cdot \dots \cdot (1 - y_n^m) \ge 1.$$

▷ **11.17.** Với mỗi giá trị $n \in N$ hãy tìm giá trị lớn nhất $k \in Z^+$ để số $[(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$ chia hết cho 2^k.

▷ **11.18.** Người ta tô màu các đỉnh của một đa giác lồi có số cạnh lẻ, sao cho bất kỳ 2 đỉnh lân cận được tô bằng 2 màu khác nhau. Chứng minh rằng với mọi cách tô màu thoả mãn điều kiện trên đa giác có thể chia thành các tam giác bởi các đường chéo không cắt nhau, mà hai đầu mỗi đường chéo, có hai màu khác nhau.

▷ **11.19.** Dãy số dương $a_, a_2, ..., a_n$ thoả mãn bất đẳng thức $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ với $n \in N$. Chứng minh rằng với bất kỳ giá trị $n \in N$ có đánh giá $a_n < \dfrac{1}{n}$.

▷ **11.20.** Cho dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn bất đẳng thức $\{a_{k+m} - a_k - a_m\} \leq 1$, với $k, m \in N$. Chứng minh rằng với bất kỳ $p, q \in N$ có bất đẳng thức

$$\left|\frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q}\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

▷ **11.21.** Chứng minh rằng mỗi số hạng của dãy số

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, (n \in N)$$

là số tự nhiên và biểu diễn dưới dạng $5m^2$ hoặc $m^2 (m \in N)$ với n tương ứng chẵn hoặc lẻ.

▷ **11.22.** Chứng minh rằng tồn tại đúng một dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots$ thoả mãn điều kiện $a_1 = 1, a_2 > 1, a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$ với $n \in N$.

▷ **11.23.** Chứng minh rằng với các số tuỳ ý $m, n \in N$, số

$$S_{m,n} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$$

chia hết cho $m!$, nhưng với một số giá trị $m, n \in N$ số $S_{m,n}$ không chia hết cho $m!(n+1)$.

▷ **11.24.** Trên mặt phẳng có n đường tròn khác nhau có bán kính đều bằng 1 được sắp xếp khác nhau. Chứng minh rằng chỉ có một trong số đó chứa một cung, không cắt một đường tròn trong số những đường tròn còn lại và có độ dài không nhỏ hơn $\frac{2P}{n}$.

▷ **11.25.** Có thể chia một đa giác đều $2n-$ giác bất kỳ thành các hình thoi hay không?

▷ **11.26.** Chứng minh rằng với mọi $a \in N, a > 2$ tồn tại vô số các số $n \in N$ để số $a^n - 1$ chia hết cho n. Khẳng định đúng với $a = 2$ không?

▷ **11.27.** Chứng minh rằng với số $n \in N$ tuỳ ý phương trình $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y^2$ có nghiệm số tự nhiên.

▷ **11.28.** Dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ những số tự nhiên được tạo thành theo cách sau: Chọn một số có ba chữ số bất kỳ a_1, còn a_2 là tổng của các bình phương của các chữ số a_1, a_3 là tổng các bình phương các chữ số của a_2 và tiếp tục quá trình như vậy. Chứng minh rằng trong dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bắt gặp hoặc là số 1, hoặc số 4.

▷ **11.29.** Chứng minh rằng không tồn tại dãy vô hạn các số tự nhiên $n_1, n_2, \ldots$ thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

a) $n_k < n_{k+1}$ với $k = 1, 2, \ldots$

b) $n_{k_l} = n_k + n_l$ với mọi $k = 1, 2, \ldots$ và $l = 1, 2, \ldots$

▷ **11.30.** Chứng minh rằng với mọi giá trị số tự nhiên bất đẳng thức sau đúng

$$2^n > n^2.$$

CHƯƠNG 12

Lời giải và gợi ý bài tập

12.1. Lời giải và gợi ý bài tập chương 1

▷ **1.11. a) Lời giải:** Ta thiết lập bảng cho một số giá trị của n.

$n =$	1	2	3	4	5
$S_n =$	1	-3	6	-10	15

Ta so sánh với bảng số ở bài đầu tiên dễ đưa đến giải thiết

$$S_n = (-1)^{n-1}.\frac{n(n+1)}{2}.$$

Giả sử đúng với n nào đó, ta sẽ chứng minh đẳng thức đó cũng đúng cho $n+1$. Ta có

$$S_{n+1} = S_n + (-1)^n(n+1)^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2$$
$$= (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

b) Trả lời: $S_n = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

c) Lời giải: Ta lập bảng một số giá trị ban đầu

$n =$	1	2	3	4
$S_n =$	1	5	23	119

Tại vì $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$, ta có thể làm giải thiết $S_n = (n+1)! - 1$. Với S_{n+1} ta nhận được

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!) + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1).(n+1)! \\ &= (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

▷ **1.12. a) Lời giải:** Ta áp dụng tính chất của tổng

$$\sum_{\mu=1}^{n}(2\mu-1)^2 = 4\sum_{\mu=1}^{n}\mu^2 - 4\sum_{\mu=1}^{n}\mu + \sum_{\mu=1}^{n}1 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

ở đây ta áp dụng công thức tính tổng luỹ thừa của các số tự nhiên.

b) Gợi ý: Tương tự phần a).

c) Gợi ý: Ta áp dụng công thức $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, ta tìm được

$$\sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu(\mu+1)} = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu} - \sum_{\mu=1}^{n}\frac{1}{\mu+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

▷ **1.13. Lời giải:** Chứng minh bằng quy nạp toán học theo k đẳng thức sau

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_k = \frac{1}{n-k} \text{ với } 0 \le k \le n-1.$$

Với $k = 0$, khẳng định đúng hiển nhiên. Giả sử nó đúng với mọi $n \le k$. Khi đó

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= \frac{1}{n-k} + x_{k+1} \\ &= \frac{1}{n-k-1}(x_0 + x_1 + \cdots + x_k) + \frac{1}{n-k} \\ &= \frac{1}{(n+k-1)(n-k)} + \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n-k-1}. \end{aligned}$$

Suy ra mệnh đề cũng đúng với $k+1$. Trường hợp riêng, với $k = n-1$ ta nhận được $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = 1$.

12.2. Lời giải và gợi ý bài tập chương 2

▷ **2.31. Lời giải:** Ta ký hiệu bất đẳng thức đề ra là (2.27). Chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1$, từ (2.27) ta có $x_1^5 + x_1^7 \ge 2x_1^6$, nó tương đương với $(1 - x_1)^2 \ge 0$, như vậy trong trường hợp này bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với số $n \ge 1$ nào đó. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1$. Cho $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ với những số nguyên dương. Theo giả thiết quy nạp ta có (2.27) và trong nó có đẳng thức khi và chỉ khi $x_k = k, k = 1, 2, \ldots, n$. Ngoài ra bất đẳng thức sau đúng (chứng minh sau)

$$x_{n+1}^5 + x_{n+1}^7 \ge 2[2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3)x_{n+1}^3 + (x_{n+1}^3)^2] \qquad (12.1)$$

và đẳng xảy ra chỉ khi $x_k = k, k = 1, 2, \ldots, n+1$. Cộng theo vế của (2.27) và (12.1) ta nhận được

$$x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5 + x_{n+1}^5 + x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_n^7 + x_{n+1}^7 \geq$$
$$\geq 2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + x_{n+1}^3)^2$$

và đẳng thức chỉ xẩy ra khi và chỉ khi có đẳng thức trong (2.27) và (12.1), nghĩa là $x_k = k, k = 1, 2, \ldots, n, n+1$. Như vậy khẳng định đúng với $n+1$.

Ta chỉ còn chứng minh (12.1). Bất đẳng thức (12.1) tương đương với

$$\frac{x_{n+1}^5(x_{n+1}-1)^2}{4} \geq x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3. \quad (12.2)$$

Bất đẳng thức (12.2) được suy ra từ những bất đẳng thức và đẳng thức sau

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \leq 1^3 + 2^3 + \cdots + x_n^3, \quad (12.3)$$
$$1^3 + 2^3 + \cdots + x_n^3 = \frac{x_n^2(x_n+1)^2}{4},$$
$$x_n \leq x_{n+1} - 1, \quad (12.4)$$
$$\frac{x_n^2(x_n+1)^2}{4} \leq \frac{(x_{n+1}-1)^2 x_{n+1}^2}{4}.$$

Đẳng thức trong (12.2) khi và chỉ khi có đẳng thức trong (12.3) và (12.4), hay là $x_k = k, k = 1, 2, \ldots, n+1$. ☺

▷ **2.32. Lời giải:** Với $k = 1$ bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng và trở thành đẳng thức. Giả sử (2.28) đúng với số nguyên $k \geq 1$. Ta đặt

$$N = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2$$
$$= (a_1 + a_2 + .. + a_k)^2 + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

Ta thế thừa số thứ nhất ở bên phải phương trình trên bằng biểu thức lớn hơn nó trong (2.28), ta nhận được

$$\begin{aligned}N &\le k(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2)+a_{k+1}^2+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)\\ &=(k+1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2)-a_1^2-a_2^2-\cdots-a_k^2-ka_{k+1}^2+\\ &+2a_1a_{k+1}+2a_2a_{k+1}+\cdots+2a_ka_{k+1}=\\ &=(k+1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2)-(a_1-a_{k+1})^2-(a_2-a_{k+1})^2-\cdots\\ &\qquad\cdots-(a_k-a_{k+1})^2.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức (2.28) với $k+1$, hay là

$$N\le(k+1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2).$$ ☺

▷ **2.33. Gợi ý:** Ta biểu diễn $f^{(k+1)}(x)$ theo $f^{(k)}(x)$ bằng một số giá trị

$$f'(x)=\frac{x}{(x^2-1)^{1/2}},\quad f''(x)=-\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$$
$$f'''(x)=\frac{3x}{(x^2-1)^{5/2}},\quad f^{(iv)}(x)=-\frac{12x^2+1}{(x^2-1)^{7/2}}$$
$$f^{(v)}(x)=\frac{60x^3+31x}{(x^2-1)^{9/2}},\quad f^{(vi)}(x)=-\frac{522x^4+266x^2+31}{(x^2-1)^{11/2}}.$$

Bây giờ ta phát biểu lại bài toán: nếu $f(x)=(x^2-1)^{1/2}, x>1$, khi đó

$$f^{(n)}(x)=\frac{g_n(x)}{(x^2-1)^{(2n-1)/2}}$$

ở đây $g_n(x)$ là đa thức bậc $n-2$, và

$$g_n(x)\text{ là }\begin{cases}\text{hàm chẵn với tất cả các hệ số không âm,} & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ \text{hàm lẻ với tất cả các hệ số không dương,} & \text{nếu } n \text{ lẻ.}\end{cases}$$

Mệnh đề này có thể chứng minh bằng quy nạp.

▷ **2.34. Gợi ý:** Chia hai trường hợp n chẵn và lẻ.

12.3. Lời giải và gợi ý bài tập chương 3

▷ **3.21. Lời giải:** Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = a_1 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + d) q b_k$$
$$= a_1 b_1 + q \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k + dq \sum_{k=1}^{n} b_k = a_1 b_1 + q(S_n - a_n b_n) + dq b_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}.$$

Từ đó suy ra công thức bài toán.

▷ **3.22. Trả lời:** $b_n = n^2 + 1$, $S_n = \frac{1}{6} n(2n^2 + 3n + 7)$.

▷ **3.23. Trả lời:** $S_n = \frac{1}{2} n(4n^2 + 7n + 1)$.

▷ **3.24. Trả lời:**

a) $x_n = C_1 \cos \frac{2\pi n}{3} + C_2 \sin \frac{2\pi n}{3}$;

b) $x_n = (C_1 + C_2.n)(-1)^n$;

c) $x_n = C_1 + C_2(-1)^n$;

d) $x_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2$.

▷ **3.25. Trả lời:**

a) $x_n = 7 + 3^n$; b) $x_n = 2^n + 3^n - 4^n$; c) $x_n = 2(3 - 2n).3^{n-1} - 1$.

12.4. Lời giải và gợi ý bài tập chương 4

▷ **4.19. Lời giải:** Khi $n = 1$, thì $11^2 + 12 = 133$, mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133. Ta sẽ chứng minh $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ cũng chi hết cho 133. Thật vậy,

$$\begin{aligned} 11^{k+2} + 12^{2k+1} &= 11.11^{k+1} + 12^2.12^{2k-1} \\ &= 11.(11^{k+1} + 12^{2k-1}) + 133.12^{2k-1}. \end{aligned}$$

Tổng thu được chia hết cho 133. Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \geq 1$.
☺

▷ **4.20. Gợi ý:** Tiến hành như bài 4.2 phần 1).

▷ **4.21. Gợi ý:** Tiến hành như bài 4.2 phần 2).

▷ **4.22. Gợi ý:** Bài toán đưa về chứng minh công thức $10^{2n-1} + 1$ chia hết cho 11 với mọi $n \geq 1$.

12.5. Lời giải và gợi ý bài tập chương 5

▷ **5.28. Lời giải:** Ta ký hiệu $a_n = 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1$.

1) Với $n = 1, a_1 = 2^{2^{1+1}} + 2^{2^1} + 1 = 21$.

2) Với $n = 2, a_2 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2} + 1 = 2^8 + 2^4 + 1 = 256 + 16 + 1 = 273 = 21.13$, như vậy, a_2 chia hết 21.

3) Ta sẽ chứng minh a_n chia hết cho 21 với mọi số tự nhiên n. Với $n = 1$ và $n = 2$ ta đã kiểm tra.

Giả sử $a_k = 2^{2^{k+1}} + 2^{2^k} + 1 = 21m$. Ta xét $a_{k+1} = 2^{2^{k+2}} + 2^{2^{k+1}} + 1$. Nhưng $2^{2^{k+1}} = a_k - 2^{2^k} - 1 = 21m - 2^{2^k} - 1$, như vậy $a_{k+1} = 2^{2^{k+2}} + (21m - 2^{2^k} - 1) + 1 = 2^{2^{k.4}} - 2^{2^k} + 21m = 2^{2^k}(2^{2^{k.3}} - 1) + 21m$,

$$a_{k+1} = 2^{2^k}[(2^6)^{2^{k-1}} - 1] + 21m = 2^{2^k}[(64)^{2^{k-1}} - 1] + 21m.$$

Nhưng $(64)^{2^{k-1}} - 1$ chia hết cho $64 - 1 = 63 = 21.3$ và suy ra a_{k+1} chia hết cho 21. Như vậy a_n chia hết cho 21 với mọi n và vì

$a_1 = 21$ là số nhỏ nhất trong tất cả các số, thì ước số chung lớn nhất của tất cả $a_n, n = 1, 2, \dots$ là 21. ☺

▷ **5.29. Lời giải:** Nhắc lại cách chứng minh của Euclide về tồn tại vô hạn số nguyên tố. Nếu $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ là những số nguyên tố bất kỳ, số $P = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ khác 1 và suy ra nó chia hết cho một ước số nguyên tố nào đó, tất nhiên nó phải khác $p_1, p_2, \dots, p_n$. Như vậy theo cách này ta tìm được một số nguyên tố mới. Nếu $p_1, p_2, \dots, p_n$ là n số nguyên tố đầu tiên. Trong trường hợp đó ước số trên sẽ là số nguyên tố thứ $n + 1 \, : \, p_{n+1}$. Do đó $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \dots p_n + 1$. Bây giờ bất đẳng thức $p_n < 2^{2^n}$ chứng minh theo phương pháp quy nạp toán học. Với $n = 1$ ta có $p_1 = 2$ bất đẳng thức là hiển nhiên. Giả sử bất đẳng thức đúng với mọi giá trị nhỏ hơn n. Ta sẽ chứng minh nó đúng cho $n + 1$. Thật vậy,

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 \dots p_n + 1 < 2^2 . 2^{2^2} \dots 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1-2}} + 1 < 2^{2^{n+1}}. \quad ☺$$

▷ **5.30. Lời giải:** 1) Với $n = 1$ ta có

$$\begin{aligned} \sin\beta_1 - \sin\alpha_1 &= 2\sin\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} \\ &\leq 2\sin\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} = \sin(\beta_1 - \alpha_1) \end{aligned}$$

(vì $0 \leq \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2} \leq \dfrac{\beta_1 + \alpha_1}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$)

2) Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n - 1$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin\beta_i - \sin\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (\sin\beta_i - \sin\alpha_i) + \sin\beta_n - \sin\alpha_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\sin\beta_i - \sin\alpha_i) + 2\sin\frac{\beta_n - \alpha_n}{2}\cos\frac{\beta_n + \alpha_n}{2}$$

$$\le \sin(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i - \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i) + 2\sin\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}\cos(\sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i-\alpha_i) + \frac{\beta_n-\alpha_n}{2})$$
$$= \sin(\sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i-\alpha_i)) + \sin(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)) + \sin(-\sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i-\alpha_i))$$
$$= \sin(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i).$$

Vì cộng các bất phương trình $\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge \beta_1, \alpha_3 \ge \beta_2, \ldots, \alpha_n \ge \beta_{n-1}$ ta nhận được $\alpha_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \ge \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}$ từ đó suy ra

$$0 \le \sum_{i=1}^{n-1}(\beta_i-\alpha_i) + \frac{\beta_n-\alpha_n}{2} \le \frac{\beta_n+\alpha_n}{2} \le \frac{\pi}{2}.$$ ☺

▷ **5.31. Lời giải:** Ta đặt $S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$. Với $n = 2$ ta có $S_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$. Ta giả thiết rằng $S_n > \frac{13}{24}$, với số n nào đấy. Ta sẽ chứng minh khi đó cũng có bất đẳng thức cho $S_{n+1} > \frac{13}{24}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau là đủ $S_{n+1} - S_n > 0$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{n+i+1} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

▷ **5.32. Lời giải:** Dãy đã cho thoả mãn phương trình truy hồi $a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}$. Giả sử giới hạn $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ tồn tại. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{c+a_{n-1}} = \sqrt{c + \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$ hoặc là $l = \sqrt{c+l}$, từ đây với chú ý $l > 0$, ta tìm được $l = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4c+1})$. Ta cần phải chứng minh giới hạn tồn tại. Ta chú ý rằng dãy $a_1, a_2, \ldots$ tăng, suy ra chỉ còn kiểm tra nó là bị chặn. Chính xác hơn ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$a_n < 1 + \sqrt{c}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Thật vậy, với $n = 1$ (1) thoả mãn $a_1 \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$. Giả sử bất đẳng thức (1) thoả mãn với n nào đó. Khi đó

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + (1 + \sqrt{c})} < 1 + \sqrt{c}.$$ ☺

12.6. Lời giải và gợi ý bài tập chương 6

▷ **6.17. Gợi ý:** Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo n.

▷ **6.18. Gợi ý:** Từ một số doạn thẳng có thể tạo thành đa giác khi và chỉ khi đoạn lớn nhất trong chúng phải nhỏ hơn tổng các đoạn còn lại.

▷ **6.19. Gợi ý:** Những mảnh do n đường tròn cắt ra đã được tô sơn theo giả thiết quy nạp. Ta vẽ thêm một đường tròn thứ $n + 1$, khi đó ta đổi màu tất cả các mảnh nằm trong dường tròn thứ $n + 1$. Như vậy ta có mặt phẳng phải tìm.

▷ **6.20. Gợi ý:** Tổng các số là 2.3^n.

12.7. Lời giải và gợi ý bài tập chương 7

▷ **7.17. Lời giải:** Ta chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ mệnh đề đúng, vì

$$\frac{a}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{a}{x+1} = (-\frac{a}{x+1}) - (-\frac{a}{x}).$$

Cho $n > 1$. Ta biểu diễn đa thức $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = c + (x+n)P_1(x),$$

ở đây c là hằng số, còn bậc của $P_1(x)$ nhỏ hơn $n-1$. Theo giả thiết quy nạp

$$P_1(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)(R_1(x+1) - R_1(x)).$$

ở đây $R_1(x)$ là một hàm hữu tỷ nào đó và khi đó

$$P(x) = x(x+1)\ldots(x+n)(R(x+1) - R(x)).$$

ở đây

$$R(x) = R_1(x) - \frac{c}{n}.\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}.$$

Chú ý: Nếu bậc của $P(x)$ là n, điều khẳng định trên là không đúng, ta hãy xem phản ví dụ sau

$$P(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1).$$ ☺

▷ **7.18. Lời giải:** Chứng minh bằng quy nạp theo n. Nếu $n = 0$, $P(x) = a$ một hằng số và khi đó $P(x) = a.P_0(x)$. Giả thiết khẳng định đúng với tất cả đa thức bậc nhỏ hơn n và $P(x) = a_n x^n + \cdots$. Ta đặt $b_n = n!a_n$. Đa thức $P(x) - b_nP_n(x)$ sẽ có bậc không lớn hơn $n-1$ và có nghĩa là theo giả thiết quy nạp có số $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sao cho

$$P(x) - b_nP_n(x) = b_{n-1}P_{n-1} + \cdots + b_0P_0(x).$$

Suy ra khẳng định đúng cho cả đa thức $P(x)$. ☺

▷ **7.19. Lời giải:** 1) Với $n = 1$ đẳng thức có dạng $u_1x = \dfrac{u_1x^3 + u_2x^2 - x}{x^2+x-1}$ hoặc là $x = \dfrac{x^3+x^2-x}{x^2+x-1}$, đẳng thức này đúng.

2) Chứng minh rằng đẳng thức đúng với số n nào đó. Ta sẽ chứng minh đẳng thức cũng đúng cho $n+1$. Thật vậy, ta biến đổi

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} u_n^i = F_n(x) + u_{n+1}x^{n+1} \\ &= \frac{u_n x^{n+2} + u_{n+1}x^{n+1} - x}{x^2+x-1} + u_{n+1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Biến đổi dựa vào công thức $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ ta nhận được

$$F_{n+1}(x) = \frac{u_{n+1}x^{n+3} + u_{n+2}x^{n+2} - x}{x^2+x-1}, (x^2+x-1 \neq 0)$$

▷ **7.20. Gợi ý:** Tiến hành như 7.16

▷ **7.21. Gợi ý:** Tiến hành như 7.16

▷ **7.22. Lời giải:** Chứng minh bằng quy nạp theo n.

1) $n = 0$, Khi đó $P(x) = a_0$. Nếu $|1-a_0| < 1$ và $|a-a_0| < 1$. Khi đó $|a-1| = |a-a_0+a_0-1| \leq |a-a_0| + |a_0-1| < 2$, nhưng $a \geq 3$ dẫn đến vô lý!.

2) Giả sử mệnh đề đúng với $k \leq n-1$. Ta xét đa thức

$$Q(x) = \frac{P(x+1)-P(x)}{a-1}.$$

Dễ dàng thấy rằng $Q(x)$ là đa thức bậc $n-1$. Theo giả thiết quy nạp tồn tại số $i (0 \leq i \leq n-1)$ sao cho

$$\begin{aligned} 1 &\leq |a^i - Q(i)| = |a^i - \frac{P(i+1)-P(i)}{a-1}| \\ &= \frac{|a^{i+1} - P(i+1) - a^i + P(i)|}{a-1} \leq \frac{|a^{i+1} - P(i+1)|}{a-1} + \frac{|a^i - P(i)|}{a-1}. \end{aligned}$$

Có ít nhất một trong các số hạng không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử đó là biểu thức thứ nhất, thì vì $\frac{a-1}{2} \geq 1$ do $a \geq 3$, $|a^{i+1} - P(i+1)| \geq \frac{a-1}{2} \geq 1$.

Tương tự, nếu biểu thức thứ hai không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, thì $|a^i - P(i)| \geq 1$. ☺

▷ **7.23. Lời giải:** 1) Với $n = 1$. Khi đó $P_1(x) + P_1(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$ và bất đẳng thức nhận được có dạng

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, (x > 0). \tag{12.5}$$

Vì $x > 0$, nên bất đẳng thức vuằ nhận được tương đương với $(x-1)^2 \geq 0$ và suy ra mệnh đề đúng.

Với $n = 2$ ta có $P_2(x) + P_2(\frac{1}{x}) = (x^2+1) + (\frac{1}{x^2}+1) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Cần phải chứng minh rằng $P_2(x) + P_2(\frac{1}{x}) \geq 2 + 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^2) = 4$ hoặc là $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$; điều này suy ra từ (12.5). Giả sử mệnh đề đúng với n. Ta có bất đẳng thức sau đúng

$$P_n(x) + P_n(\frac{1}{x}) \geq n + 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n).$$

Ta sẽ chứng minh trước tiên bất đẳng thức đúng cho $n+2$

$$P_{n+2}(x) + P_{n+2}(\frac{1}{x}) \geq n + 3 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+2}).$$

Chú ý P_n thoả mãn đẳng thức $P_{n+2}(x) = x^{n+2} + P_n(x)$. Suy ra

$$P_{n+2}(x) + P_{n+2}(\frac{1}{x}) = [P_n(x) + P_n(\frac{1}{x})] + [x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}]$$

Theo (*) bất đẳng thức sau đúng $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \geq 2$. Từ các đẳng thức và bất đẳng thức sau cùng và giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) + P_{n+2}(\frac{1}{x}) &\geq n + 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) + 2. \\ &= (n+2) + 1 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+2}). \end{aligned}$$

Ta chú ý rằng $(-1)^n = (-1)^{n+2}$. Theo nguyên lý quy nạp mệnh đề đúng với mọi số lẻ n (vì nó đúng với $n = 1$) và đúng với mọi n chẵn (vì nó đúng với $n = 2$). Như vậy bất dẳng thức đúng với mọi $n \geq 1$. ☺

12.8. Lời giải và gợi ý bài tập chương 8

▷ **8.19. Lời giải:** 1) với $n = 1$ khẳng định đúng, vì

$$\frac{2\cos x - \cos 2x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2\cos x - 2\cos^2 x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{\cos x(1-\cos x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}} = \cos x.$$

2) Cho

$$\cos x + 2\cos 2x + \cdots + k\cos kx = \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\cos x + 2\cos 2x + \cdots + k\cos kx + (k+1)\cos(k+1)x = \\ &= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} + (k+1)\cos(k+1)x \\ &= \frac{(k+1)\cos kx - k\cos(k+1)x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} + \frac{2(1-\cos x)(k+1)\cos(k+1)x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \\ &= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} - \frac{2(k+1)\cos x\cos(k+1)x + 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x + (k+1)\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{(k+1)[\cos(k+2)x + \cos kx] + 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{(k+2)\cos(k+1)x - (k+1)\cos(k+2)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$ ☺

▷ **8.20. Lời giải:** 1) Với $n = 1$ khẳng định đúng, vì

$$1 + i = 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

2) Giả sử đúng với $n = k$, tức là

$$(1+i)^k = 2^{\frac{k}{2}}(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}).$$

Khi đó

$$(1+i)^{k+1} = 2^{\frac{k}{2}}(\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}).2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

$$.2^{\frac{k+1}{2}}(\cos\frac{(k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(k+1)\pi}{4}).$$ ☺

▷ **8.21. Lời giải:** Với $n = 2$ đẳng thức đúng: $a_1b_1 + a_2b_2 = a_2(b_1+b_2) - (a_2-a_1)b_1 = a_2B_2 - (a_2-a_1)B_1$. Ta sẽ chứng minh nếu khẳng định đúng với n nào đó, thì nó cũng đúng với $n+1$. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{n+1} a_\mu b_\mu &= \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu b_\mu + a_{n+1}b_{n+1}\\ &= [a_nB_n - \sum_{\mu=1}^{n-1}(a_{\mu+1}-a_\mu)B_\mu] + a_{n+1}b_{n+1}.\end{aligned} \tag{12.6}$$

Nhưng $b_{n+1} = B_{n+1} - B_n$ ở đây $a_nB_n + a_{n+1}b_{n+1} = a_nB_n + a_{n+1}(B_{n+1} - B_n)$. Từ kết quả cuối cùng và (12.6) ta nhận được

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} a_\mu b_\mu = a_{n+1}b_{n+1} - (a_{n+1} - a_n)B_n - \sum_{\mu=1}^{n-1}(a_{\mu+1} - a_\mu)B_\mu$$
$$= a_{n+1}b_{n+1} - \sum_{\mu=1}^{n}(a_{\mu+1} - a_\mu)B_\mu.$$

▷ **8.22. Lời giải:** Ta chứng minh bằng quy nạp theo k. Với $k = 1$ tổng này bằng

$$1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}. \tag{12.7}$$

Với $k = 2$ ta tính được

$$1 - \frac{2}{m+1} + \frac{2.1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m}{m+2}. \tag{12.8}$$

Từ đẳng thức (12.7) và (12.8) đưa đến giải thiết tổng (12.6) bằng $\frac{m}{m+k}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$1 - \frac{k+1}{n+1} + \frac{(k+1)k}{(m+1)(m+2)} - \cdots + (-1)^{k+1}\frac{(k+1)k\ldots 2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k+1)}$$
$$= \frac{m}{m+k+1}. \tag{12.9}$$

Ta đưa vào định nghĩa sau

$$Q_i(k) = \begin{cases} 0, & \text{nếu hoặc } i < 0, \text{ hoặc } i > k; \\ (-1)^i & .\dfrac{k(k-1)\ldots(k-i+1)}{(m+1)\ldots(m+i)}, \text{ nếu } 0 \le i \le k \end{cases}$$

Khi đó (12.9) có thể viết

$$\sum_{i=0}^{k+1} Q_i(k+1) = \sum_{i=0}^{k+1}[Q_i(k) - \frac{i}{m+i}Q_{i-1}(k)] =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} Q_i(k) - \sum_{i=0}^{k+1}\frac{i}{m+i}Q_{i-1}(k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} Q_i(k) - \sum_{i=0}^{k} \frac{i+1}{m+i+1} Q_i(k)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{m}{m+i+1} Q_i(k)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{m}{m+i+1} . \frac{m}{m+k+1} . \frac{m+k+1}{m} Q_i(k)$$
$$= \frac{m}{m+k+1} \sum_{i=0}^{k} \frac{m+k+1}{m+i+1} Q_i(k)$$
$$= \frac{m}{m+k+1} \sum_{i=0}^{k} \frac{m+k+1+i-i}{m+i+1} Q_i(k)$$
$$= \frac{m}{m+k+1} [\sum_{i=0}^{k} Q_i(k) + \sum_{i=0}^{k} \frac{k-i}{m+i+1} Q_i(k)]$$
$$= \frac{m}{m+k+1} [\sum_{i=0}^{k} Q_i(k) - \sum_{i=0}^{k} Q_{i+1}(k)] = \frac{m}{m+k+1}.$$

☺

12.9. Lời giải và gợi ý bài tập chương 9

▷ **9.11. Gợi ý:** a) áp dụng đẳng thức ở bài 9.4 ta nhận được

$$\frac{P_{2i}}{Q_{2i}} - \frac{P_{2i-2}}{Q_{2i-2}} = -(-1)^{2i-1} . \frac{q_{2i}}{Q_{2i} Q_{2i-2}},$$

từ đó có $\frac{P_{2i}}{Q_{2i}} > \frac{P_{2i-2}}{Q_{2i-2}} (i = 1, 2, \ldots)$.

b) tương tự như phần a).

▷ **9.12. Lời giải:** a) Dãy $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ hội tụ, bởi vì theo bài tập trên thì dãy giảm, mặt khác số hạng của nó đều dương. Ta đặt

$\omega' = \lim_{i\to\infty} \frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}}$. Ta sẽ chỉ ra rằng dãy $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ cũng hội tụ; để chứng minh được điều đó cần chỉ ra nó bị chặn phải, vì ta đã biết như bài tập trên nó đã là dãy tăng. Thật vậy, từ (9.13) ta có

$$P_{2i+1}Q_{2i} - P_{2i}Q_{2i+1} = (-1)^{2i} = 1,$$

từ đây

$$\frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} - \frac{P_{2i}}{Q_{2i}} = \frac{P_{2i+1}Q_{2i} - P_{2i}Q_{2i+1}}{Q_{2i}Q_{2i+1}} = \frac{1}{Q_{2i}Q_{2i+1}} > 0. \qquad (12.10)$$

Ta đặt $\alpha'' = \lim_{i\to\infty} \frac{P_{2i}}{Q_{2i}}$. Bởi vì dãy phân số xấp xỉ với chỉ số lẻ trội hơn phân số với chỉ số chẵn, thì $\omega'' \le \omega'$. Mặt khác $\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} < \omega'', (m = 0, 1, \ldots)$ và $\omega' < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, (n = 0, 1, \ldots)$. Suy ra bất đẳng thức

$$\frac{P_{2m}}{Q_{2m}} < \omega'' \le \omega' < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$$

thoả mãn tất cả số tự nhiên m, n. Ta sẽ chứng minh rằng $\omega' = \omega''$. Để đạt mục đích này ta phải kết luận $\frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} - \frac{P_{2i}}{Q_{2i}}$ có thể trở thành rất nhỏ khi i đủ lớn. Theo bài trên dãy $Q_0, Q_1, \ldots$ đơn điệu tăng suy ra $Q_n \ge n, (n = 0, 1, \ldots)$. Khi đó từ (12.10) ta nhận được

$$0 < \frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} - \frac{P_{2i}}{Q_{2i}} = \frac{1}{Q_{2i}Q_{2i+1}} \le \frac{1}{2i(2i+1)},$$

từ đây

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} - \frac{P_{2i}}{Q_{2i}}\right) = \lim_{i\to\infty} \frac{P_{2i+1}}{Q_{2i+1}} - \lim_{i\to\infty} \frac{P_{2i}}{Q_{2i}} = \omega' - \omega'' = 0.$$

Ta ký hiệu ω giá trị chung của ω' và ω'' có thể viết $\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$. Theo định nghĩa giới hạn này là giá trị của liên phân số. Ta đa chứng minh xong mọi liên phân số với các phần tử nguyên là hội tụ. ☺

▷ **9.13. Gợi ý:** Theo bài trên liên phân số đã cho là hội tụ, ta có thể viết

$$\omega = (1, 1, \ldots) = (1, \omega) = 1 + \frac{1}{\omega},$$

Ta thấy rằng ω là nghiệm của phương trình $\omega^2 - \omega - 1 = 0$. Vì $\omega > 0$, thì $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

▷ **9.14. Lời giải:** Từ những tính chất của liên phân số ta nhận được

$$\omega - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_i\omega_{i+1} + P_{i-1}}{Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{Q_iP_{i-1} - Q_{i-1}P_i}{Q_i(Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1})}$$

và theo (9.13) ta có

$$\delta_i = |\omega - \frac{P_i}{Q_i}| = \frac{1}{Q_i(Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1})}. \tag{12.11}$$

Vì

$$\omega_{i+1} > q_{i+1}, \tag{12.12}$$

thì $Q_i(Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1}) > Q_i(Q_iq_{i+1} + Q_{i-1}) = Q_iQ_{i+1}$ từ đây $\delta_i < \dfrac{1}{Q_iQ_{i+1}}$. mặt khác $Q_i(Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1}) = Q_i(Q_i(\omega_{i+1} - q_{i+1}) + Q_iq_{i+1} + Q_{i-1})$ và dùng bất đẳng thức (12.12) ta nhận được $Q_i(Q_i\omega_{i+1} + Q_{i-1}) < Q_i(Q_i + (Q_iq_{i+1} + Q_{i-1})) = Q_i(Q_i + Q_{i+1})$. Từ đây và (12.11) ta tìm được

$$\delta_i > \frac{1}{Q_i(Q_i + Q_{i+1})}.$$

☺

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Phương pháp Đirichlê và ứng dụng,*
Nguyễn Hữu Điển, NXB KHKT, 1999.

[2] *Phương pháp số phức và hình học phẳng,*
Nguyễn Hữu Điển, NXB ĐHQG, 2000.

[3] *Метод математической индукции,*
И. С. Соминский, Москва, 1961.

[4] *Математическа индукция,*
Л. Петрушев, София, 1983.

[5] *Problem-Solving through problems,*
Loren C. Larson, Springer-Verlag, 1983.

[6] *Các đề thi vô địch toán các nước,*
X.V. Cônhiagin, G.A. Tônôian, I.F. Sarưgin,... NXB GD, 1996.

[7] *Phép quy nạp trong hình học,*
L.I. Golovina, I.M. Yaglom NXB GD, 1997.

NỘI DUNG

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Mã số: 8H663M0

In 3.000 bản (21TK), khổ $14,3 \times 20,3$ cm Tại Công ty In Ba Đình, Thanh Hóa Số in: 127; Số XB 05/796-00.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2000.