tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F $(F \neq B)$, AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK.

Lời giải

Gọi D' là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.

Ta có D' nằm trên đường tròn ngoại tiếp △BCD. Do tính đối xứng nên suy ra $\widehat{D'E} = \widehat{ED}$ suy ra $\widehat{ABI} = \widehat{D'BE} = \widehat{EBD} = \widehat{IBK}$

suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ (1) 1.0 đ

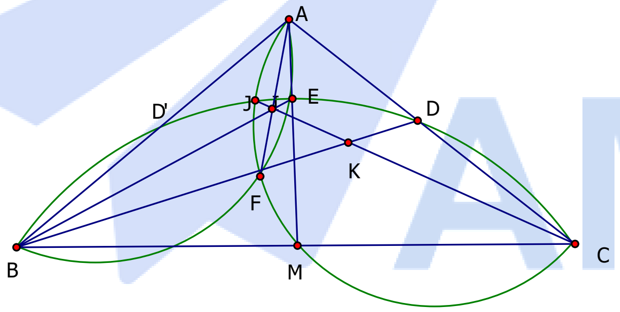
Ta có: $\widehat{DFA} = 180^o - \widehat{BFA} = 180^O - \widehat{BEA} = \widehat{MEB} = \frac{1}{2}\widehat{CEB} = \frac{1}{2}\widehat{CDB}$

=> $\widehat{DFA} = \widehat{DAF}$ **suy ra △AFD cân tại D. 1.0**

Do IA.IF = IE.IB nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này. 1,0

Ta có $\widehat{DCJ} = \widehat{DJC} = \widehat{DBC}$ **nên** $DA^2 = DC^2 = DK.DB$

Suy ra $\widehat{DAK} = \widehat{DBA}$ **hay** $\widehat{FAD} - \widehat{FAK} = \widehat{DFA} - \widehat{BAF}$**. Từ đó** $\widehat{FAK} = \widehat{BAF}$ **. Ta có (đpcm) 1.0**



Câu 37. (THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định – Chọn học sinh giỏi mở rộng 2013-2014 – Toán 11)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử AD cắt BC tại N, AB cắt CD tại M, AC cắt BD tại E. Đường thẳng IE cắt MN tại K. Chứng minh KO là phân giác của góc BKD.

Lời giải

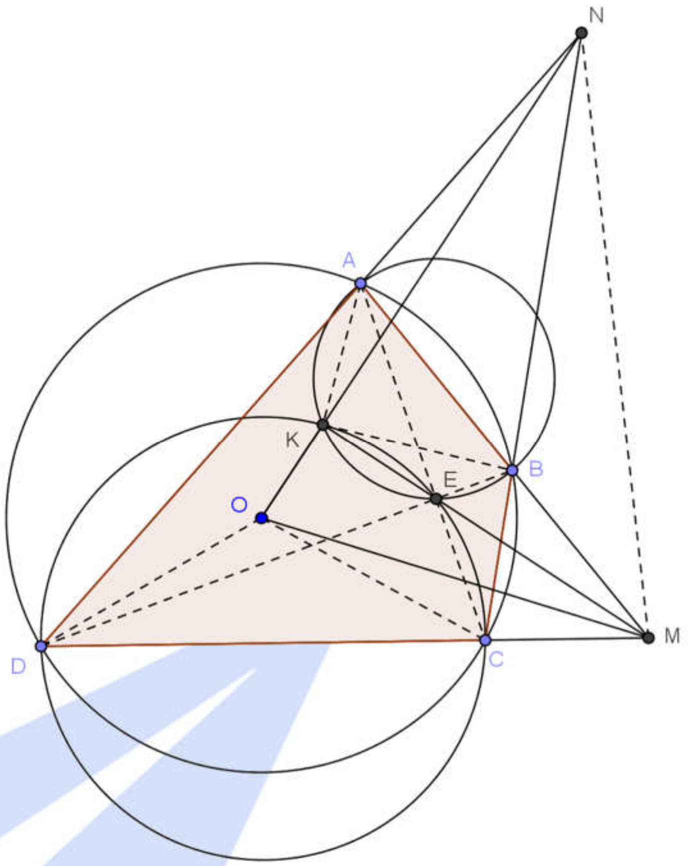
Trước hết có bổ đề (Định lý Brocard):

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có M, N lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh đối AB, CD và AD, BC. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó, ta có $EO \perp MN$.

Thật vậy, gọi K là giao điểm khác E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, CDE.

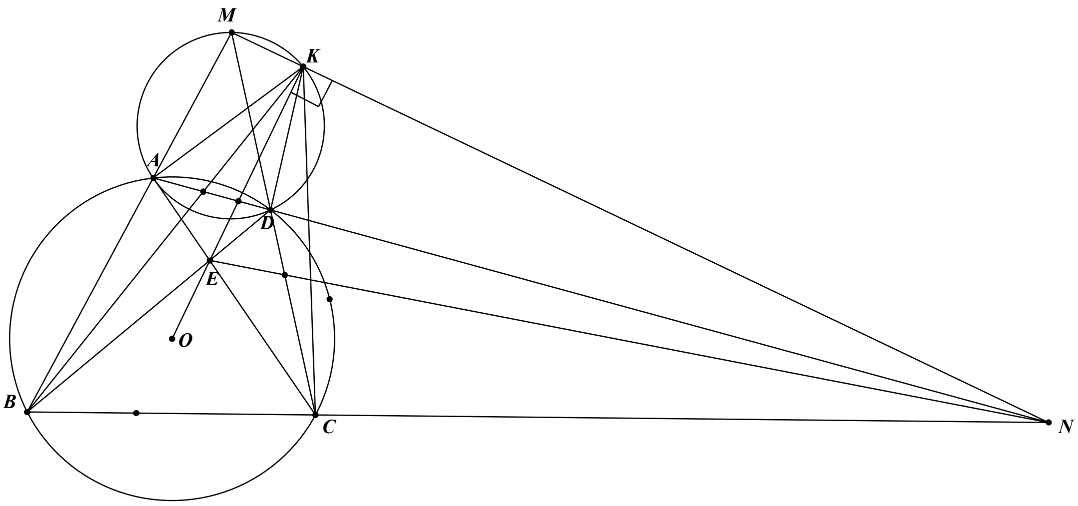
Trước hết, ta thấy rằng K, E, M cùng nằm trên trục đẳng phương của $(ABE), (CDE)$ nên chúng thẳng hàng.

Ta cũng có $\angle BKC = \angle BKE + \angle CKE = \angle EAB + \angle EDC = \angle BOC$ nên tứ giác $OKBC$ nội tiếp. Tương tự thì tứ giác $OKAD$ cũng nội tiếp. Suy ra K cũng chính là giao điểm thứ hai khác O của hai đường tròn $(OBC), (OAD)$ nên các điểm O, K, N cũng thẳng hàng vì cùng nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này.



Mặt khác, cũng bằng cách xét các góc nội tiếp trong các tứ giác nội tiếp, ta có
$\angle MKN = \angle MKB + \angle NKB = \angle EAB + \angle OCB = \angle EDC + \angle OBC = \angle EKC + \angle OKC = \angle MKO$**.**

Hơn nữa, đây là hai góc bù nhau nên mỗi góc bằng 90° **hay** $ME \perp ON$ **.**
Chứng minh tương tự, ta có $NE \perp OM$ **hay** E **là trực tâm của tam giác** OMN **và** $OE \perp MN$.
Định lí được chứng minh.
Giải bài toán như hình vẽ dưới
Theo định lý trên ta có $OK \perp MN$.



Chứng minh các tứ giác KDCN và MKCB nội tiếp
Thật vậy: Theo hệ thức quen thuộc

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = R^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM}\right)\left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN}\right) = R^2 \Rightarrow OK^2 - \overrightarrow{KM}\left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN}\right) = R^2$$

Suy ra $\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{MN} = OM^2 - R^2 = \mathrm{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}$, **hay tứ giác KDCN nội tiếp**

Tương tự ta có MKCB nội tiếp

Suy ra $\widehat{DKN} = \widehat{DCB} = \widehat{MCB} = \widehat{MKB}$

Suy ra điều phải chứng minh

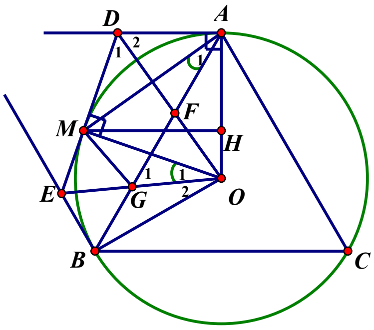
Câu 38. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên – Trại hè lần X – Toán 11)

Cho tam giác đều ABC **nội tiếp đường tròn** $(O;\, R)$. H **là một điểm di động trên đoạn** OA $(H \neq A)$. **Đường thẳng đi qua** H **và vuông góc với** OA **cắt cung nhỏ** AB **tại** M. **Gọi** K **là hình chiếu của** M **trên** OB.

a) Các tiếp tuyến của $(O;\, R)$ **tại** A **và** B **cắt tiếp tuyến tại** M **của** $(O;\, R)$ **lần lượt tại** D **và** E. OD, OE **cắt** AB **lần lượt tại** F **và** G. **Chứng minh** $OD.GF = OG.DE$

b) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB **theo** R.

Lời giải



Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)

$\widehat{A}_1 = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$; $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BM}$

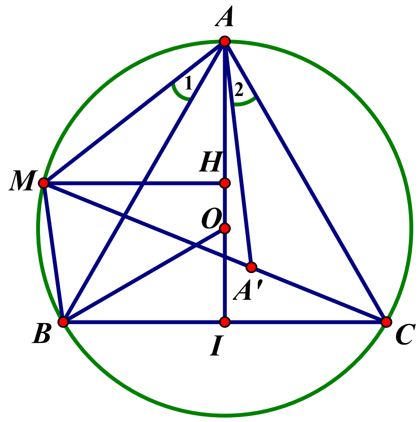
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{O}_1 \Rightarrow$ **tứ giác AMGO nội tiếp (5)**

Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{G}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{D}_1$

$\Rightarrow \Delta OGF$ **và** ΔODE **đồng dạng**

$\Rightarrow \dfrac{OG}{OD} = \dfrac{GF}{DE}$ **hay OD.GF = OG.DE.**



Trên đoạn MC lấy điểm A’ sao cho MA’ = MA $\Rightarrow \Delta AMA'$ **đều**

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}\left(= 60^0 - \widehat{BAA'}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta MAB = \Delta A'AC \Rightarrow MB = A'C$$

$$\Rightarrow MA + MB = MC$$

Chu vi tam giác MAB là $MA + MB + AB = MC + AB \le 2R + AB$

Đẳng thức xảy ra khi MC là đường kính của (O) => M là điểm chính giữa cung AM

=> H là trung điểm đoạn AO

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB

Gọi I là giao điểm của AO và BC $\Rightarrow AI = \dfrac{3}{2}R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = R\sqrt{3}$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là 2R + AB = $(2+\sqrt{3})R$

Câu 39. (Sở SDĐT Hòa Bình – THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Đề chọn học sinh giỏi Toán 11)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường tròn tâm I tiếp xúc với hai cạnh AC, BC lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại điểm P. Một đường thẳng song song với AB tiếp xúc với đường tròn tâm I tại điểm Q nằm trong tam giác ABC.

a. Gọi K, L lần lượt là giao điểm thứ hai của PE và PF với (O). Chứng minh rằng $KL//EF$.

b. Chứng minh rằng $\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$.

Lời giải

a) Gọi D là giao điểm thức hai của đường thẳng PC với đường tròn tâm I, và M là giao điểm thứ hai của đường tròn tâm O với PQ.

Xét phép vị tự V tâm P biến đường tròn tâm I thành đường tròn tâm O, ta có phép vị tự V biến E, Q, F lần lượt thành K, M, L.

Theo tính chất của phép vị tự ta có EF song song với KL.

Ta có OK là ảnh của IE qua V, dẫn đến $OK // IE$ mà $IE \perp AC \Rightarrow OK \perp AC$, suy ra K là điểm chính giữa của cung AC. Chứng minh tương tự ta có L là điểm chính giữa của cung BC, M là điểm chính giữa của cung AB.

b) Ta có

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{KA}$$

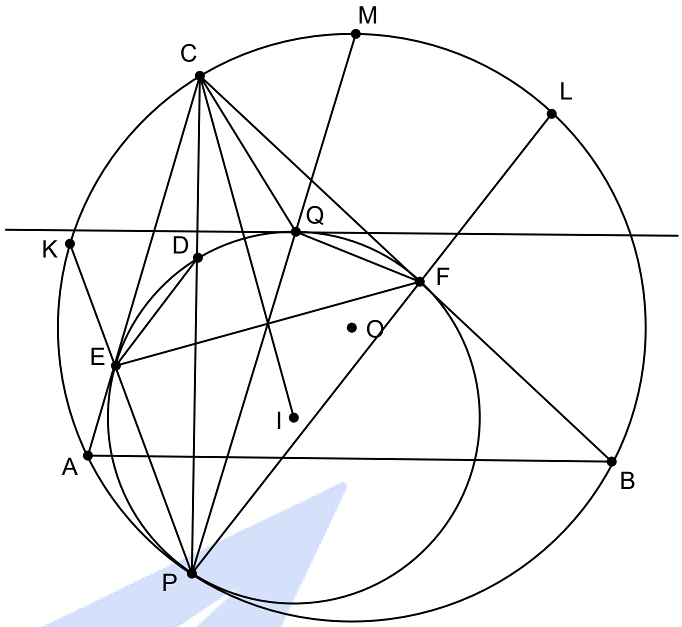
$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LC} + \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{LM} + \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MC} + 2\overset{\frown}{CK}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{CK}$$

$\Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{FQ}$ **(tính chất phép vị tự).**

$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{QFC}$ **(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung chắn hai cung bằng nhau) và DE = QF.**



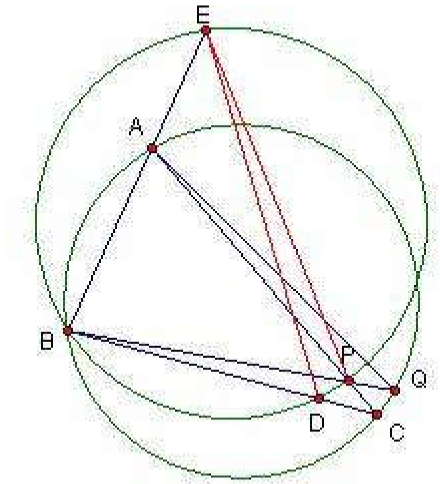
Lại có CE = CF theo tính chất của hai tiếp tuyến kẻ từ một điểm.

Suy ra $\Delta CED = \Delta CFQ$**, dẫn đến** $\widehat{ECD} = \widehat{FCQ}$**. Từ đó ta có điều phải chứng minh.**

Câu 40. (THPT Chuyên Hùng Vương Tỉnh Phú Thọ – Trại hè Hùng Vương lần X)

Tam giác ABC **vuông có** $BC > CA > AB$**. Gọi** D **là một điểm trên cạnh** BC**,** E **là một điểm trên cạnh** AB **kéo dài về phía** A **sao cho** $BD = BE = CA$**. Gọi** P **là một điểm trên cạnh** AC **sao cho** E**,** B**,** D**,** P **nằm trên một đường tròn.** Q **là giao điểm thứ hai của** BP **với đường tròn ngoại tiếp tam giác** ABC**. Chứng minh rằng:** $AQ + CQ = BP$.

Lời giải



Xét các tứ giác nội tiếp $ABCQ$ **và** $BEPD$ **ta có:**

$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$

(cùng chắn các cung tròn)

Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^0 - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$

Xét ΔAQC **và** ΔEPD **có:**

$\widehat{AQC} = \widehat{EPD},$

$\widehat{CAQ} = \widehat{DEP} \Rightarrow \Delta AQC \backsim \Delta EPD$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{EP} = \frac{CA}{ED} \Rightarrow AQ.ED = EP.CA = EP.BD \quad (1)$$

(do $AC = BD$**)**

$$\frac{AC}{ED} = \frac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD \quad (2)$$

(do $AC = BE$ **)**

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $BEPD$ **ta có:**

$EP.BD + BE.PD = ED.BP \quad (3)$

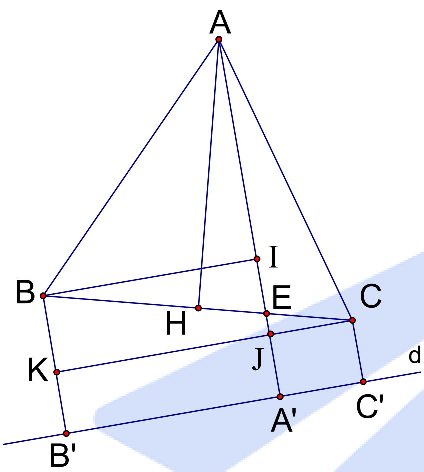
Từ(1), (2), (3) suy ra $AQ.ED + QC.ED = ED.BP \Rightarrow AQ + QC = BP$ **.■**

Câu 41. (Trường PT vùng cao Việt Bắc – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho tam giác ABC **đều cạnh** a **và một đường thẳng** d **tùy ý. Gọi** A'**,** B'**,** C' **lần lượt là hình chiếu của** A**,** B**,** C **trên** d**. Chứng minh rằng**

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

Lời giải



Gọi *E* là giao của *BC* và AA'**, *I, J* lần lượt là hình chiếu của *B, C* trên** AA'**, *K* là hình chiếu của *C* trên** BB'**.**

$$\Delta BIE \sim \Delta AHE \Rightarrow \frac{BI}{AH} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow BI = \frac{AH.BE}{AE}$$

$$\Delta CJE \sim \Delta AHE \Rightarrow \frac{CJ}{AH} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow CJ = \frac{AH.CE}{AE}$$

$$\Delta CKB \sim \Delta AHE \Rightarrow \frac{CK}{AH} = \frac{CB}{AE} \Rightarrow CK = \frac{AH.CB}{AE}$$

Mặt khác, ta có

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = CK^2 + CJ^2 + BI^2$$

$$= \frac{AH^2.BC^2}{AE^2} + \frac{AH^2.CE^2}{AE^2} + \frac{AH^2.BE^2}{AE^2} = \frac{AH^2}{AE^2}\left(BC^2 + CE^2 + BE^2\right)$$

$$= \frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2 + (CH - HE)^2 + (BH + HE)^2\right]$$

$$= \frac{AH^2}{AE^2}\left(BC^2 + 2BH^2 + 2HE^2\right) = \frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2 + 2BH^2 + 2\left(AE^2 - AH^2\right)\right]$$

$$= \frac{AH^2}{AE^2}\left[BC^2 + 2BH^2 + 2AE^2 - 2BC^2 + 2BH^2\right]$$

$$= 2AH^2 = \frac{3a^2}{2}$$