Khi đó :

- Tồn tại hằng số $D > 0$: $|a_n - a| \leq D, \forall n \in N$
- Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_\varepsilon \in N$: $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2C}, \quad \forall n > n_\varepsilon$

Do đó, với $n > n_\varepsilon$ thì

$$\left|\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} C_{n,k}(a_k - a) + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} C_{n,k}(a_k - a)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}||a_k - a| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}||a_k - a|$$

$$\leq D\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C}\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}|$$

$$< D\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C}.C$$

$$\leq D\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Do $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{n,k} = 0, \ \forall k \in N \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| = 0$

Do đó tồn tại $m_\varepsilon \in N$: $\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| < \dfrac{\varepsilon}{2D}, \quad \forall n > m_\varepsilon \qquad (2)$

(với ε được xét ở trên)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) < D\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$< D.\frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n > n_\varepsilon + m_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) + a\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\right]$$

$$= 0 + a.1 = a.$$

40. Cho $\{C_{n,k} / 1 \le k \le n;\ k, n \in Z\} \subset [0, +\infty)$ thỏa mãn :

a) $C_{n,k} \to 0$, khi $n \to +\infty$ $(\forall k \in N)$

b) $\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1$, khi $n \to +\infty$.

Khi đó : Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì $\left\{b_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n \quad \text{(Hệ quả định lí Toeplitz).}$$

Giải

Do $\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1 \Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\right\}$ bị chặn

$\Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum_{k=1}^{n} |C_{n,k}|\right\}$ bị chặn (c)

(Do $C_{n,k} \ge 0, \forall n, k \in N$)

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow$ (Đpcm) (Do định lí Toeplitz).

41. Chứng minh rằng :

Nếu $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ thì $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$.

Giải

Sử dụng định lí Toeplitz với $C_{n,k} = \frac{1}{n}$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Khi đó : $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$.

42. Chứng minh rằng :

Nếu $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ thì $\lim_{n \to +\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1.a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.

Giải

Đặt : $C_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}$; $k = 1, 2, \ldots, n$

Khi đó :

- $0 < C_{n,k} \to 0, \forall k \in N$
- $\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n^2} = 2\frac{n(n-1+1+n-n+1)}{2n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$

(khi $n \to +\infty$)

Theo đó theo định lí Toeplitz : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} . a_k = a$

Vậy : $\lim_{n \to +\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + ... + 1a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.

43. Chứng minh rằng : Nếu dãy dương $\{a_n\}$ hội tụ về a dương thì

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$

Giải

Cách 1 :

Ta có : $\ln a_n \to \ln a$, nên theo bài 41, ta có :

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} \to \ln a$$

$$\Rightarrow \quad \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \to \ln a \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \to a.$$

Cách 2 :

Ta có : $\begin{cases} a_n \to a \\ \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Do đó, theo bài 41 ta có :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to a$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a}.$$

Hơn nữa : $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

Vì vậy, theo tính chất kẹp : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$

44. Cho dãy dương $\{a_n\}$. Chứng minh rằng :

Nếu $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Giải

Đặt $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $n \geq 2$ $\quad (\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = a)$

Theo bài 43, ta có : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_1}} = a$

Vậy : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

45. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thỏa mãn :

a) $b_n > 0, \quad \forall n \in N$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a$.

Giải

Đặt : $C_{n,k} = \dfrac{b_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$, $\quad 1 \leq k \leq n;\ k, n \in Z$.

Ta có : • $C_{n,k} > 0, \quad \forall 1 \leq k \leq n,\ k, n \in Z$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{n,k} = 0, \forall k \in N$

• $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

Do đó theo định lí Toeplitz :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a.$$

46. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thỏa mãn :

a) $b_n > 0, \quad \forall n \in N$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$.

Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = c.$

Giải

Đặt : $C_{n,k} = \dfrac{b_k}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$, $1 \le k \le n; k, n \in Z$

Ta có : • $C_{n,k} > 0, \quad \forall 1 \le k \le n, k, n \in Z.$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{n,k} = 0, \forall k \in N$

• $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

Do đó theo định lí Toeplitz :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} \frac{a_k}{b_k} = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} = c.$$

47. Cho 2 dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa mãn :

a) $\{b_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = c$

Khi đó : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c.$ (Định lí Stolz)

Giải

Đặt : $\begin{cases} x_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, & n \ge 2 \\ y_n = b_n - b_{n-1}, & n \ge 2 \end{cases}$

Như vậy : • $y_n > 0, \quad \forall n \ge 1$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} (y_2 + y_3 + ... + y_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - b_1) = +\infty.$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = c.$

Do đó theo bài 45, ta có :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_ny_n}{y_2 + y_3 + ... + y_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_1}{b_n - b_1} = c$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_1}{b_n}}{1 - \dfrac{b_1}{b_n}} = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

48. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Giải

Đặt $\begin{cases} x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ y_n = \sqrt{n} \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó : • (y_n) tăng thực sự tới $+\infty$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2$

Do đó, theo định lí Stolz : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 2$.

49. Chứng minh rằng : Nếu dãy (a_n) thỏa mãn $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$

thì $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

Giải

Đặt : $\begin{cases} x_n = a_n \\ y_n = n \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó : • (y_n) là dãy tăng thực sự tới $+\infty$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - a_{n-1}) = a$

Do đó, theo định lí Stolz : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = a$. Vậy : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

50. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n}\right)$, $a > 1$.

Giải

Đặt : $\begin{cases} x_n = a + \frac{a^2}{2} + \dots + \frac{a^n}{n} \\ y_n = \frac{a^{n+1}}{n} \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó :

- (y_n) tăng thực sự tới $+\infty$

(vì : + $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{na}{n+1} > 1$, $\forall n \geq \left[\frac{1}{a-1}\right] + 1$

(với $\left[\frac{1}{a-1}\right]$ là phần nguyên của $\frac{1}{a-1}$)

+ $y_n > \frac{a^n}{n} = \frac{[1+(a-1)]^n}{n}$

$> \frac{C_n^2(a-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(a-1)^2}{2} \to +\infty$ (khi $n \to +\infty$))

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^n}{n}}{\frac{a^{n+1}}{n} - \frac{a^n}{n-1}} = \frac{1}{a-1}$$

Do đó, theo định lí Stolz :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{a-1}.$$

51. Cho $(C_{n,k} / 1 \leq k \leq n;\ k, n \in \mathbb{Z})$. Chứng minh rằng :

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k = a$, $\forall$ dãy (a_n) thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ $(a \in \mathbb{R})$ thì :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

c) Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho : $\sum\limits_{k=1}^{n} |C_{n,k}| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Điều ngược lại của định lí Toeplitz).

Giải

- Lấy $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k = a = 1$

$\Rightarrow$ (b) đúng.

- Lấy $a_n^{(l)} = \begin{cases} 1, & n = l \\ 0, & n \neq l \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{(l)} = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} a_n^{(l)} = 0, \quad \forall l \in N$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n \to \infty} C_{n,l} \quad \Rightarrow \quad \text{(a) đúng.}$$

Giả sử (c) sai, tức là :

+ $\exists n_1 \in N : \quad \sum_{k=1}^{n_1} |C_{n_1,k}| > 10^2$

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ có n_1 số hạng đầu tiên như sau :

$$\begin{cases} \operatorname{sign} C_{n_1,k} = \operatorname{sign} a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10} \end{cases} \quad (k = \overline{1, n_1})$$

Khi đó : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} C_{n_1,k} a_k = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{n_1} |C_{n_1,k}| > 10$

Theo (a) $\exists n_1 < n_0 \in N$:

$$\sum_{k=1}^{n_1} |C_{n,k}| < 1, \forall n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n_1} C_{n,k} . a_k \right| < \frac{1}{10}, \quad \forall n > n_0$$

+ Cũng do (c) giả sử sai, nên $\exists n_0 < n_2 \in N$:

$$\sum_{k=1}^{n_2} |C_{n_2,k}| > 10^4 + 10 + 1$$

Ta xây dựng n_2 số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau :

$$\begin{cases} \operatorname{sign} C_{n_2,k} = \operatorname{sign} a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^2} \end{cases} \quad (k = \overline{n_1 + 1, n_2})$$

Khi đó : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_2} C_{n_2,k} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} C_{n_2,k} a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} C_{n_2,k} a_k$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |C_{n_2,k}|$$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}(10^4 + 10 + 1 - 1) = 10^2.$$

+ Giả sử ta xây dựng được n_l $(n_1 < n_2 < \ldots < n_l)$ số hạng tiếp theo của dãy số $\{a_n\}$ thỏa :

$$\begin{cases} \operatorname{sign}C_{n_l,k} = \operatorname{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^l} \quad\quad (k = \overline{n_{l-1}+1,\ n_l}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n_l} C_{n_l}a_k > 10^l \end{cases}$$

+ Theo (a) $\exists n_l < n_* \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n_l} |C_{n,k}| < 1,\ \forall n > n_* \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=1}^{n_l} C_{n,k}a_k\right| < \frac{1}{10^l},\ \forall n > n_*$$

Cũng do (c) giả sử sai, nên $\exists n_* < n_{l+1} \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n_{l+1}} |C_{n_{l+1},k}| > 10^{2l+2} + 10 + 1$$

Ta xây dựng n_{l+1} số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau :

$$\begin{cases} \operatorname{sign}C_{n_{l+1},k} = \operatorname{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^{l+1}} \end{cases} \quad (k = \overline{n_l + 1,\ n_{l+1}})$$

Khi đó $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_{l+1}} C_{n_{l+1},k}.a_k = \sum_{k=1}^{n_l} C_{n_{l+1},k}a_k + \sum_{k=n_{l+1}}^{n_{l+1}} C_{n_{l+1},k}a_k$

$$> -\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{l+1}}\sum_{k=n_{l+1}}^{n_{l+1}} |C_{n_{l+1},k}|$$

$$> -\frac{1}{10^l} + \frac{1}{10^{l+1}}(10^{2l+2} + 10 + 1 - 1) = 10^{l+1}$$

Như vậy theo giả thiết quy nạp, ta xây dựng hai dãy $\{a_n\}$ và $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k\right\}$ thỏa : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{l=1}^{n_k} C_{n_k,l}a_l = +\infty \end{cases}$

(Trong đó : $\left\{\displaystyle\sum_{l=1}^{n_k} C_{n_k,l}a_l\right\}$ là một dãy con của $\left\{\displaystyle\sum_{l=1}^{n} C_{n,l}a_l\right\}$)

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy (c) đúng .

52. Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ b) Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$.

Giải

a) $\forall \varepsilon \in (0, 1 - q)$. Ta có : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < q + \varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_0 \in N$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| < (q + \varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \ \forall n > n_0$$

Do : $\lim\limits_{n \to +\infty} (q + \varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| = 0$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

b) $\forall \varepsilon \in (0, q - 1)$. Ta có : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > q - \varepsilon > 1$.

Suy ra, tồn tại $n_0 \in N$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q - \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| > (q - \varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \ \forall n > n_0$$

Do : $\lim\limits_{n \to +\infty} (q - \varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| = +\infty$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$.

3. Cho dãy (a_n) thỏa $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ b) Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$.

Giải

a) $\forall \varepsilon \in (0, 1 - q)$, ta có : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < q + \varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_0 \in N$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| < (q + \varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_0$$

Mà : $\lim\limits_{n \to +\infty} (q + \varepsilon)^n = 0$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

b) $\forall \varepsilon \in (0, 1 - q)$, ta có : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q > q - \varepsilon > 1$

Suy ra, tồn tại $n_0 \in N$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > q - \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n| > (q - \varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_0$$

Do : $\lim\limits_{n \to +\infty} (q - \varepsilon)^n = +\infty$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$.

54. Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$.

Giải

Giả sử giới hạn của dãy số $\{a_n\}$ tồn tại. Khi đó :

$$0 = \lim_{n\to+\infty}[\sin(n+1) - \sin n] = 2\sin 1 \lim_{n\to+\infty}\cos(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\cos n = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to+\infty}[\cos(n+2) - \cos n] = -2\sin 1 \lim_{n\to+\infty}\sin(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\sin n = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin^2 n + \cos^2 n)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sin^2 n + \lim_{n\to+\infty}\cos^2 n = 0 \quad \text{(vô lí)}.$$

Vậy, giới hạn của $\{\sin n\}$ không tồn tại.

55. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$.

Giải

Ta có : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in N$

(Bạn đọc tự kiểm tra bất đẳng thức kép này)

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) < n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]$$

Hơn nữa : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1 + \dfrac{1}{n^2}$ (Do BĐT Bernoulli)

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow \quad n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right] \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Do đó : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$.

PHỤ LỤC 1

CÁC ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM 2005 (Bảng A)

ĐỀ 1

Thời gian : ***180 phút*** *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi thứ nhất : ***10 / 3 / 2005.***

Bài 1

Xét các số thực x, y thỏa mãn điều kiện : $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x + y.$$

Bài 2

Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) cố định, bán kính R. Cho A và B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm A, B, O không thẳng hàng.

Xét một điểm C nằm trên đường tròn (O), C không trùng với A và B. Dựng đường tròn (O_1) đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại C; dựng đường tròn (O_2) đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai D khác C. Chứng minh rằng :

1. $CD \leq R$.
2. Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định, khi điểm C di động trên đường tròn (O) sao cho C không trùng với A và B.

Bài 3

Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một *nút*.

Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là một *tứ giác con*.

Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất : có thể tô màu n nút sao cho với mọi i, k $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$, nếu kí hiệu s(i, k) là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị s(i, k) đều bằng nhau.

ĐỀ 2

Thời gian : ***180 phút*** *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi thứ hai : ***11 / 3 / 2005.***

Bài 4

Hãy tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực R, lấy giá trị trong R và thỏa mãn hệ thức :

$$f(f(x - y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy$$

với mọi số thực x, y.

Bài 5

Hãy tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên (x, y, n) thỏa mãn hệ thức

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n.$$

(Quy ước : 0! = 1).

Bài 6

Xét dãy số thực (x_n), n = 1, 2, 3, ..., xác định bởi :

$$x_1 = a \quad \text{và} \quad x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$$

với mọi n = 1, 2, 3, ..., trong đó a là một số thực.

Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.

PHỤ LỤC 2

1. CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG NĂM HỌC 2004 – 2005

ĐỀ 1

Đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng, khối A

***Bài 1** (2 điểm)*

Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ (1)

a) Khảo sát hàm số (1).

b) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho AB = 1.

***Bài 2** (2 điểm)*

a) Giải bất phương trình : $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

***Bài 3** (3 điểm)*

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm A(0, 2) và $B(-\sqrt{3}, -1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), $S(0, 0, 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

1. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.
2. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N.

   Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Bài 4 *(2 điểm)*

a) Tính tích phân $I = \int_1^2 \dfrac{x\,dx}{1 + \sqrt{x-1}}$.

b) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của

$$[1 + x^2(1 - x)]^8.$$

Bài 5 *(1 điểm)*

Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} = -\dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{2(x-1)}$

+ $D = R\backslash\{1\}$

+ $y' = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2(x-1)^2} = \dfrac{x(2-x)}{2(x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

+ **Bảng biến thiên :**

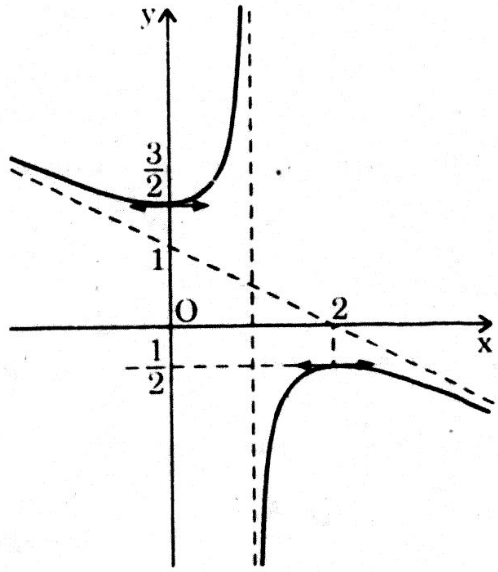
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

+ **Các tiệm cận :**

Đứng : $x = 1$

Xiên : $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

+ Đồ thị :



b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = m$ là :

$$\frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} = m \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 3 = 2mx - 2m$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2m-3)x + 3 - 2m = 0$$

Do đó đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B thỏa $AB = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-3)^2 - 4(3-2m) > 0 \\ AB^2 = (x_B - x_A)^2 = (x_B + x_A)^2 - 4x_Bx_A \end{cases}$$

$$= (2m-3)^2 - 4(3-2m) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - 12 + 8m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bài 2

a) Điều kiện : $x \geq 4$.

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-16)} > 10 - 2x$

+ Nếu $x > 5$ thì VT > 0 > VP

+ Nếu $4 \leq x \leq 5$ thì

BPT $\Leftrightarrow 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 16) > 4(25 - 10x + x^2) \Leftrightarrow x^2 - 20x + 66 < 0$

$\Leftrightarrow \quad 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \qquad \Leftrightarrow \qquad 10 - \sqrt{34} < x < 5$

Tóm lại nghiệm của BPT là $x > 10 - \sqrt{34}$.

b) Điều kiện : $\begin{cases} y - x > 0 \\ \dfrac{1}{y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{y - x} = 4 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y}{4} \\ \dfrac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3y}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ (vì $y > 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa điều kiện bài toán)

Vậy nghiệm của hệ là : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Bài 3

a) - Gọi H(x, y) là trực tâm $\triangle OAB$, ta có :

$\begin{cases} \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3}y \\ \sqrt{3}x + y - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ Vì : $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = (x, y) \\ \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, -3) \\ \overrightarrow{AH} = (x, y - 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}, -1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy $H(\sqrt{3}, -1)$.

+ Gọi P(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$, ta có :

$$\begin{cases} IO^2 = IA^2 \\ IA^2 = IB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (2-y)^2 \\ x^2 + (2-y)^2 = (\sqrt{3}+x)^2 + (1+y)^2 \end{cases}$$

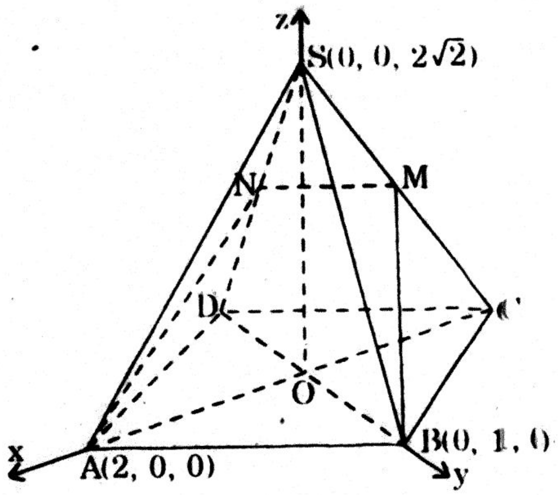
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4y = 0 \\ 4 - 4y = 3 + 2\sqrt{3}x + 1 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $P(-\sqrt{3}, 1)$.

b) 1. Ta có :

$C(-2, 0, 0)$; $D(0, -1, 0)$;

$M(-1, 0, \sqrt{2})$



và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{SA} = (2, 0, -2\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{BM} = (-1, -1, \sqrt{2}) \end{cases}$

Khi đó :

\+ $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{SA}|.|\overrightarrow{BM}|}$ (với α là góc giữa SA và BM)

$$= \frac{6}{\sqrt{12}.\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$$

\+ $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}, 0, -2)$

$$\Rightarrow d(SA, BM) = \frac{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}].\overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}]|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

2. Ta có : MN // DC $\Rightarrow$ N là trung điểm của đoạn SD

$$\Rightarrow N\left(0, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right).$$

Cùng với giả thiết đề bài ta tính được :

$\overrightarrow{SA} = (2, 0, -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SM} = (-1, 0, -\sqrt{2})$

$\overrightarrow{SB} = (0, 1, -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SN} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{S.AMN} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SN}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ V_{S.ABM} = \dfrac{1}{6}\left|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SB}\right| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_{S.ABMN} = V_{S.AMN} + V_{S.ABM} = \sqrt{2}.$$

Bài 4

a) Đặt $t = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow t - 1 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (t-1)^2 = x - 1$

$$\Rightarrow x = (t-1)^2 + 1 \Rightarrow dx = 2(t-1)dt$$

$$I = 2\int_1^2 \frac{1}{t}(t-1)[(t-1)^2 + 1]dt = 2\int_1^2 \left(t^2 - 3t + 4 - \frac{2}{t}\right)dt$$

$$= 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 4t - 2\ln t\right]_1^2 = \frac{11}{3} - 4\ln 2$$

b) Ta có :

$$[1 + x^2(1-x)]^8$$

$$= C_8^0 + C_8^1 x^2(1-x) + C_8^2 x^4(1-x)^2 + C_8^3 x^6(1-x)^3 + C_8^4 x^8(1-x)^4 +$$

$$+ C_8^5 x^{10}(1-x)^5 + C_8^6 x^{12}(1-x)^6 + C_8^7 x^{14}(1-x)^7 + C_8^8 x^{16}(1-x)^8$$

Bậc (cao nhất) của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8 và bậc (nhỏ nhất) của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8. Vậy x^8 chỉ có trong các số hạng thứ tư, năm, với hệ số tương ứng là $C_8^3 . C_3^2$, $C_8^4 . C_4^0$

Suy ra hệ số của x^8 cần tìm là $C_8^3 . C_3^2 + C_8^4 . C_4^0 = 238$.

Bài 5

Ta có : $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C$

$$= 2\cos^2 A - 1 + 2\sqrt{2}(\cos B + \cos C)$$

$$= 2\cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2}\cos\frac{B-C}{2}.\sin\frac{A}{2}$$

$$\le 2\cos A - 1 + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2}$$

(Vì ΔABC không tù $\Rightarrow 0 \le \cos A < 1 \Rightarrow \cos^2 A \le \cos A$)

$$\le 2\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 4\sqrt{2}\sin\frac{A}{2} - 1 \le -4\left(\sin\frac{A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \le 3$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C \le 3$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$

Vậy : $\begin{cases} \Delta ABC \text{ không tù} \\ \cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^0 \\ B = C = 45^0 \end{cases}$

ĐỀ 2

Đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng, khối B

***Bài 1** (2 điểm)*

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1)

có đồ thị (C).

a) Khảo sát hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

***Bài 2** (2 điểm)*

a) Giải phương trình : $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\mathrm{tg}^2 x$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên $[1, e^3]$.

***Bài 3** (3 điểm)*

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm A(1, 1), B(4, –3).

Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

b) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ $(0^0 < \varphi < 90^0)$.

Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

c) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm A(–4, –2, 4)

và đường thẳng d : $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Bài 4 *(2 điểm)*

a) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + 3\ln x}}{x}.\ln x\,dx$

b) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ?

Bài 5 *(1 điểm)*

Xác định m để phương trình sau có nghiệm :

$$m(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2} + 2) = 2\sqrt{1 - x^4} + \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

+ D = R

+ $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

+ $y'' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

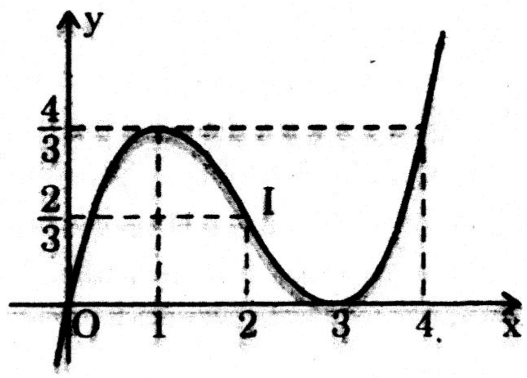
+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	$+\infty$

+ Bảng lồi lõm :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y''		−	0	+	
(C)		lồi	Điểm uốn $I\left(2, \frac{2}{3}\right)$	lõm	

+ Đồ thị :



b) • (C) có điểm uốn $I\left(2, \frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) tại $I\left(2, \frac{2}{3}\right)$ là :

$$y - \frac{2}{3} = y'(2)(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{2}{3} = -1.(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -x + \frac{8}{3}$$

• (Δ) có hệ số góc là $k_\Delta = -1$

Gọi (d) là tiếp tuyến tùy ý của (C) tại $M(x_0, y_0)$, ta có :

$$k_d = y'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3 = (x_0 - 2)^2 - 1 \geq -1, \ \forall x_0$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $x_0 = 2$ $\left(\Rightarrow \ y_0 = \frac{2}{3}\right)$

Vậy : $k_d \geq k_\Delta$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $M \equiv I$.

Bài 2

a) Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$$VP = 3(1 - \sin x).\frac{\sin^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{3\sin^2 x}{1 + \sin x}$$

$$PT \Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x + 5\sin^2 x - 2 - 2\sin x = 3\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

b) $y = \frac{\ln^2 x}{x}, x \in [1, e^3]$

$$y' = \frac{2.\frac{1}{x}\ln x.x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = e^2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên :

x	1		e^2		e^3
y'	0	+	0	–	
y	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{9}{e^3}$

Vậy : $\underset{[1, e^3]}{\text{Max}}\, y = \frac{4}{e^2}$, $\underset{[1, e^3]}{\text{Min}}\, y = 0$.

Bài 3

a) • $\left\{\begin{array}{l} A(1, 1) \\ B(4, -3) \end{array}\right. \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là : $4x + 3y - 7 = 0$

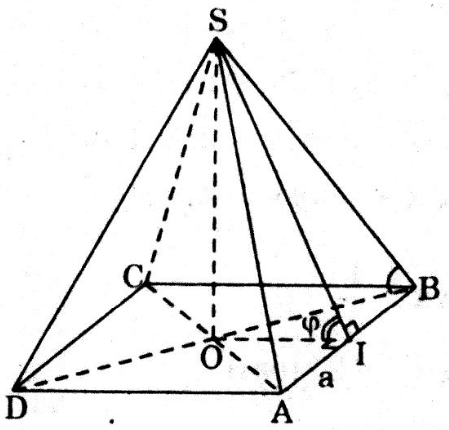
Gọi $C(2t + 1, t)$ là điểm cần tìm. Khi đó :

$$d(C, AB) = \frac{|11t - 3|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11t - 3| = 30$$

$$\Leftrightarrow 11t - 3 = \pm 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{27}{11} \end{array}\right.$$

Vậy : $C \in \left\{(7, 3), \left(-\frac{43}{11}, -\frac{27}{11}\right)\right\}$.

b)



Gọi O là tâm của mặt đáy ABCD và I là trung điểm cạnh AB. Khi đó:

$$\widehat{((SAB),(ABCD))} = \widehat{SIO}$$

Hơn nữa : $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\text{tg}\varphi$

Do đó : $\text{tg}\widehat{((SAB),(ABCD))} = \text{tg}\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\text{tg}\varphi}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}\text{tg}\varphi$

và $\quad V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\text{tg}\varphi.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\text{tg}\varphi.$

c) Giả sử (Δ) cắt, vuông góc với (d) tại B.

Để ý : $B \in (d) \quad \Rightarrow \quad B(2t-3), 1-t, 4t-1)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (2t+1, 3-t, 4t-5)$

Khi đó : $AB \perp (d) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{a_d} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4t + 2 - 3 + t + 16t - 20 = 0$

(trong đó : $\overrightarrow{a_d} = (2, -1, 4)$ là vectơ chỉ phương của (d))

$\Leftrightarrow \quad 21t - 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (3, 2, -1)$

Phương trình chính tắc của (Δ) là :

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

Bài 4

a) Đặt : $t = \sqrt{1 + 3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\ln x \Rightarrow \begin{cases} 2t\,dt = \dfrac{3dx}{x} \\ \ln x = \dfrac{t^2 - 1}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 t \cdot \frac{t^2 - 1}{3} \cdot \frac{2t}{3}\,dt = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4 - t^2)\,dt = \frac{2}{9}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{9}\left[\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{9}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{116}{135}.$$

b) Chọn đề gồm 5 câu hỏi thỏa yêu cầu bài toán có các trường hợp sau :

+ 2 câu dễ + 1 câu khó + 2 câu trung bình có :

$C_{15}^2 . C_5^1 . C_{10}^2$ cách chọn

+ 2 câu dễ + 2 câu khó + 1 câu trung bình có :

$C_{15}^2 . C_5^2 . C_{10}^1$ cách chọn

+ 3 câu dễ + 1 câu khó + 1 câu trung bình có :

$C_{15}^3 . C_5^1 . C_{10}^1$ cách chọn .

Vậy có : $C_{15}^2 . C_5^1 . C_{10}^2 + C_{15}^2 . C_5^2 . C_{10}^1 + C_{15}^3 . C_5^1 . C_{10}^1 = 56.875$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 5

Đặt : $t = \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ $(|x| \le 1)$

$$t' = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^4}} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$

Bảng biến thiên của t :

x	−1		0		1
t'		−	0	+	
t	$\sqrt{2}$	↘	0	↗	$\sqrt{2}$

Để ý $t^2 = 2 - 2\sqrt{1 - x^4} \Rightarrow 2\sqrt{1 - x^4} = 2 - t^2$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow \quad m(t + 2) = 2 - t^2 + t$ có nghiệm $\in [0, \sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow \quad m = \dfrac{-t^2 + t + 2}{t + 2}$ có nghiệm $\in [0, \sqrt{2}]$

Xét $f(t) = \dfrac{-t^2 + t + 2}{t + 2}, \quad t \in [0, \sqrt{2}]$

$f'(t) = \dfrac{-t^2 - 4t}{(t + 2)^2} \le 0, \quad \forall t \in [0, \sqrt{2}]$

Bảng biến thiên của f :

t	0		$\sqrt{2}$
f'	0	$-$	
f	1	$\searrow$	$\sqrt{2} - 1$

Vậy : $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$ là kết quả cần tìm.

ĐỀ 8

Đề thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng, khối D

***Bài 1** (2 điểm)*

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1

với m là tham số.

a) Khảo sát hàm số (1) khi m = 2.

b) Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng $y = x + 1$.

***Bài 2** (2 điểm)*

a) Giải phương trình : $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

b) Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ (2)

có nghiệm.

***Bài 3** (3 điểm)*

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho ΔABC có các đỉnh $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, m)$ $(m \neq 0)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC theo m, xác định m để ΔGAB vuông tại G.

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.

Biết $A(a, 0, 0)$, $B(-a, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $B_1(-a, 0, b)$ $(a, b > 0)$.

1. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 theo a, b.
2. Cho a, b thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $a + b = 4$.

   Tìm a, b để khoảng cách giữa 2 đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất.

c) Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho 3 điểm $A(2, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$.

Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Bài 4

a) Tính tích phân : $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x)dx$.

b) Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$.

Bài 5

Chứng minh rằng phương trình sau có đúng 1 nghiệm :

$$x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

+ $D = R$

+ $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

+ $y'' = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

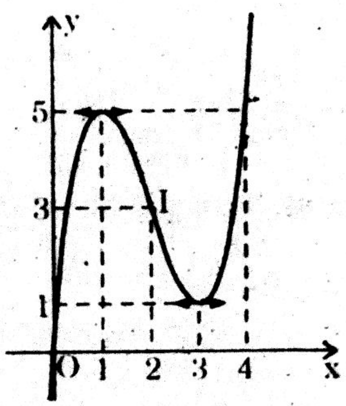
+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5 CĐ	↘	1 CT	↗	$+\infty$

+ Bảng lồi lõm :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y''		−	0	+	
(C)		lồi	I(2, 3) ĐU	lõm	

+ Đồ thị :



b) $y' = 3x^2 - 6mx + 9$

$y'' = 6x - 6m = 0 \Leftrightarrow x = m$

$\Rightarrow y = -2m^3 + 9m + 1$

$\Rightarrow$ Điểm uốn $I(m, -2m^3 + 9m + 1)$

Do đó $I \in$ đường thẳng $y = x + 1$

$\Leftrightarrow -2m^3 + 9m + 1 = m + 1$

$\Leftrightarrow 2m^3 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$

Bài 2

a) Phương trình $\Leftrightarrow$ $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = 2\sin x\cos x - \sin$

$$\Leftrightarrow \quad (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin(2\cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Hệ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 1 - 3m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{xy} = m \end{cases}$$

Do đó, hệ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 1 - 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \leq m \leq \dfrac{1}{4}.$

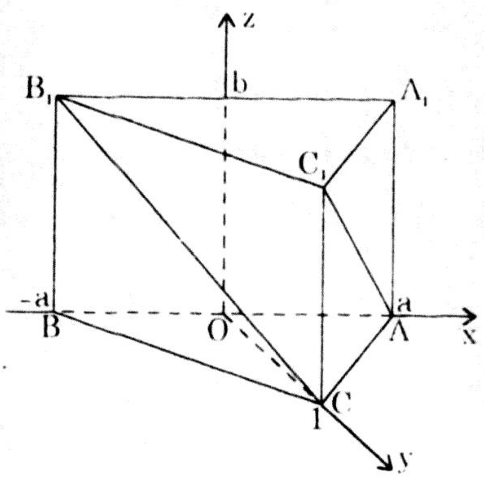
Bài 3

a) Ta có : $\begin{cases} G\left(1, \dfrac{m}{3}\right) \\ \vec{GA} = \left(-2, -\dfrac{m}{3}\right) \\ \vec{GB} = \left(3, -\dfrac{m}{3}\right) \end{cases}$

Do đó ΔGAB vuông tại G $\Leftrightarrow \quad \vec{GA}.\vec{GB} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 3\sqrt{6}.$$

b) 1.



Ta có $C_1(0, 1, b)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa B_1C và song song với AC_1

Ta có : $\overrightarrow{B_1C} = (a, 1, -b)$ và $\overrightarrow{C_1A} = (a, -1, -b)$

$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{C_1A}] = (-2b, 0, -2a)$

Phương trình của (α) là :

$$-2b(x - 0) + 0(y - 1) - 2a(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad bx + az = 0$$

$$\Rightarrow \quad d(B_1C, C_1A) = d(A, (\alpha)) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a + b}{2} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = b = 2$

Vậy : Maxd $= \sqrt{2}$ (tại $a = b = 2$).

c) Gọi $I(x, y, z)$ là tâm mặt cầu cần tìm.

Ta có : $\begin{cases} IA^2 = IB^2 = IC^2 \\ I \in (P) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \\ (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 4 \\ 2x - 2y = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad I(1, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad R = IB = 1$

Phương trình mặt cầu : $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1.$

Bài 4

a) Đặt : $\begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x}dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I = \left[x\ln(x^2 - x)\right]\Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x - 1}{x - 1}dx$$

$$= 3\ln 6 - 2\ln 2 - \left[2x + \ln(x - 1)\right]\Big|_2^3$$

$$= \ln 54 - 6 - \ln 2 + 4$$

$$= \ln 27 - 2.$$

b) Ta có : $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum\limits_{k=0}^{7} C_7^k . x^{\frac{k}{3}} . x^{\frac{k-7}{4}} = \sum\limits_{k=0}^{7} C_7^k . x^{\frac{7k-21}{12}}$

$\Rightarrow$ Số hạng không chứa x ứng với

$$\frac{7k - 21}{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$$

$\Rightarrow$ Số hạng không chứa x là $C_7^3 = \dfrac{7!}{4!3!} = 35.$

Bài 5

Phương trình $\Leftrightarrow \quad x^5 = (x + 1)^2$ **(1)**

- Nếu $x \leq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $0 < x < 1$ thì $\begin{cases} VT(1) < 1 \\ VP(1) > 1 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $x \geq 1$:

Xét $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 2$

$$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2 = 2x(x^3 - 1) + 2(x^4 - 1) + x^4 > 0, \ \forall x \geq 1$$

Bảng biến thiên :

x	1		$+\infty$
f'		+	
f	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Như vậy phương trình f(x) = 0 có một nghiệm duy nhất.

ĐỀ 1

Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Công nghiệp 4, TP.HCM

***Bài 1** (2 điểm)*

Cho hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), đường tiệm cận xiên của (C) và hai đường thẳng $x = 2$, $x = m$ ($m > 2$). Tìm m để diện tích bằng 3.

***Bài 2** (2 điểm)*

a) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + 3\cos x}\,dx$.

b) Tìm số nguyên dương n biết rằng : $16.7 \cdot P_n = 2004 \cdot P_{n-5}$.

***Bài 3** (2 điểm)*

a) Giải phương trình : $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x - 2.\cos 3x = 0$

b) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = 2 & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

***Bài 4** (3 điểm)*

Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(2, 3, 0)$, $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ và đường thẳng (Δ) có phương trình : $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Viết phương trình của mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với (Δ).

b) Tìm tọa độ giao điểm H của (α) với (Δ). Từ đó tính khoảng cách từ A đến (Δ).

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc (Δ) sao cho tổng độ dài MA + MB ngắn nhất.

***Bài 5** (1 điểm)*

Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC vuông tại A với $B(-3, 0)$, $C(7, 0)$, bán kính đường tròn nội tiếp $r = 2\sqrt{10} - 5$.

Tìm tọa độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC, biết điểm I có tung độ dương.

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{x - 1} = -x + 3 - \dfrac{1}{x - 1}$

+ $D = R\setminus\{1\}$

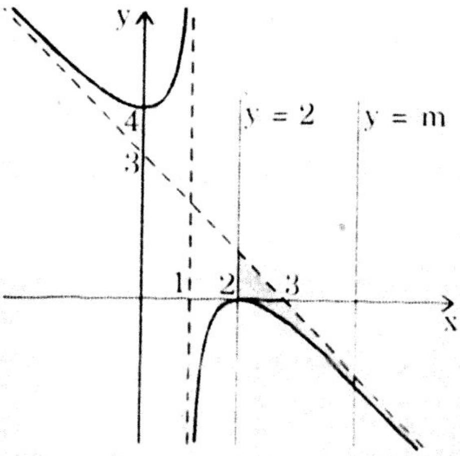
+ $y' = -1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−	0	+	‖	+	0	−	
y	$+\infty$ ↘		4 (CT)	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0 (CĐ)	↘	$-\infty$

- Tiệm cận xiên $y = -x + 3$ và tiệm cận đứng $x = 1$.

- Đồ thị :



b) + Diện tích hình phẳng :

$$S = \int_2^m \left[(-x+3) - \left(-x + 3 - \frac{1}{x-1}\right)\right]dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^m = \ln(m-1)$$

+ $S = 3 \Leftrightarrow m - 1 = e^3 \Leftrightarrow m = 1 + e^3$.

Bài 2

a) $I = -\dfrac{1}{3}\Big[\ln|1 + 3\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1}{3}(\ln 1 - \ln 4) = \dfrac{1}{3}\ln 4$.

b) Ta có : $16{,}7 \times P_n = 2004 \times P_{n-5}$ (với $n \geq 5$)

$\Leftrightarrow \quad 16{,}7.n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 2004$

$\Leftrightarrow \quad n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 120$

$\Leftrightarrow \quad n = 5$ (vì nếu $n > 5$ thì $VT > 5.4.3.2.1 = 120$).

Bài 3

a) Phương trình $\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\sin 4x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{6} = 3x + k2\pi \\ 4x - \dfrac{\pi}{6} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

b) Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có thể xem (1) là phương trình đường thẳng (D) và (2) là phương trình đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 2$.

Khi đó hệ phương trình (1) và (2) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (D) và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow \quad d(O, \Delta) \leq R = 2$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq m^2 + (m+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 + 2m \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$$

Bài 4

a) Đặt $x = t$. Khi đó :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = 2 - t \\ z - y = 2 - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\alpha = \vec{a}_d = (1, 0, -1)$$

Phương trình mặt phẳng (α) là :

$$1(x - 2) + 0(y - 3) + (-1)(z - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z - 2 = 0$$

b) + Tọa độ giao điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad H(2, 0, 0).$$

+ $d(A, (\Delta)) = AH = \sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} = 3.$

c) $M \in (\Delta) \quad \Leftrightarrow \quad M\left(\dfrac{1}{2}, 0, 2 - t\right)$

$$\Rightarrow \quad MA + MB = \sqrt{(t-2)^2 + 9 + (t-2)^2} + \sqrt{t^2 + 2 + (t-2)^2}$$

$$= \sqrt{2(t-2)^2 + 9} + \sqrt{2(t-1)^2 + 4}$$

$$= |\vec{u}| + |\vec{v}| \quad \left(\text{trong đó } \begin{cases} \vec{u} = (\sqrt{2}(t-2), 3, 0) \\ \vec{v} = (\sqrt{2}(1-t), 2, 0) \end{cases}\right)$$

$$\geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2 + 25} = 3\sqrt{3}$$

Dấu "=" $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{7}{5}$

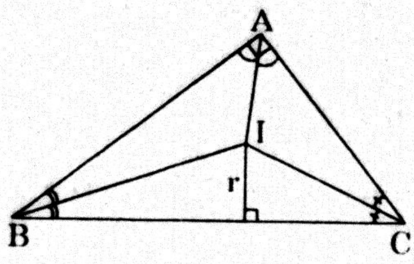
Vậy : $\quad \text{Min}(MA + MB) = 3\sqrt{3} \left(\text{tại } M\left(\dfrac{7}{5}, 0, \dfrac{3}{5}\right)\right).$

Bài 5

Ta có : $\widehat{BIC} = 135^0$

Gọi I(x, y) thì $\quad y = r = 2\sqrt{10} - 5.$

Hơn nữa :



• $\overrightarrow{BI} = (x + 3, y)$, $\overrightarrow{CI} = (x - 7, y)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = (x + 3)(x - 7) + y^2 = x^2 - 4x - 21 + (2\sqrt{10} - 5)^2$$

- $S_{IBC} = \frac{1}{2}r.BC = \frac{1}{2}(2\sqrt{10} - 5).10 = \frac{1}{2}IB.IC\sin 135^0$

$= -\frac{1}{2}IB.IC\cos 135^0 = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = 10(5 - 2\sqrt{10})$

Do đó : $10(5 - 2\sqrt{10}) = x^2 - 4x - 21 + (2\sqrt{10} - 5)^2$

$\Leftrightarrow \quad (2\sqrt{10} - 5)(2\sqrt{10} - 5 + 10) + x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{10} \\ x = 2 - \sqrt{10} \end{array}\right.$

Vậy : $I(2 \pm \sqrt{10}, 2\sqrt{10} - 5)$.

ĐỀ 5

Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại, TP.HCM

Bài 1

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2$.

Bài 2

a) Giải phương trình : $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0 \end{cases}$

Bài 3

a) Giải phương trình : $4\sin x^2 - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin x - \sqrt{6} = 0$

b) Tính tích phân : $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$.

Bài 4

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho ΔABC có $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 5)$. Gọi K là trung điểm của AC.

a) Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với BK.

b) Tính diện tích ΔABK.

Bài 5

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$.

a) Viết phương trình đường tròn (C) qua ba điểm A, B, O.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến này đi qua điểm $M(4, 7)$.

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 3$

+ $D = R$

+ $y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

+ $y'' = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

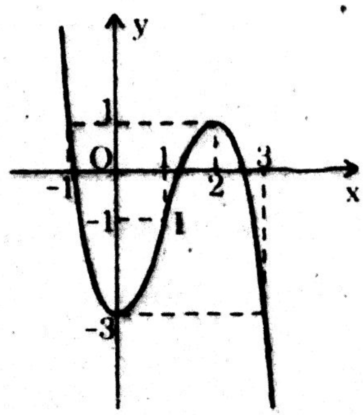
+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

+ Bảng lồi lõm :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		+	0	$-$	
(C)		lõm	Điểm uốn $I(1, -1)$	lồi	

+ Đồ thị : (hình bên)



b) Gọi $M(x_0, y_0) \in (C)$ là tiếp điểm. Ta có :

$$k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0$$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$y = \frac{1}{9}x + 2$, nên :

$$k = -3x_0^2 + 6x_0 = -9$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến là :

$$y - 1 = -9(x + 1) \quad \text{và} \quad y + 3 = -9(x - 3).$$

Bài 2

a) Điều kiện $x \leq \frac{1}{2}$.

Đặt : $\begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} \\ v = \sqrt{\frac{1}{2} - x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 = \frac{1}{2} + x \\ v^2 = \frac{1}{2} - x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^2 = 1 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u^3 + (1 - u^2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u^3 + u^2 - 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (u, v) \in \{(0, 1), (1, 0), (-2, 3)\}$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{2}\right\}$$

Thử lại ta nhận $x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{2}\right\}$.

b) Hệ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y \\ 14y^2 + 6y - 9 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ 20y^2 + 12y - 27 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) = \left\{\left(-3, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{10}\right), \left(\frac{-9+9\sqrt{15}}{14}, \frac{-3+3\sqrt{15}}{14}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{-9-9\sqrt{15}}{14}, \frac{-3-3\sqrt{15}}{14}\right)\right\}.$$

Bài 3

a) Ta có : $\Delta' = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + 4\sqrt{6} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

Do đó : $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

b) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$. Đặt : $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad I = \left[-\frac{1}{2x^2}\ln x\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{2x^3} = -\frac{1}{8}\ln 2 - \left[\frac{1}{4x^2}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{8}\ln 2 - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} - \frac{1}{8}\ln 2.$$

Bài 4

a) Ta có : $\begin{cases} K(2, 2) \\ \overrightarrow{BK} = (4, 1) = (a_1, a_2) \end{cases}$

Phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với BK là :

$$4(x - 1) + 1(y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + y - 3 = 0.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{BA} = (3, -2) = (b_1, b_2)$

Khi đó : $S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}|-8-3| = \frac{11}{2}$ (đvdt).

Bài 5

a) ΔOAB vuông tại O $\Rightarrow$ (C) có tâm I(−1, 2) (trung điểm cạnh AB) và bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}$.

Phương trình của (C) là :

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0.$$

b) Vì x = 4 không phải là tiếp tuyến, nên phương trình tiếp tuyến qua M(4, 7) có dạng :

$$y = k(x-4) + 7 \quad \Leftrightarrow \quad kx - y + (7 - 4k) = 0 \quad (d)$$

Do đó (d) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ d(I, (d)) = R

$$\Leftrightarrow \frac{|-k-2+(7-4k)|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|-5k+5|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(k-1)^2 = k^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4k^2 - 10k + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Có hai tiếp tuyến với (C) qua M là :

$$2x - y - 1 = 0 \quad \text{và} \quad x - 2y + 10 = 0.$$

2. CÁC ĐỀ THI TỐT NGHIỆP PHỔ THÔNG TRUNG HỌC NĂM HỌC 2003 – 2004 VÀ NĂM HỌC 2002 – 2003

ĐỀ 1

Đề thi tốt nghiệp Phổ thông Trung học

năm học 2003 – 2004

Bài 1 *(4 điểm)*

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát hàm số.

b) Viết các phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(3, 0).

c) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo ra do hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường y = 0, x = 0, x = 3 quay quanh trục Ox.

***Bài 2** (1 điểm)*

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số :

$$y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin x^3 \quad \text{trên đoạn } [0, \pi].$$

***Bài 3** (1,5 điểm)*

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2.

a) Cho điểm M(3, m) thuộc (E), hãy viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi m > 0.

b) Cho A và B là hai điểm thuộc E sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Hãy tính $AF_2 + BF_1$.

***Bài 4** (2,5 điểm)*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(1, −1, 2), B(1, 3, 2), C(4, 3, 2), D(4, −1, 2).

a) Chứng minh A, B, C, D là bốn điểm đồng phẳng.

b) Gọi A' là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng Oxy. Hãy viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A', B, C, D.

c) Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu (S) tại điểm A'.

***Bài 5** (1 điểm)*

Giải bất phương trình (với hai ẩn n, k $\in$ N)

$$\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \le 60.A_{n+3}^{k+2}.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) + D = R

$$+ \quad y' = x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

+ $y'' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

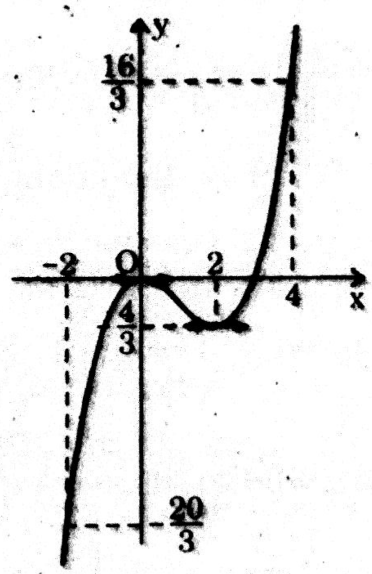
+ **Bảng biến thiên :**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0 CĐ	↘	$-\frac{4}{3}$ CT	↗	$+\infty$

+ **Bảng lồi lõm :**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		−	0	+	
(C)		lồi	$I\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ ĐU	lõm	

+ **Đồ thị :**



b) Ta có x = 3 không phải là tiếp tuyến của (C), nên phương trình tiếp tuyến của (C) qua A(3, 0) có dạng

$$y = k(x - 3) \quad (D).$$

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 = k(x - 3) \\ x^2 - 2x = k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 = k(x-3) \\ k = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x^2 = (x^2 - 2x)(x-3) \\ k = x^2 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)^2 = 0 \\ k = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ k = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ k = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến qua A(3, 0) là : $y = 0$ và $y = 3(x-3)$.

c) Thể tích cần tìm :

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^5 \right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{63} - \frac{x^6}{9} + \frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \pi . 3^5 \left(\frac{9}{63} - \frac{3}{9} + \frac{1}{5} \right) = \frac{81\pi}{35} \text{ (đvtt).}$$

Bài 2

Đặt $t = \sin x$, $x \in [0, \pi]$

$t \in [0, 1]$

Khi đó : $y = 2t - \frac{4}{3}t^3$

$$y' = 2 - 4t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	$+\infty$
y'	–	0	+	+	0	–		–
y			0	↗	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	↘	$\frac{2}{3}$	

Vậy : $\text{Max}y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{Min}y = 0$.

Bài 3

a) $M(3, m) \in (E) \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \frac{m^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{16} = \frac{16}{25}$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{16}{5} \quad \text{(vì } m > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(3, \frac{16}{5}\right).$$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến với (E) tại M là :

$$\frac{x_M \cdot x}{25} + \frac{y_M \cdot y}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 5y - 25 = 0.$$

b) Ta có :

$$+\begin{array}{l} AF_1 + AF_2 = 2a = 10 \\ BF_1 + BF_2 = 2a = 10 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(AF_1 + BF_2)}_{8} + (AF_2 + BF_1) = 20$$

$$\Rightarrow \quad AF_2 + BF_1 = 12$$

Bài 4

a) *Cách 1* :

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 4, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 4, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0, 0, -12)$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD} = 0$$

$\Rightarrow$ A, B, C, D đồng phẳng.

Cách 2 :

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 4, 0) \\ \overrightarrow{CD} = (0, -4, 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow$ A, B, C, D đồng phẳng.

b) A' là hình chiếu vuông góc của A trên Oxy, nên A'(1, −1, 0).

Cách 1 :

Gọi I(x, y, z) là tâm của mặt cầu (S).

Ta có : $\begin{cases} IA' = IB \\ IB = IC \\ IC = ID \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - 5 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{5}{2}, 1, 1\right)$$

$\Rightarrow$ Bán kính của (S) là $R = IA'$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + (-1-1)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

Do đó phương trình mặt cầu (S) là :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{29}{4}.$$

Cách 2 :

Dạng phương trình của mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$A', B, C, D \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 2b + d + 2 = 0 \\ -2a - 6b - 4c + d + 14 = 0 \\ -8a - 6b - 4c + d + 29 = 0 \\ -8a + 2b - 4c + d + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = c = d = 1 \end{cases}$$

Phương trình mặt cầu (S) là :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 2y - 2z + 1 = 0.$$

c) *Cách 1* :

Phương trình tiếp diện (α) của (S) tại A' là :

$$\left(x_{A'} - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + (y_{A'} - 1)(y - 1) + (z_{A'} - 1)(z - 1) = \frac{29}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + (-1 - 1)(y - 1) + (-1)(z - 1) = \frac{29}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) - 2(y - 1) + 1 - z = \frac{29}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y + 2z + 1 = 0.$$

Cách 2 :

Vectơ pháp tuyến của (α) là :

$$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{IA'} = \left(-\frac{3}{2}, -2, -1\right) = -\frac{1}{2}(3, 4, 2)$$

Phương trình tiếp diện (α) là :

$$3(x - 1) + 4(y + 1) + 2(z - 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + 4y + 2z + 1 = 0.$$

Bài 5

Điều kiện : $\begin{cases} n, k \in N \\ n \geq k \end{cases}$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \quad \frac{(n+5)!}{(n-k)!} \leq 60\frac{(n+3)!}{(n+1-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+4)(n+5)(n+1-k) \leq 60$$

Ta xét các trường hợp sau :

- Nếu $n \geq 4$ thì :

$$VT \geq 8.9.1 = 72 > VP$$

- Nếu $n = 3$ thì :

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \quad 7.8.(4 - k) \leq 60 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - k \leq \frac{15}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 - \frac{15}{4} \leq k \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad k = 3.$$

* Nếu n = 2 thì :

BPT $\Leftrightarrow$ $6.7.(3-k) \le 60$ $\Leftrightarrow$ $3-k \le \frac{10}{7}$

$\Leftrightarrow$ $3-\frac{10}{7} \le k \le 2$ $\Leftrightarrow$ $k = 2$.

* Nếu n = 1 thì :

BPT $\Leftrightarrow$ $5.6.(2-k) \le 60$ $\Leftrightarrow$ $2-k \le 2$

$\Leftrightarrow$ $0 \le k \le 1$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right.$

* Nếu n = 0 thì

BPT $\Leftrightarrow$ $4.5.(1-k) \le 60$ $\Leftrightarrow$ $1-k \le 3$

$\Leftrightarrow$ $-2 \le k \le 0$ $\Leftrightarrow$ $k = 0$

Vậy nghiệm của BPT là :

$$\begin{cases} n=0 \\ k=0 \end{cases}, \begin{cases} n=1 \\ k=0 \end{cases}, \begin{cases} n=1 \\ k=1 \end{cases}, \begin{cases} n=2 \\ k=2 \end{cases}, \begin{cases} n=3 \\ k=3 \end{cases}.$$

ĐỀ 2

Đề thi tốt nghiệp Phổ thông Trung học năm học 2002 - 2003

***Bài 1** (3 điểm)*

a) Khảo sát hàm số $y = \dfrac{-x^2+4x-5}{x-2}$.

b) Xác định m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2-(m-4)x+m^2-4m-5}{x+m-2}$

có các tiệm cận trùng với các tiệm cận tương ứng của đồ thị hàm số khảo sát trên.

***Bài 2** (2 điểm)*

a) Tìm nguyên hàm F(x) của hàm số $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}$, biết rằng $F(1) = \dfrac{1}{3}$.

b) Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số :

$$y = \frac{2x^2 - 10x - 12}{x + 2} \text{ và đường thẳng } y = 0.$$

Bài 3 *(1,5 điểm)*

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E) có khoảng giữa các đường chuẩn là 36 và các bán kính qua tiêu của điểm M nằm trên elip (E) là 9 và 15.

a) Viết phương trình chính tắc của elip (E).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của elip (E) tại điểm M.

Bài 4 *(2,5 điểm)*

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A, B, C, D có tọa độ xác định bởi các hệ thức :

$$A(2, 4, -1), \quad \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \quad C(2, 4, 3), \quad \overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

a) Chứng minh rằng : $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$. Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b) Viết phương trình tham số của đường vuông góc chung (Δ) của hai đường thẳng AB và CD. Tính góc giữa đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (ABD).

c) Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Viết phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu (S) song song với mặt phẳng (ABD).

Bài 5 *(1 điểm)*

Giải hệ phương trình : $C_{x+1}^{y} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y-1} = 6 : 5 : 2$.

Hướng dẫn giải

Bài 1

a) $y = \dfrac{-x^2 + 4x - 5}{x - 2} = -x + 2 - \dfrac{1}{x - 2}$

+ $D = R \setminus \{2\}$

+ $y' = -1 + \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

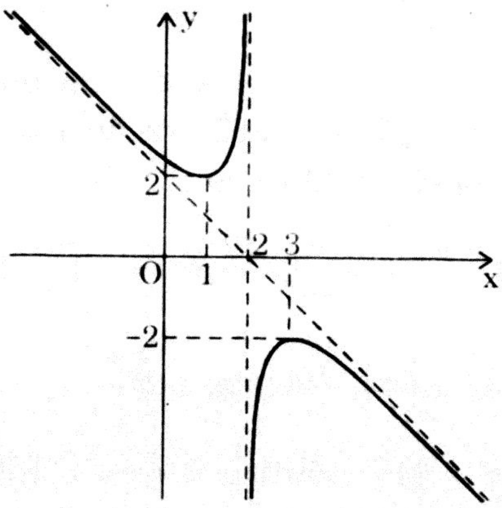
+ Các tiệm cận : Xiên $y = -x + 2$

Đứng $x = 2$

+ Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	2 CT	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	-2 CĐ	↘	$-\infty$

+ Đồ thị :



b) Ta có :

$$y = \frac{-x^2 - (m-4) + m^2 - 4m - 5}{x + m - 2} = -x + 2 + \frac{m^2 - 6m - 1}{x + m - 2}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = -2 \\ m^2 - 6m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Bài 2

a) Ta có : $f(x) = \dfrac{(x+1)^3 - 2}{(x+1)^2} = x + 1 - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{2}{x+1} + C$

Vì $\quad F(1) = \dfrac{1}{2} + 1 + 1 + C = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = -2 - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{13}{6}$

Vậy : $\quad F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{13}{6}.$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9715012; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: LAN HƯƠNG
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ

Mã số: 1L – 75 ĐH 2005
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ty Phát triển Công nghệ và Truyền hình – TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 3/107/XB-QLXB, ngày 26/01/2005. Số trích ngang: 234 KHXB cấp ngày 20/12/2005. In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2006.