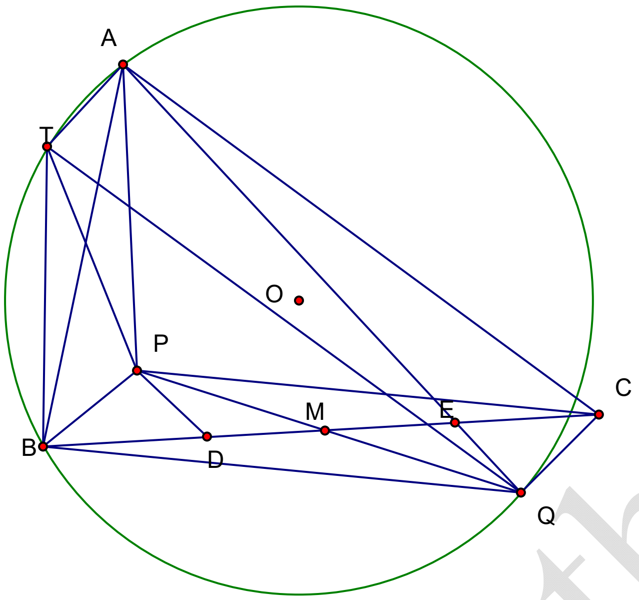
Tương tự, trục đẳng phương của (*HPP’*) và (*HMM’*), trục đẳng phương của (*HMM’*) và (*HNN’*) cũng là đường thẳng Euler của tam giác *ABC.*

Do đó ba đường tròn $(HMM'),(HNN'),(HPP')$ cùng đi qua một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác *ABC.* Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 60. (Đề đề nghị chọn HSG khu vực duyên hải đồng bằng Bắc Bộ 2015 – trường THPT chuyên Bắc Ninh) Cho ΔABC nhọn với $AB < AC$. Giả sử D và E là các điểm trên cạnh BC sao cho $BD = CE$ và D nằm giữa B và E. Giả sử P là điểm thuộc miền trong của ΔABC sao cho $PD // AE$ và $\widehat{PAB} = \widehat{EAC}$. Chứng minh rằng: $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$.

Hướng dẫn giải:



Vẽ hình bình hành *BPCQ*, khi đó *PQ* và *BC* giao nhau tại trung điểm *M* của mỗi đường.

Do đó *DE* và *PQ* cũng giao nhau tại trung điểm M của mỗi đường suy ra *PDQE* là hình bình hành. Suy ra $QE // PD$ từ đó *A, E, Q* thẳng hàng.

Vẽ hình bình hành *BPAT*. Khi đó ta cũng suy ra *TACQ* là hình bình hành.

Ta có $\widehat{TQA} = \widehat{QAE} = \widehat{EAC} = \widehat{BAP} = \widehat{APT}$.

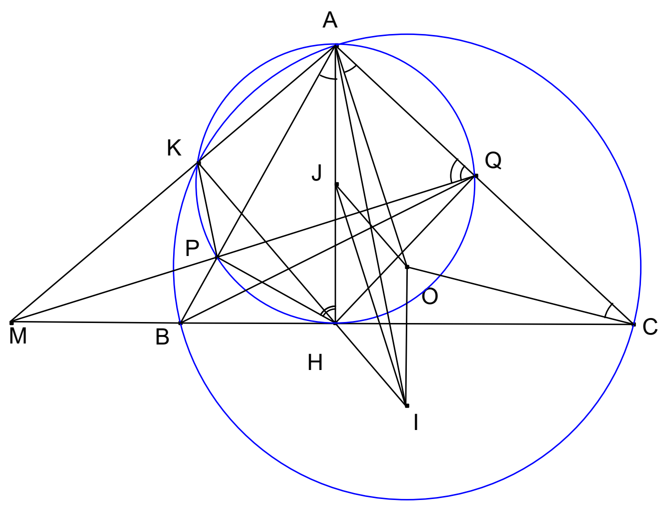
Do đó tứ giác TAQB nội tiếp.

Ta thấy qua phép tịnh tiến véc tơ $\overrightarrow{BP}$ thì tam giác *BQT* biến thành tam giác *PCA.*

Do đó $\widehat{ACB} = \widehat{TQB} = \widehat{TAB} = \widehat{ABP}$ (đpcm)

Câu 61. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Thái Nguyên, trại hè Hùng Vương lần thứ 10) Cho tam giác *ABC* nhọn ($AB < AC$) có *AH* là đường cao. *P*, *Q* là chân các đường vuông góc hạ từ *H* xuống *AB*, *AC.* Gọi *M* là giao của *PQ* và *BC, K* là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và *AM*, *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *BPC.* Chứng minh *K*, *H*, *I* thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Dễ dàng chứng minh được $PQCB$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $MB.MC = MP.MQ$. Do hai tam giác MHP và MQH đồng dạng nên $MH^2 = MP.MQ$.

Vậy có $MH^2 = MB.MC = MP.MQ = MK.MA$ suy ra $AKPH$ là tứ giác nội tiếp. Vậy $HK \perp AM$

Ta có năm điểm A, K, P, H, Q cùng thuộc đường tròn tâm J là trung điểm của AH. Bây giờ ta lại có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQCB$ nên $IJ \perp PQ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta dễ dàng chứng minh được $OA \perp PQ$. Từ đó $OA // IJ$.

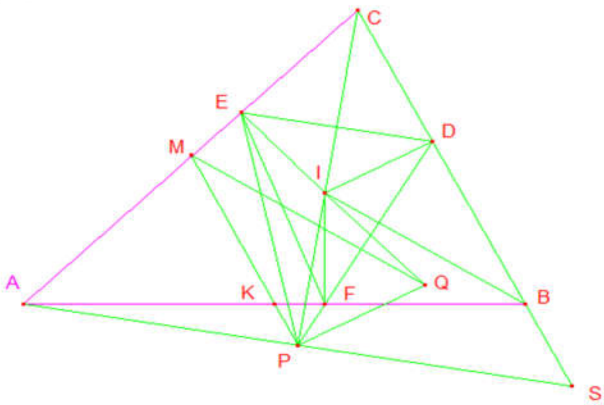
Lại có $OI \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow OI // AH$. Từ đó $AJIO$ là hình bình hành. Dễ dàng suy ra $JHIO$ cũng là hình bình hành. Mà JO vuông góc với AK (do AK là trục đẳng phương của hai đường tròn (J) và (O)). Vậy HI cũng vuông góc với AK. Lại có KH vuông góc với AK nên K, H, I thẳng hàng.

Câu 62. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Sơn La, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Các cạnh BC, CA, AI lần lượt tiếp xúc với đường tròn (I) tại D, E, F. Gọi M, K lần lượt là các trung điểm các cạnh AC và AB, P là giao điểm của các đường thẳng MK và CI.

a. Chứng minh rằng các điểm D, F, P thẳng hàng.

b. Gọi Q là điểm thỏa $QP \perp MK$ và $QM // BI$. Chứng minh $QI \perp AC$.

Hướng dẫn giải:



a. Kéo dài AP cắt CB tại S. Vì M, K là các trung điểm AC và AB nên P là trung điểm AS.

+ Trong tam giác CAS có CP là trung tuyến và phân giác nên $CA = CS$

+ Đặt $p = AB + BC + CA$. Có $AF = p - BC$ (1)

+ $SD = CS - CD = CA - (p - AB) = AB + AC - p$

$= AB + BC + CA - BC - p = p - BC$.

$\Rightarrow SD = p - BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AF = SD$. Chú ý: $BD = BF, PA = PS$.

Trong tam giác ABS có $\frac{FA}{FB}.\frac{DB}{DS}.\frac{PS}{PA} = 1 \Rightarrow P, F, D$ thẳng hàng.

b. Có CI là trung trực của ED nên tam giác PDE cân tại P.

$+\widehat{PED} = \widehat{PDE} = 180^0 - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) - \left(90^0 - \frac{B}{2}\right) = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} = \widehat{AEF}$

+ Giả sử Q_1 là điểm thỏa mãn $Q_1M \parallel BI, Q_1I \perp AC$ suy ra Q, I, E thẳng hàng.

+ Có $\widehat{PEA} = 180^0 - \widehat{PED} - \widehat{DEC} = 180^0 - \left(90^0 - \dfrac{A}{2}\right) - \left(90^0 - \dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{A}{2} + \dfrac{C}{2} = 90^0 - \dfrac{B}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{PEQ_1} = 90^0 - \widehat{PEA} = \dfrac{B}{2}$, (3)

Nhưng $PM \parallel CB, MQ_1 \parallel BI \Rightarrow \widehat{PMQ_1} = \widehat{IBD} = \dfrac{B}{2}$, (4)

+ Từ (3) và (4) suy ra tứ giác $PMEQ_1$ nội tiếp

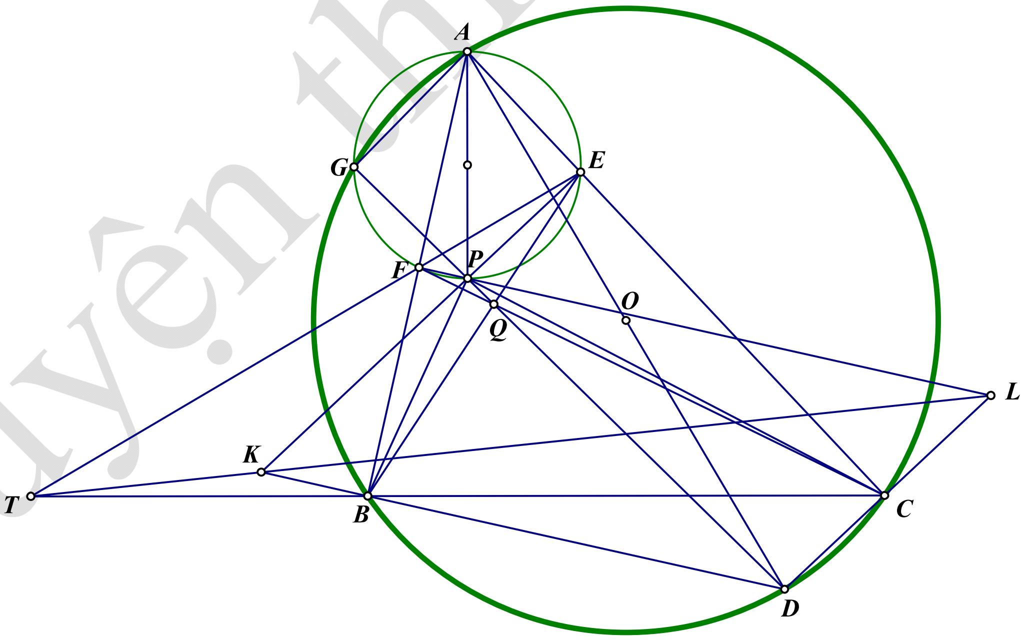
$\Rightarrow QI \perp AC.$

$\Rightarrow \widehat{Q_1PM} = \widehat{Q_1EM} = 90^0$ hay $Q_1P \perp MK$

+ Suy ra $Q_1 \equiv Q$ tức $QI \perp AC$. *Suy ra điều phải chứng minh.*

Câu 63. (Đề thi đề xuất chọn HSG vùng duyên hải đồng bằng Bắc Bộ năm 2015 - trường THPT chuyên Vĩnh Phúc) Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác sao cho $AP \perp BC$. Đường tròn đường kính AP cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại E, F và cắt đường tròn (O) tại điểm G khác A. Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy.

Hướng dẫn giải:



Gọi AD là đường kính của (O), dễ thấy G,P,D thẳng hàng và $PE \parallel CD; PF \parallel BD$. Giả sử PE,PF cắt DB,DC tại K,L; EF cắt BC tại T.

Theo định lý Desargues để chứng minh BE, CF, GP (hay PD) đồng quy ta chỉ cần chứng minh T,K,L thẳng hàng.

Áp dụng định lý Menelaus ta được: $\dfrac{TB}{TC}.\dfrac{EC}{EA}.\dfrac{FA}{FB} = 1 \Rightarrow \dfrac{TB}{TC} = \dfrac{FB}{EC}.\dfrac{AE}{AF}$ (1)

Dễ thấy tứ giác $EFBC$ nội tiếp nên $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{BE}{CF}$ (2)

Cũng từ $EFBC$ nội tiếp suy ra

$\angle FCL=\angle FCA+\angle ACL=\angle EBA+90^0=\angle EBA+\angle ABK=\angle KBE$

Tứ giác $PKDL$ là hình bình hành suy ra $\angle PKB=\angle PLC$.

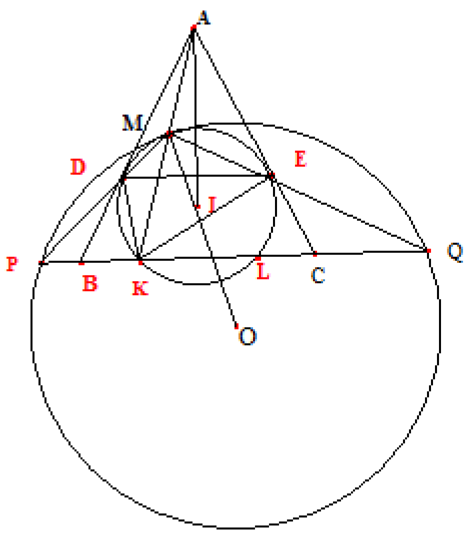
Suy ra $\Delta EBK \sim \Delta FCL \Rightarrow \dfrac{BE}{CF}=\dfrac{KB}{CL}$ (3).

Ta có $BF.PL=CE.PK=S_{PKDL}\Rightarrow \dfrac{BF}{CE}=\dfrac{PK}{PL}=\dfrac{DL}{DK}$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được $\dfrac{TB}{TC}=\dfrac{DL}{DK}.\dfrac{KB}{CL}\Rightarrow \dfrac{TB}{TC}.\dfrac{LC}{LD}.\dfrac{KD}{KB}=1$. Từ đó áp dụng định lý menelaus cho tam giác DBC ta suy ra T,K,L thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

Câu 64. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Hà Giang, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho tam giác ABC cân tại A. Một đường tròn ω tiếp xúc với các cạnh AB, AC và cắt cạnh BC lần lượt tại K và L. Đoạn AK cắt đường tròn ω tại M. Gọi P và Q lần lượt là điểm đối xứng của K qua B và C. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ. Chứng minh rằng các điểm M, O và tâm đường tròn ω thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Gọi I là tâm của ω; D, E theo thứ tự là tiếp điểm của ω và AB, AC; (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ.

Dễ thấy tứ giác $MDKE$ điều hòa. Do đó

$D(MKBE)=D(MKDE)=-1$

Dễ thấy DE // PK, mà $BP=BK$ nên $D(PKBE)=-1$.

Vậy $D(MKBE)=D(PKBE)$. Từ đó $DM\equiv DP$ hay M, D, P thẳng hàng.

Chứng minh tương tự M, E, Q thẳng hàng.

Kết hợp với $DE//PK$ suy ra $\dfrac{\overline{MP}}{\overline{MD}}=\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{ME}}=k$

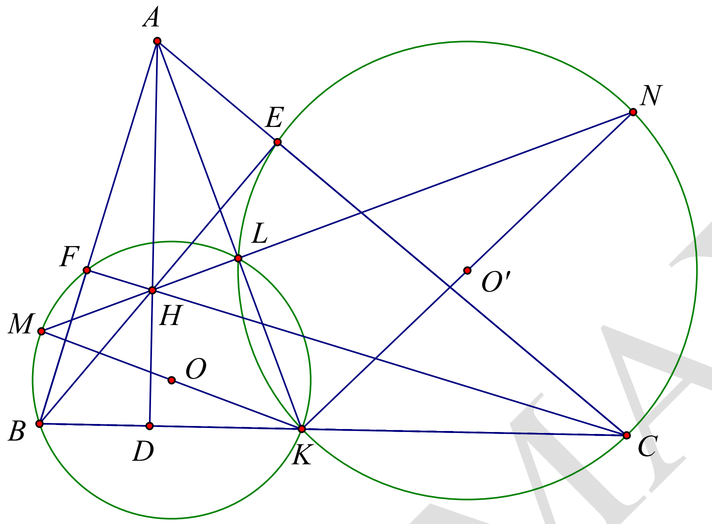
Do đó qua phép vị tự tâm M tỉ số k các điểm M, D, E theo thứ tự biến thành các điểm M, P, Q.

Vậy qua phép vị tự tâm M đường tròn ω biến thành đường tròn (O).

Do đó M, I, O thẳng hàng.

Câu 65. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Lai Châu, trại hè Hùng Vương lần thứ XII) Cho ΔABC nhọn, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Cho K là một điểm tùy ý trên cạnh BC (K khác B, C). Kẻ đường kính KM của đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK và đường kính KN của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK. Chứng minh rằng M, H, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Gọi L là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (BKF) và (CKE).

Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp. Do đó $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AE}.\overline{AC} \Rightarrow A$ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (BFK) và (CEK). Suy ra A, L, K thẳng hàng.

Vì tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên $\overline{AH}.\overline{AD} = \overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AL}.\overline{AK}$. Do đó tứ giác $DHLK$ nội tiếp. Suy ra $HL \perp AK$.

Mà $ML \perp AK$ nên M, H, L thẳng hàng.

Tương tự N, H, L thẳng hàng. Từ đó suy ra M, H, N thẳng hàng.

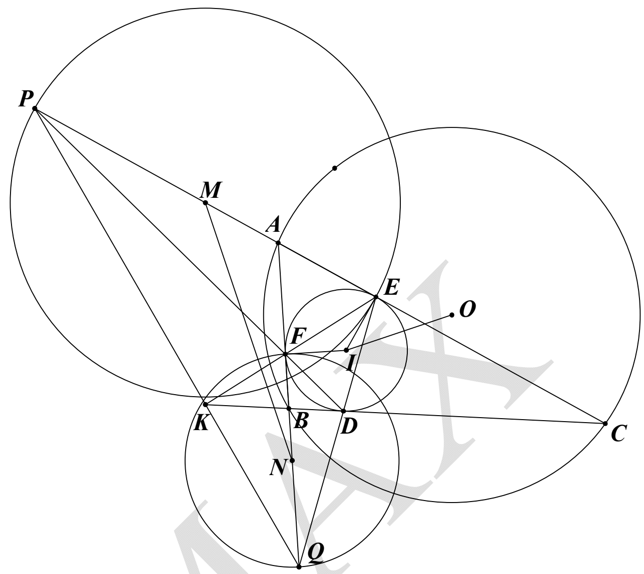
LOẠI 1: Chứng minh tính chất: thẳng hàng, đồng quy, song song, vuông góc.

Câu 1. [TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG]

Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (C_1) tâm I. Đường tròn (C_1) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi P là giao của FD và CA, Q là giao của DE và AB, K là giao của EF và BC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PE và QF. Chứng minh rằng OI vuông góc MN, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Xét 2 đường tròn: (M, ME) và (N, NF).



Ta có $P_{I/(M)} = IE^2 = IF^2 = P_{I/(N)}$. (1) Gọi R là bán kính đường tròn (ABC). Vì $D,\ E,\ F$ lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (C_1) với các cạnh ΔABC nên $AD,\ BE,\ CF$ đồng quy.

Suy ra $(QFBA) = -1$

$\Rightarrow NF^2 = NB.NA = NO^2 - R^2$.

Ta có $(PEAC) = -1$

$\Rightarrow ME^2 = MA.MC = MO^2 - R^2$.

Khi đó:

$P_{O/(M)} = MO^2 - ME^2 = R^2, P_{O/(N)} = NO^2 - NF^2 = R^2 \Rightarrow P_{O/(M)} = P_{O/(N)}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra OI là trục đẳng phương của (M) và (N)

$\Rightarrow OI \perp MN$.

Câu 2. ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ĐB&DHBB

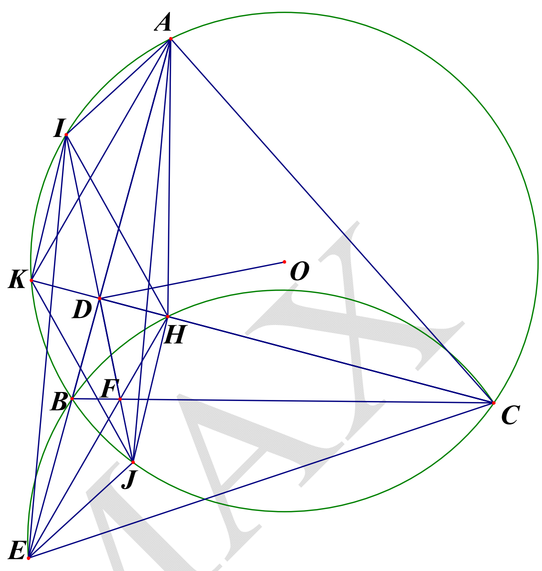
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có $AC > BC$. Giả sử H là trực tâm tam giác ABC, đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cắt AB tại điểm thứ hai là E ($E \neq B$). Đường thẳng đi qua D, vuông góc với DO cắt BC tại F và cắt đường tròn (O) tại hai điểm $I,\ J$.

a) Chứng minh tứ giác $IHJE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $H,\ E,\ F$ thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Giả sử ta có hình vẽ như trên (các trường hợp khác tương tự).



Gọi K là giao điểm thứ hai của CH và đường tròn (O)

Ta có D là trung điểm KH và D cũng là trung điểm IJ, suy ra tứ giác IHJK là hình bình hành.

Suy ra $\widehat{IKJ} = \widehat{IHJ}$ (1).

Lại có tứ giác BHCE nội tiếp, suy ra $\widehat{CEB} + \widehat{CHB} = 180^0$. Mà $\widehat{CAB} + \widehat{CHB} = 180^0$.

Suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{CAB}$, như vậy tam giác CEA cân tại C, $CD \perp AE$ nên D là trung điểm AE.

Suy ra tứ giác IAJE là hình bình hành và $\widehat{IEJ} = \widehat{IAJ}$ (2).

Lại có $\widehat{IKJ} + \widehat{IAJ} = 180^0$ (3) (do tứ giác IAJK nội tiếp).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{IHJ} + \widehat{IEJ} = 180^0$, như vậy tứ giác IHJE nội tiếp. Giả sử (O_1) và (O_2) là đường tròn ngoại tiếp các tứ giác IHJE và BHCE. Ta có HE chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Lại có $\overline{FI}.\overline{FJ} = \overline{FB}.\overline{FC}$ (cùng là $P_{F/(O)}$).

Mà $\overline{FI}.\overline{FJ} = P_{F/(O_1)}$; $\overline{FB}.\overline{FC} = P_{F/(O_2)}$. Suy ra $P_{F/(O_1)} = P_{F/(O_2)}$.

Suy ra F thuộc HE là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Vậy H, E, F thẳng hàng.

Câu 3.TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (I) tại M, N sao cho M nằm giữa A và N. Đường thẳng DM và EF cắt nhau tại K, đường thẳng NK cắt đường tròn tâm (I) tại điểm thứ hai là P khác N. Đường thẳng AI và EF cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác $PQID$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng: Các điểm A, P, D thẳng hàng.

Câu 4. HỘI CÁC TRƯỜNG CHUYÊN VÙNG DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ

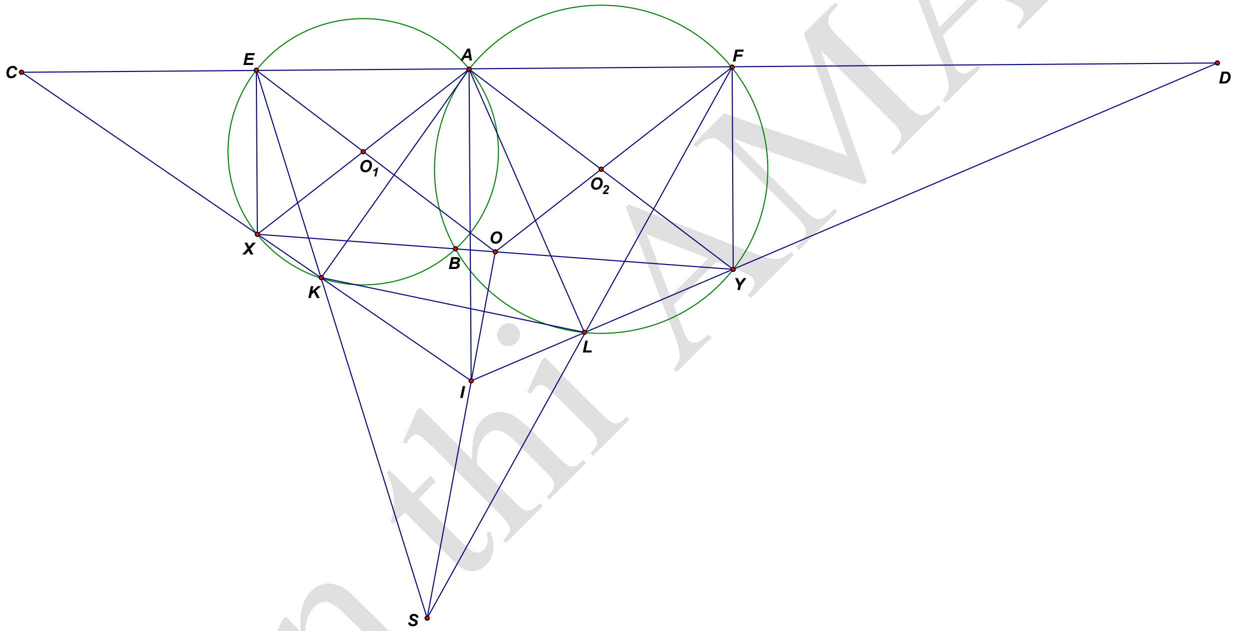
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc

$\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L.

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK.

2. Chứng minh rằng ba đường thẳng EK, FL và OI đồng quy.

Hướng dẫn giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.

Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel AY$

Lại có $(EA, EO_1) = (AO_1, AE) = (AF, AO_2) \pmod{\pi} \Rightarrow EO_1 \parallel AY$

Do đó O, O_1, E thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có O, O_2, F thẳng hàngMặt khác

$$(CE, CK) = (AC, AK) + (AK, CK) = (AC, AK) + \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E}, \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1, EK) \pmod{\pi}$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK)2. Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{ALI} = 90^0$ nên 4 điểm A, I, K, L cùng thuộc đường tròn đường kính AI.

Mà $EF \perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.

Do đó $(AE, AK) = (LA, LK) \pmod{\pi}$ (1) Mặt khác

$(KE, KA) = (XE, XA) = (XE, EA) + (AE, AX) =$

$\frac{\pi}{2} + (AE, AX) \pmod{\pi}$

$= \frac{\pi}{2} + (AY, AF) = (AF, FY) + (AY, AF) = (AY, FY) = (LA, LF) \pmod{\pi}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$(EF, EK) = (EA, AK) + (AK, EK) = (LA, LK) + (LF, LA) = (LF, LK) \pmod{\pi}$

Vậy 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn. Gọi S là giao điểm của EK và FL

Vì 4 điểm E, F, L, K cùng thuộc một đường tròn nên ta có

$\overline{SE}.\overline{SK} = \overline{SF}.\overline{SL} \Rightarrow P_{S/(CEK)} = P_{S/(DFL)}$ (3) Ta có

$\overline{IC}.\overline{IK} = \overline{ID}.\overline{IL} = IA^2 \Rightarrow P_{I/(CEK)} = P_{I/(DFL)}$ (4) Gọi D là giao điểm của EF với IY

Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE = OF$. Do đó $P_{O/(CEK)} = OE^2 = OF^2 = P_{O/(DFL)}$ (5) Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng.

Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

***) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)**

II. Bài toán vecto và quan hệ vuông góc

Câu 66. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2011 toán 10)

a. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm I thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Có kết luận gì về điểm I, hãy chứng minh điều đó.

b. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BI và CJ. Chứng minh rằng đường cao AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BI và CJ.

Câu 67. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

a. Cho tứ giác $ABCD$, với $AB = a$, $BC = b$, $DA = d$. Chứng minh rằng:

$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

b. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Dựng ra phía ngoài tam giác các đoạn thẳng PN, NE sao cho $PD \perp AB$, $PD = AB$ và $NE \perp AC$, $NE = AC$. Từ D dựng đường thẳng DF song song và cùng hướng với BC sao cho $DF = \frac{BC}{2}$.

Chứng minh $EF \perp AM$.

Câu 68. (THPT Chuyên Bắc Giang – Tỉnh Bắc Giang – Thi Toán Khối 11)

Cho tam giác ABC. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ và giả sử $\widehat{KCB} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CK, M là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh $MH \perp BC$.

Lời giải

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó

$\widehat{KCB} = \widehat{KCD} = \widehat{ACD}$. Do $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$ nên $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}} = 2.$

Vì $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}} = \frac{AC\sin\widehat{ACK}}{BC\sin\widehat{KCB}}$

$= \frac{2AC\sin\widehat{ACK}\cos\widehat{KCB}}{BC\sin\widehat{ACK}} == \frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}$ nên

$\frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC} = 2 \Rightarrow \cos\widehat{KCB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$

$\cos\widehat{ACD} = \frac{DC}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$ và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \widehat{KCB} = \widehat{ACD} = \widehat{AHD}$ (1)

Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB$\Rightarrow \widehat{HDB} = \widehat{AHD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD $\Rightarrow$ BH $\perp$ CD$\Rightarrow$ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH $\perp$ B**C.**

Câu 69. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2000-2001 lớp 10)

a. Cho tam giác ABC có ba điểm A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tính giá trị biểu thức $s = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}$.

b. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 5$; $AC = 7$. AD và CE là phân giác trong cắt nhau tại P. Tính AP.

Câu 70. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2005-2006 lớp 12)

Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ACM và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh $GI \perp CM$.

IV. Bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng và tính chất đồng quy

Câu 71. (THPT Chuyên Cao Bằng – Thi Olympic 2014 – Toán 11)

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài A_1A_2, tiếp tuyến chung trong B_1B_2 của hai đường tròn ($A_1, B_1 \in (O_1)$, $A_2, B_2 \in (O_2)$). Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, O_1O_2 đồng quy.

Câu 72. (THPT Chu Văn An – Hà Nội – Đề xuất đề thi học sinh giỏi Toán 11- 2015)

Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. M thuộc BC thỏa mãn $OM // AB$. DM cắt (O) tại P khác D. Chứng minh C, H, P thẳng hàng với H là trực tâm tam giác ABC.

Lời giải

DP cắt AB tại E thì M là trung điểm DE (vì OM là đường trung bình)

BHCD là hình bình hành nên DH cắt DC tại I là trung điểm mỗi đường

Suy ra MI là đường trung bình của ΔDHE → MI // EH

→ EH // BC

Kéo dài CH cắt (O) tại Q. Ta sẽ c/m Q ≡ P, bằng cách c/m Q, E, D thẳng hàng.

Vì BD // CQ nên BDCQ là hình thang cân (hình thang nội tiếp).

Ta có: $\widehat{EQH} = \widehat{EHK}$ vì ΔQBH cân tại B

$\widehat{DQC} = \widehat{BCQ}$ vì hình thang BDCQ cân

Nên $\widehat{EQH} = \widehat{DQC}$

Mà Q, H, C thẳng hàng, nên E, Q, D thẳng hàng, hay Q≡P (đpcm

Câu 73. (THPT Chuyên tỉnh Lào Cai – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AB, CD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt AC tại P, PD cắt đường tròn (O) lần nữa tại G. Gọi W là giao điểm của AG và BC. Chứng minh ba điểm O, P, W thẳng hàng.

Câu 74. (THPT Chuyên Hưng Yên- Thi Môn Toán Khối 11 -2015)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác trong của góc $\angle BAC$ cắt (O) tại D khác A. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. I là một điểm thay đổi trên cạnh AC $(I \neq E)$. Đường thẳng BI cắt (O) tại J khác B.

Từ C kẻ đường thẳng song song với AJ cắt FD tại P. Đường tròn (T) ngoại tiếp □BIE cắt BC tại Q $(Q \neq B)$ và cắt (O) tại K $(K \neq B)$. Chứng minh E, P, Q thẳng hàng và đương thẳng KI luôn đi qua điểm cố định khi I thay đổi.

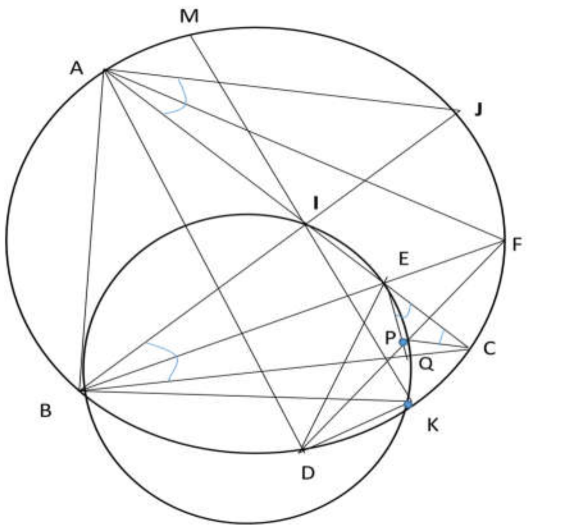
Lời giải

+) □ là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ của (O) và E đối xứng B qua AD nên

$$DB = DE = DC$$

$\widehat{DEF} = 180^0 - \widehat{DEB} = 180^0 - \widehat{DBE} = \widehat{DCF}$ **(vì $B, D, C, F \in (O)$).**

$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{DFC} \Rightarrow \Delta DEF = \Delta DCF$ **(g.c.g)** $\Rightarrow DF$ **là trung trực** EC.



$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{PCE} = \widehat{CAJ}$

Mà $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$ **(do** $A,$

Có $B, Q, E, I \in (T) \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{QEC}$ **và** P, Q ... **ng.**

+) Đường thẳng IK **cắ**

$(KB, KI) \equiv (EB, EI)($

$(KD, KB) \equiv (AD, AB)$

$(KD, KI) \equiv (K$ ... $B, EI)(mod\pi)$

$\equiv \frac{\pi}{2}($ ... $AD)$.

$\Rightarrow \widehat{DKM} = 90^0 \Rightarrow DM$ **là đường kính của** (O).

Mà D **là điểm chính giữa cung** $\widehat{BC}$ **chứa** A **thì** M là điểm chính giữa cung $\widehat{BC}$ **không** chứa A **nên** M **cố định. Vậy đường thẳng** KI **luôn qua điểm** M **cố định khi** I **thay đổi.**

Câu 75. (THPT Chuyên tỉnh Thái Nguyên – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ có AH là đường cao. P, Q là chân đường vuông góc hạ từ H xuống AB, AC. Gọi M là giao của PQ và BC, K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AM, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC. Chứng minh K, H, I thẳng hàng.

Lời giải

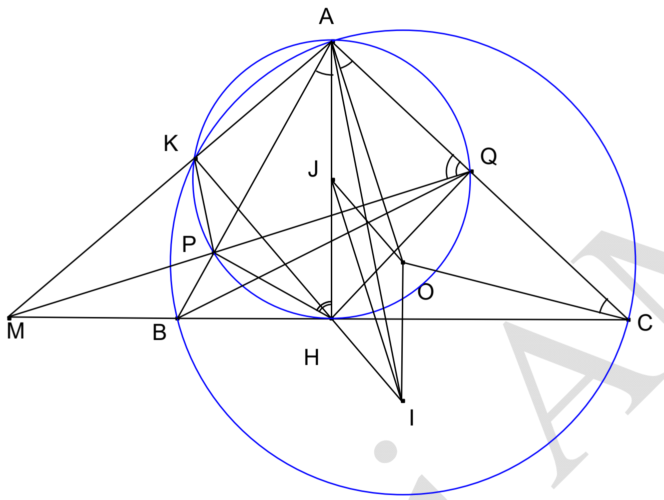
Dễ dàng chứng minh được *PQCB* là tứ giác nội tiếp.

Ta có *MB.MC* = *MP.MQ*. Do hai tam giác *MHP* và *MQH* đồng dạng nên $MH^2 = MP.MQ$.

Vậy có $MH^2 = MB.MC = MP.MQ = MK.MA$ **suy ra *AKPH* là tứ giác nội tiếp. Vậy** $HK \perp AM$.

Ta có năm điểm *A*, *K*, *P*, *H*, *Q* cùng thuộc đường tròn tâm *J* là trung điểm của *AH*. Bây giờ ta lại có *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *PQCB* nên $IJ \perp PQ$. Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* ta dễ dàng chứng minh được $OA \perp PQ$. Từ đó *OA* // *IJ*.

Lại có $OI \perp BC, AH \perp BC \Rightarrow OI // AH$. Từ đó *AJIO* là hình bình hành. Dễ dàng suy ra *JHIO* cũng là hình bình hành. Mà *JO* vuông góc với *AK* (do *AK* là trục đẳng phương của hai đường tròn (*J*) và (*O*)). Vậy *HI* cũng vuông góc với *AK*. Lại có *KH* vuông góc với *AK* nên *K*, *H*, *I* thẳng hàng.



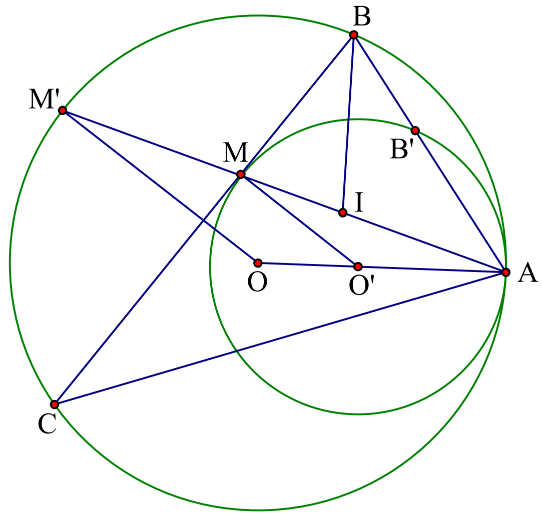
Câu 76. (THPT Chuyên tỉnh Tuyên Quang – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho hai đường tròn $(O;\, R)$ và $(O';\, R')$ tiếp xúc với nhau tại A, (O') nằm trong (O), BC là một dây cung của (O) tiếp xúc với (O') tại M. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

a. Ba điểm A, I, M thẳng hàng.

b. Khi dây BC thay đổi thì điểm I thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Gọi M' là giao điểm thứ hai của MA với (O) và B' là giao điểm thứ hai của BA với (O') (khác A).

Đặt $k=\frac{R}{R'}$**. Ta thấy** $V_A^k(O')=O, V_A^k(M)=M'$**, suy ra O'M // OM'. Vì O'M ⊥ BC nên OM' ⊥ BC, do đó M' là điểm chính giữa cung** $\overset{\frown}{BC}$**. Vậy AM là phân giác của góc** $\widehat{BAC}$**, hay I thuộc đường thẳng AM.**

b) Theo tính chất của phân giác thì $\frac{IA}{IM}=\frac{BA}{BM}$**.**

Mặt khác, theo tính chất của phương tích thì

$$BM^2=BB'.BA\Rightarrow\frac{IA}{IM}=\frac{AB}{\sqrt{BB'.AB}}=\sqrt{\frac{AB}{BB'}}.$$

Vì $V_A^k(B')=B$ **nên**

$$\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AB'}\Rightarrow AB=k.AB'\Rightarrow AB=k(AB-BB')\Rightarrow\frac{AB}{BB'}=\frac{k}{k-1}.$$

Do đó

$$\frac{IA}{IM}=\sqrt{\frac{k}{k-1}}\Rightarrow AI=\sqrt{\frac{k}{k-1}}(AM-AI)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=q.\overrightarrow{AM},\ q=\frac{\sqrt{\frac{k}{k-1}}}{1+\sqrt{\frac{k}{k-1}}}.$$

Vậy $V_A^q(M)=I$**. Do** $M\in(O')$ **nên** $I\in(O'')=V_A^q((O'))$ **cố định.**

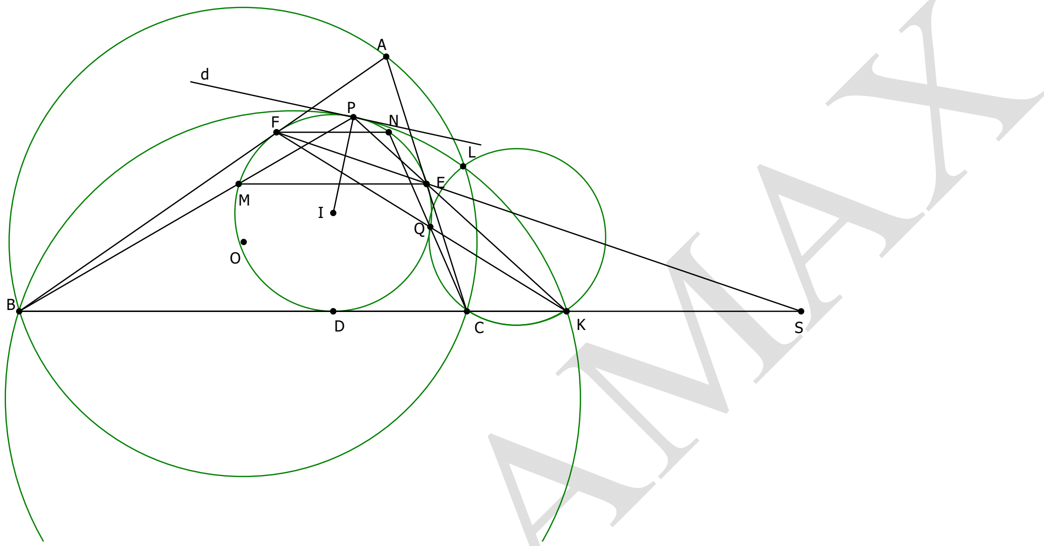
Câu 77. THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Tỉnh Yên Bái – Thi Toán Khối 11)

Cho tam giác ABC **không cân tại** A**. Gọi** (O) **và** (I) **theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác** ABC**.** (I) **tiếp xúc với** AC**,** AB **tại** E**,** F**. Các điểm** M**,** N **thuộc** (I) **sao cho** EM **song song** BC **và** FN **song song** BC**. Gọi** P**,** Q **lần lượt là giao điểm của** BM**,** CN **với** (I)**. Chứng minh rằng**

a. BC, EP, FQ **đồng quy tại một điểm, gọi đó là điểm** K.

b. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPK, CQK **cùng tiếp xúc với** (I) **và cùng đi qua một điểm thuộc** (O).

Lời giải



a) Gọi ***S*** **là giao điểm của** ***BC*** **và** ***EF*****. Gọi** ***D*** **là tiếp điểm của (*****I*****) với** ***BC*****. Ta có** ***DMFP*** **là tứ giác điều hòa** $\Rightarrow E(DSPM) = E(DFPM) = -1$

Mà ***EM//DS*****.**

Do đó ***EP*** **đi qua trung điểm của** ***DS*****.**

Tương tự ***FQ*** **đi qua trung điểm của** ***DS*****.**

Vậy ***BC*****,** ***EP*****,** ***FQ*** **đồng quy tại trung điểm của** ***DS*****. Kí hiệu là** ***K*****.**

b) Kí hiệu (***XYZ*****) là đường tròn ngoại tiếp tam giác** ***XYZ*****.**

Gọi ***d*** **là tiếp tuyến vơi (*****I*****) tại** ***P*****. Ta có:**

$$(KP, KB) \equiv (EP, EM)(\bmod \pi) \equiv (d, PM)(\bmod \pi) \equiv (d, PB)(\bmod \pi).$$

Suy ra ***d*** **tiếp xúc với (*****BPK*****) tại** ***P*****. Vậy (*****PBK*****) tiếp xúc với (*****I*****).**

Tương tự (***CQK*****) tiếp xúc với (*****I*****).**

Kí hiệu ***EE*****,** ***FF*** **theo thứ tự chỉ tiếp tuyến với (*****I*****) tại** ***E*****,** ***F*****. Gọi** ***L*** **là giao điểm khác** ***K*** **của (*****BPK*****) và (*****CQK*****). Ta có:**

$$(LB, LC) \equiv (LB, LK) + (LK, LC)(\bmod \pi)$$

$$\equiv (PB, PK) + (QK, QC)(\bmod \pi)\left(P \in (LBK); Q \in (LKC)\right)$$

$$\equiv (PM, PE) + (QF, QN)(\bmod \pi)$$

$$\equiv (EM, EE) + (FF, FN)(\bmod \pi)$$

$$\equiv (AB, AC)(\bmod \pi)(FN // EM; FF \equiv AB; EE \equiv AC).$$

Suy ra ***L*** **thuộc (*****ABC*****). Điều đó có nghĩa là đường tròn ngoại tiếp các tam giác** ***BPK*** **và** ***CQK*** **cùng đi qua một điểm thuộc (*****O*****).**

Câu 78. (Sở GDĐT Nghệ An – Chọn đội tuyển dự thi HSG quốc gia lớp 12- 2006-2007)

Cho tam giác ABC**. Gọi hai điểm** $B^{'}, C^{'}$ **lần lượt là trung điểm các cạnh** AC**,** AB **và** H **là hình chiếu của** A **lên** BC**. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác** $AB^{'}C^{'}$**,** $BC^{'}H$**,** $B^{'}CH$ **đồng quy tại một điểm đồng thời đường thẳng đi qua điểm đó và điểm H đi qua trung điểm đoạn thẳng** $B^{'}C^{'}$**.**