222. Ta thấy với n là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số tự nhiên, nếu n khác số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ, nên $\sqrt{n}$ không có dạng $\overline{....,5}$. Do đó ứng với mỗi số $n \in N^*$ có duy nhất một số nguyên a_n gần $\sqrt{n}$ nhất.

Ta thấy rằng, với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … thì a_n bằng 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, … Ta sẽ chứng minh rằng a_n lần lượt nhận các giá trị : hai số 1, bốn số 2, sáu số 3… Nói cách khác ta sẽ chứng minh bất phương trình :

$$1-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<1+\frac{1}{2} \text{ có hai nghiệm tự nhiên.}$$

$$2-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<2+\frac{1}{2} \text{ có bốn nghiệm tự nhiên.}$$

$$3-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<3+\frac{1}{2} \text{ có sáu nghiệm tự nhiên.}$$

Tổng quát : $k-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<k+\frac{1}{2}$ có 2k nghiệm tự nhiên. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với : $k^2-k+\frac{1}{4} < x < k^2+k+\frac{1}{4}$. Rõ ràng bất phương trình này có 2k nghiệm tự nhiên là : k^2-k+1 ; k^2-k+2 ; … ; k^2+k. Do đó :

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{1980}}=\left(\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{2\text{ số}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{4\text{ số}}\right)+...+\left(\underbrace{\frac{1}{44}+\frac{1}{44}+...+\frac{1}{44}}_{88\text{ số}}\right)=2.44=88.$$

223. Giải tương tự bài 24.

a) $1 < a_n < 2$. Vậy $[\,a_n\,] = 1$.

b) $2 \le a_n \le 3$. Vậy $[\,a_n\,] = 2$.

c) Ta thấy : $44^2 = 1936 < 1996 < 2025 = 45^2$, còn $46^2 = 2116$.

$$a_1 = \sqrt{1996} = 44 < a_1 < 45.$$

Hãy chứng tỏ với $n \ge 2$ thì $45 < a_n < 46$.

Như vậy với n = 1 thì $[\,a_n\,] = 44$, với $n \ge 2$ thì $[\,a_n\,] = 45$.

224. Cần tìm số tự nhiên B sao cho $B \le A < B + 1$. Làm giảm và làm trội A để được hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có : $(4n+1)^2 < 16n^2+8n+3 < (4n+2)^2 \Rightarrow 4n+1 < \sqrt{16n^2+8n+3} < 4n+2$

$$\Rightarrow 4n^2+4n+1 < 4n^2+\sqrt{16n^2+8n+3} < 4n^2+4n+2 < 4n^2+8n+4$$

$$\Rightarrow\ (2n+1)^2 < 4n^2 + \sqrt{16n^2+8n+3} < (2n+2)^2.$$

Lấy căn bậc hai : $2n + 1 < A < 2n + 2$. Vậy $[A] = 2n + 1$.

225. Để chứng minh bài toán, ta chỉ ra số y thỏa mãn hai điều kiện : $0 < y < 0{,}1$ **(1)**.

x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2 **(2)**.

Ta chọn $y = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{200}$. Ta có $0 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 0{,}3$ nên $0 < y < 0{,}1$. Điều kiện (1) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Ta có :

$$x + y = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{200} + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{200} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{100} + \left(5-2\sqrt{6}\right)^{100}.$$

Xét biểu thức tổng quát $S_n = a^n + b^n$ với $a = 5 + 2\sqrt{6}$, $b = 5 - 2\sqrt{6}$.

$$S_n = (5 + 2\sqrt{6})^n = (5 - 2\sqrt{6})^n$$

A và b có tổng bằng 10, tích bằng 1 nên chúng là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 1 = 0$, tức là : $a^2 = 10a - 1$ **(3)** ; $b^2 = 10b - 1$ **(4)**.

Nhân (3) với a^n , nhân (4) với b^n : $a^{n+2} = 10a^{n+1} - a^n$; $b^{n+2} = 10b^{n+1} - b^n$.

Suy ra $(a^{n+2} + b^{n+2}) = 10(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n + b^n)$,

tức là $S_{n+2} = 10S_{n+1} - S_n$, hay $S_{n+2} \equiv - S_{n+1}$ (mod 10)

Do đó $S_{n+4} \equiv - S_{n+2} \equiv S_n$ (mod 10) **(5)**

Ta có $S_0 = (5 + 2\sqrt{6})^0 + (5 - 2\sqrt{6})^0 = 1 + 1 = 2$; $S_1 = (5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6}) = 10$.

Từ công thức (5) ta có S_2 , S_3 , … , S_n là số tự nhiên, và S_0 , S_4 , S_8 , … , S_{100} có tận cùng bằng 2, tức là tổng x + y là một số tự nhiên có tận cùng bằng 2. Điều kiện (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

226. Biến đổi $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{250} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^{125}$. Phần nguyên của nó có chữ số tận cùng bằng 9.

(Giải tương tự bài 36)

227. Ta có :

$$A = \left(\left[\sqrt{1}\right]+\ldots+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+\ldots+\left[\sqrt{8}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{9}\right]+\ldots+\left[\sqrt{15}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{16}\right]+\ldots+\left[\sqrt{24}\right]\right)$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có 3 số, nhóm 2 có 5 số, nhóm 3 có 7 số, nhóm 4 có 9 số. Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

Vậy $A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70$

228. a) Xét $0 \le x \le 3$. Viết A dưới dạng : $A = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 - x)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, (3 - x)$ ta được : $\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(3 - x) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+3-x}{3}\right)^3 = 1$.

Do đó $A \le 4$ (1)

b) Xét $x > 3$, khi đó $A \le 0$ (2). So sánh (1) và (2) ta đi đến kết luận

$\max A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 3 - x \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

229. a) Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta được :

$$x + 1 + 7 - x + 3.\sqrt[3]{(x+1)(7-x)}.2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ ;\ x = 7 \text{ (thỏa)}$$

b) Điều kiện : $x \ge -1$ (1). Đặt $\sqrt[3]{x-2} = y$; $\sqrt{x+1} = z$. Khi đó $x - 2 = y^2$; $x + 1 = z^2$

nên $z^2 - y^3 = 3$. Phương trình đã cho được đưa về hệ : $\begin{cases} y + z = 3 & (2) \\ z^2 - y^3 = 3 & (3) \\ z \ge 0 & (4) \end{cases}$

Rút z từ (2) : $z = 3 - y$. Thay vào (3) : $y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Suy ra $z = 2$, thỏa mãn (4). Từ đó $x = 3$, thỏa mãn (1). Kết luận : $x = 3$.

230. a) Có, chẳng hạn : $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

b) Không. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a, b mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$. Bình phương hai vế :

$$a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} - (a + b).$$

Bình phương 2 vế : $4ab = 2 + (a + b)^2 - 2(a + b)\sqrt{2} \Rightarrow 2(a + b)\sqrt{2} = 2 + (a + b)^2 - 4ab$

Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ (vì $a + b \ne 0$), mâu thuẩn.

231. a) Giả sử $\sqrt[3]{5}$ là số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra $5 = \frac{m^3}{n^3}$. Hãy chứng minh rằng cả m lẫn n đều chia hết cho 5, trái giả thiết $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ là số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra :

$$\frac{m^3}{n^3} = \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3 = 6+3.\sqrt[3]{8}.\frac{m}{n} = 6+\frac{6m}{n} \Rightarrow m^3 = 6n^3+6mn^2 \ (1) \Rightarrow m^3 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2$$

Thay $m = 2k$ $(k \in Z)$ vào (1) : $8k^3 = 6n^3 + 12kn^2 \Rightarrow 4k^3 = 3n^3 + 6kn^2$. Suy ra $3n^3$ chia hết cho 2 $\Rightarrow$ n^3 chia hết cho 2 $\Rightarrow$ n chia hết cho 2. Như vậy m và n cùng chia hết cho 2, trái với giả thiết $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

232. *Cách 1* : Đặt $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ tương đương với $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \ge xyz$ hay $x^3+y^3+z^3-3xyz \ge 0$. Ta có hằng đẳng thức :

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]. \text{ (bài tập sbt)}$$

Do a, b, c ≥ 0 nên x, y, z ≥ 0, do đó $x^3+y^3+z^3-3xyz \ge 0$. Như vậy : $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

Xảy ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2 : Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho bốn số không âm. Ta có :

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right) \ge \sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

Trong bất đẳng thức $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \ge abcd$, đặt $d = \frac{a+b+c}{3}$ ta được :

$$\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4 \ge abc.\frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \ge abc.\frac{a+b+c}{3}.$$

Chia hai vế cho số dương $\frac{a+b+c}{3}$ (trường hợp một trong các số a, b, c bằng 0, bài toán được chứng minh) : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

$$\text{Xảy ra đẳng thức : } a = b = c = \frac{a+b+c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 1$$

233. Từ giả thiết suy ra : $\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1} \le 1-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{a+1}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương : $\frac{1}{a+1} \ge \frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}$. Tương tự :

$$\frac{1}{b+1} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{acd}{(a+1)(c+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{c+1} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{abd}{(a+1)(b+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{d+1} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$$

Nhân từ bốn bất đẳng thức : $1 \ge 81abcd \Rightarrow abcd \le \frac{1}{81}$.

234. Gọi $A = \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$3A = \left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)(1+1+1) \ge \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm : $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} = 3 \quad (2)$

Nhân từng vế (1) với (2) : $3A\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \ge 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2 \Rightarrow A \ge \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

235. Đặt $x = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$; $y = \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$ thì $x^3 + y^3 = 6$ (1). Xét hiệu $b^3 - a^3$, ta được :

$$b^3 - a^3 = 24 - (x + y)^3 = 24 - (x^3 + y^3) - 3xy(x + y)$$

Do (1), ta thay 24 bởi $4(x^3 + b^3)$, ta có :

$$b^3 - a^3 = 4(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3) - 3xy(x + y) = 3(x^3 + y^3) - 3xy(x + y) =$$

$$= 3(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) = 3(x + y)(x - y)^2 > 0 \quad (\text{vì } x > y > 0).$$

Vậy $b^3 > a^3$, do đó $b > a$.

236. a) Bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Với $n \geq 2$, theo khai triển Newton, ta có :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...2.1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

$$< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$$

Dễ dàng chứng minh : $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} =$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$ Do đó $(1+\frac{1}{n})^n < 3$

b) Với $n = 2$, ta chứng minh $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (1). Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 > \left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$.

Với $n \geq 3$, ta chứng minh $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ (2). Thật vậy :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n \quad (3)$$

Theo câu a ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, mà $3 \leq n$ nên (3) được chứng minh.

Do đó (2) được chứng minh.

237. Cách 1 : $A^2 = 2\left(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}\right) \geq 4$. min A = 2 với x = 0.

Cách 2 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$A \geq 2\sqrt[4]{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt[4]{x^4 + x^2 + 1} \geq 2$$

min A = 2 với x = 0.

238. Với $x < 2$ thì $A \geq 0$ (1). Với $2 \leq x \leq 4$, xét $-A = x^2(x - 2)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :

$$-\frac{A}{4} = \frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(x-2) \le \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+x-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x-2}{3}\right)^3 \le 8$$

$$- A \le 32 \Rightarrow A \ge -32.\quad \min A = -32 \text{ với } x = 4.$$

239. Điều kiện : $x^2 \le 9$.

$$A^2 = x^4(9-x^2) = 4.\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}(9-x^2) \le 4\left(\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+9-x^2}{3}\right)^3 = 4.27$$

$$\max A = 6\sqrt{3} \text{ với } x = \pm\sqrt{6}.$$

240. a) Tìm giá trị lớn nhất :

<u>*Cách 1*</u> : Với $0 \le x < \sqrt{6}$ thì $A = x(x^2 - 6) \le 0$.

Với $x \ge \sqrt{6}$. Ta có $\sqrt{6} \le x \le 3 \Rightarrow 6 \le x^2 \le 9 \Rightarrow 0 \le x^2 - 6 \le 3$.

Suy ra $x(x^2 - 6) \le 9$. $\max A = 9$ với $x = 3$.

<u>*Cách 2*</u> : $A = x(x^2 - 9) + 3x$. Ta có $x \ge 0$, $x^2 - 9 \le 0$, $3x \le 9$, nên $A \le 9$.

$$\max A = 9 \text{ với } x = 3$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất :

<u>*Cách 1*</u> : $A = x^3 - 6x = x^3 + (2\sqrt{2})^3 - 6x - (2\sqrt{2})^3 == (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 8) - 6x - 16\sqrt{2}$

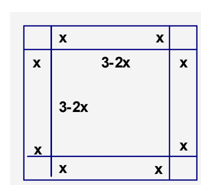
$= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (x + 2\sqrt{2}).6 - 6x - 16\sqrt{2} = (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} \ge -4\sqrt{2}$.

$$\min A = -4\sqrt{2} \text{ với } x = \sqrt{2}.$$

<u>*Cách 2*</u> : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm :

$$x^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \ge 3.\sqrt[3]{x^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 6x.$$

Suy ra $x^3 - 6x \ge -4\sqrt{2}$. $\min A = -4\sqrt{2}$ với $x = \sqrt{2}$.



241. Gọi x là cạnh của hình vuông nhỏ, V là thể tích của hình hộp.

Cần tìm giá trị lớn nhất của $V = x(3 - 2x)^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy với ba số dương :

$4V = 4x(3 – 2x)(3 – 2x) \le \left(\dfrac{4x+3-2x+3-2x}{3}\right)^3 = 8$ max V = 2 $\Leftrightarrow$ 4x = 3 – 2x

$\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1}{2}$

Thể tích lớn nhất của hình hộp là 2 dm^3 khi cạnh hình vuông nhỏ bằng $\dfrac{1}{2}$ dm.

242. a) Đáp số : 24 ; - 11. **b)** Đặt $\sqrt[3]{2-x} = a$; $\sqrt{x-1} = b$. Đáp số : 1 ; 2 ; 10.

c) Lập phương hai vế. Đáp số : 0 ; $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

d) Đặt $\sqrt[3]{2x-1} = y$. Giải hệ : $x^3 + 1 = 2y$, $y^3 + 1 = 2x$, được $(x – y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow$ x = y. Đáp số : 1 ; $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

e) Rút gọn vế trái được : $\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$. Đáp số : x = 4.

g) Đặt $\sqrt[3]{7-x} = a$; $\sqrt[3]{x-5} = b$. Ta có : $a^3 + b^3 = 2$, $a^3 – b^3 = 12 – 2x$, do đó vế phải của phương trình đã cho là $\dfrac{a^3-b^3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành : $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{a^3-b^3}{2}$.

Do $a^3 + b^3 = 2$ nên $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \Rightarrow (a – b)(a^3 + b^3) = (a + b)(a^3 – b^3)$

Do $a + b \ne 0$ nên : $(a – b)(a^2 – ab + b^2 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$.

Từ a = b ta được x = 6. Từ ab = 0 ta được x = 7 ; x = 5.

h) Đặt $\sqrt[3]{x+1} = a$; $\sqrt[3]{x-1} = b$. Ta có : $a^2 + b^2 + ab = 1$ (1) ; $a^3 – b^3 = 2$ (2).

Từ (1) và (2) : a – b = 2. Thay b = a – 2 vào (1) ta được a = 1. Đáp số : x = 0.

i) *Cách 1* : x = - 2 nghiệm đúng phương trình. Với $x + 2 \ne 0$, chia hai vế cho $\sqrt[3]{x+2}$.

Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x+2}} = a$; $\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}} = b$. Giải hệ $a^3 + b^3 = 2$, a + b = - 1. Hệ này vô nghiệm.

Cách 2 : Đặt $\sqrt[3]{x+2} = y$. Chuyển vế : $\sqrt[3]{y^3-1} + \sqrt[3]{y^3+1} = -y$. Lập phương hai vế ta được :

$$y^3 – 1 + y^3 + 1 + 3.\sqrt[3]{y^6-1}.(- y) = - y^3 \Leftrightarrow y^3 = y.\sqrt[3]{y^6-1}.$$

Với y = 0, có nghiệm x = - 2. Với y ≠ 0, có $y^2 = \sqrt[3]{y^6 - 1}$. Lập phương : $y^6 = y^6 - 1$. Vô n_0.

Cách 3 : Ta thấy x = - 2 nghiệm đúng phương trình. Với x < - 2, x > - 2, phương trình vô nghiệm, xem bảng dưới đây :

x	$\sqrt[3]{x+1}$	$\sqrt[3]{x+2}$	$\sqrt[3]{x+3}$	Vế trái
x < - 2 x > - x	< - 1 > - 1	< 0 > 0	< 1 > 1	< 0 > 0

k) Đặt 1 + x = a , 1 – x = b. Ta có : a + b = 2 (1), $\sqrt[4]{ab} + \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = 3$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{mn} \le \frac{m+n}{2}$, ta có

$$3 = \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} + \sqrt{1.\sqrt{a}} + \sqrt{1.\sqrt{b}} \le \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} + \frac{1+\sqrt{a}}{2} + \frac{1+\sqrt{b}}{2} =$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \le \frac{1+a}{2} + \frac{1+b}{2} + 1 = \frac{a+b}{2} + 2 = 3.$$

Phải xảy ra dấu đẳng thức, tức là : a = b = 1. Do đó x = 0.

l) Đặt $\sqrt[4]{a-x} = m \ge 0$; $\sqrt[4]{b-x} = n \ge 0$ thì $m^4 + n^4 = a + b - 2x$.

Phương trình đã cho trở thành : $m + n = \sqrt[4]{m^4 + n^4}$. Nâng lên lũy thừa bậc bốn hai vế rồi thu gọn : $2mn(2m^2 + 3mn + 2n^2) = 0$.

Suy ra m = 0 hoặc n = 0, còn nếu m, n > 0 thì $2m^2 + 3mn + 2n^2 > 0$.

Do đó x = a , x = b. Ta phải có x ≤ a , x ≤ b để các căn thức có nghĩa.

Giả sử a ≤ b thì nghiệm của phương trình đã cho là x = a.

243. Điều kiện để biểu thức có nghĩa : $a^2 + b^2 \ne 0$ (a và b không đồng thời bằng 0).

Đặt $\sqrt[3]{a} = x$; $\sqrt[3]{b} = y$, ta có : $A = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{x^2 + xy + y^2} =$

$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)^2 - (xy)^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^2+y^2+xy} = x^2 + y^2 - xy.$$

Vậy : $A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$ (với $a^2 + b^2 \ne 0$).

244. Do A là tổng của hai biểu thức dương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$A = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \ge 2\sqrt{\sqrt{x^2 - x + 1}.\sqrt{x^2 + x + 1}} = 2\sqrt[4]{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}$$

=

$= 2\sqrt[4]{x^4+x^2+2} \ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi :

$\begin{cases} x^2+x+1 = x^2-x+1 \\ x^4+x^2+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Ta có A ≥ 2, đẳng thức xảy ra khi x = 0. Vậy : min A = 2 $\Leftrightarrow$ x = 0.

245. Vì $1+\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$, nên ta có :

$$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0.$$

Sau khi thực hiện các phép biến đổi, ta được biểu thức thu gọn :$(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0$.

Vì a, b$\in$ **Z** nên $p = 4a + b + 42 \in \mathbf{Z}$ và $q = 2a + b + 18 \in \mathbf{Z}$.Ta phải tìm các số nguyên a, b sao cho $p + q\sqrt{3} = 0$.

Nếu $q \ne 0$ thì $\sqrt{3} = -\frac{p}{q}$, vô lí. Do đó q = 0 và từ $p + q\sqrt{3} = 0$ ta suy ra p = 0.

Vậy $1+\sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 4a+b+42 = 0 \\ 2a+b+18 = 0 \end{cases}.\ \text{Suy ra } a = -12\ ;\ b = 6.$$

246. Giả sử $\sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q}$ là phân số tối giản). Suy ra : $3 = \frac{p^3}{q^3}$. Hãy chứng minh cả p và q cùng chia hết cho 3, trái với giả thiết $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản.

247. a) Ta có : $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt[6]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

Do đó : $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}.\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 1$.

b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}.\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -1$.

248. Áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta có :

$a^3 = 20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}.a \Leftrightarrow a^3 = 40+3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}.a$

$\Leftrightarrow a^3 - 6a - 40 = 0 \Leftrightarrow (a-4)(a^2+4a+10) = 0$. Vì $a^2 + 4a + 10 > 0$ nên $\Rightarrow a = 4$.

249. Giải tương tự bài 21.

250. $A = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

251. Áp dụng : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

Từ $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$. Suy ra $x^3 = 12 + 3.3x \Leftrightarrow x^3 - 9x - 12 = 0$.

252. Sử dụng hằng đẳng thức $(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$. Tính x^3. Kết quả M = 0

253. **a)** $x_1 = -2$; $x_2 = 25$.

b) Đặt $u = \sqrt[3]{x-9}$, $v = x - 3$, ta được : $\begin{cases} u = v^3 + 6 \\ v = u^3 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -2 \Rightarrow x = 1$.

c) Đặt : $\sqrt[4]{x^2 + 32} = y > 0$. Kết quả $x = \pm 7$.

254. Đưa biểu thức về dạng : $A = \left|\sqrt{x^3+1} + 1\right| + \left|\sqrt{x^3+1} - 1\right|$. Áp dụng | A | + | B | ≥ | A + B |

$$\min A = 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0.$$

255. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai lần.

256. Đặt $\sqrt[3]{x} = y$ thì $\sqrt[3]{x^2} = y^2 \Rightarrow P = 2\sqrt[3]{x} + 2$

258. Ta có : $P = \sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(x-b)^2} = |x-a| + |x-b| \ge |x - a + b - x| = b - a$ (a < b).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x - a)(x - b) \ge 0 \Leftrightarrow a \le x \le b$. Vậy min P = b – a $\Leftrightarrow a \le x \le b$.

259. Vì a + b > c ; b + c > a ; c + a > b. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số dương

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \le \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b \quad \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \le \frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \le \frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a$$

Các vế của 3 bất đẳng thức trên đều dương. Nhân 3 bất đẳng thức này theo từng vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$a + b - c = b + c - a = c + a - b \Leftrightarrow a = b = c \text{ (tam giác đều).}$$

260. $|x - y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

261. $2A = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Ta có : c – a = - (a – c) = - [(a – b) + (b – c)] = - ($\sqrt{2}$ + 1 + $\sqrt{2}$ - 1) = - 2$\sqrt{2}$.

Do đó : 2A = ($\sqrt{2}$ + 1)^2 + ($\sqrt{2}$ - 1)^2 + (-2$\sqrt{2}$)^2 = 14. Suy ra A = 7.

262. Đưa pt về dạng : $\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-3}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-5}-3\right)^2=0$.

263. Nếu $1 \le x \le 2$ thì $y = 2$.

264. Đặt : $\sqrt{x-1}=y\ge 0$. $M=\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)\left(3-\sqrt{x-1}\right)$.

265. Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y. Với mọi x, y ta có : $x^2 + y^2 \ge 2xy$. Nhưng $x^2 + y^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128$, nên $xy \le 64$. Do đó : max xy = 64 $\Leftrightarrow$ x = y = 8.

266. Với mọi a, b ta luôn có : $a^2 + b^2 \ge 2ab$. Nhưng $a^2 + b^2 = c^2$ (định lí Pytago) nên :

$$c^2 \ge 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \ge a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \ge (a+b)^2 \Leftrightarrow c\sqrt{2} \ge a+b \Leftrightarrow c \ge \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

267. Biến đổi ta được : $\left(\sqrt{a'b}-\sqrt{ab'}\right)^2+\left(\sqrt{a'c}-\sqrt{ac'}\right)^2+\left(\sqrt{b'c}-\sqrt{bc'}\right)^2=0$

268. $-2 \le x \le -1$; $1 \le x \le 2$.

---------------Hết--------------