

- Câu 58.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, biết $A(1;0;1), B(-1;1;2), C(-1;1;0), D(2;-1;-2)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ bằng:
- A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Sử dụng công thức } h = \frac{|\overrightarrow{[AB, AC]} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

- Câu 59.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

- A. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$. B. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.
 C. $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. D. $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CI} \end{array} \right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$$

$$\text{Vì } I \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

- Câu 60.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. 3. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Thể tích tứ diện: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{[AB, AC]} \cdot \overrightarrow{AD}|$$

- Câu 61.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a, SC = 3a, \angle ASB = \angle BSC = 60^\circ, \angle CSA = 90^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó khoảng cách SG bằng

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tổng quát: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và có $\angle ASB = \alpha, \angle BSC = \beta, \angle CSA = \gamma$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó

$$SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta}$$

Chứng minh:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$$

$$(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}$$

$$\text{Khi đó } SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta}$$

Áp dụng công thức trên ta tính được $SG = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $|\overline{MB} - 2\overline{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

- A. 2.** **B. 3.** **C. 1.** **D. 4.**

Hướng dẫn giải

$$\overline{AC}(-1;-3;-2), \overline{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$$

$$|\overline{MB} - 2\overline{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24}$$

Để $|\overline{MB} - 2\overline{AC}|$ nhỏ nhất thì $m = 2$

Câu 63. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng

- A. 3.** **B. 4.** **C. 2.** **D. 1.**

Hướng dẫn giải

$$\overline{MA} = (2-m; 5-m; 1-m), \overline{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m), \overline{MC} = (1-m; 2-m; -1-m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m-4)^2 \leq 28$$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

- A. $I(0;-1;-3)$.** **B. $I(1;0;3)$** **C. $I(0;1;3)$.** **D. $I(-1;0;-3)$.**

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (-1;-1;2), \overline{AC} = (1;-2;1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{DC} = (-2;-2;4), \overline{AB} = (-1;-1;2) \Rightarrow \overline{DC} = 2\overline{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và}$$

$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } H \text{ là trung điểm của } CD \Rightarrow H(0;1;5)$$

$$\text{Gọi } S(a;b;c) \Rightarrow \overline{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overline{SH} = k [\overline{AB}, \overline{AC}] = k(3;3;3) = (3k; 3k; 3k)$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{+) Với } k = 1 \Rightarrow \overline{SH} = (3;3;3) \Rightarrow S(-3;-2;2)$$

$$\text{+) Với } k = -1 \Rightarrow \overline{SH} = (-3;-3;-3) \Rightarrow S(3;4;8)$$

$$\text{Suy ra } I(0;1;3)$$

- Câu 65.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 7), B(4; 5; -2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M . Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào
- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $M \Rightarrow M(0; y; z)$
 $\Rightarrow \overline{MA} = (2; -1 - y; 7 - z), \overline{MB} = (4; 5 - y; -2 - z)$

Từ $\overline{MA} = k\overline{MB}$ ta có hệ
$$\begin{cases} 2 = k.4 \\ -1 - y = k(5 - y) \\ 7 - z = k(-2 - z) \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

- Câu 66.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$ và D thuộc trục Oy . Biết $V_{ABCD} = 5$ và có hai điểm $D_1(0; y_1; 0), D_2(0; y_2; 0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $y_1 + y_2$ bằng
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$

Ta có: $\overline{AB} = (1; -1; 2), \overline{AD} = (-2; y - 1; 1), \overline{AC} = (0; -2; 4)$

$\Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; -4; -2) \Rightarrow [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD} = -4y + 2$

$V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6}|-4y + 2| = 5 \Leftrightarrow y = -7; y = 8 \Rightarrow D_1(0; -7; 0), D_2(0; 8; 0) \Rightarrow y_1 + y_2 = 1$

- Câu 67.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 2; 4), B(3; 0; -2), C(1; 3; 7)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A . Tính độ dài $|\overline{OD}|$.
- A.** $\frac{\sqrt{207}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{205}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $D(x; y; z)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2$$

Vì D nằm giữa B, C (phân giác trong) nên

$$\overline{DB} = -2\overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = -2(1 - x) \\ -y = -2(3 - y) \\ -2 - z = -2(7 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Suy ra $D\left(\frac{5}{3}; 2; 4\right) \Rightarrow |\overline{OD}| = \frac{\sqrt{205}}{3}$

- Câu 68.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(1; 1; 1), B(5; 1; -2), C(7; 9; 1)$. Tính độ dài phân giác trong AD của góc A

A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

B. $\frac{3\sqrt{74}}{2}$.

C. $2\sqrt{74}$.

D. $3\sqrt{74}$.

Hướng dẫn giải

$D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

Ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Rightarrow D\left(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1\right) \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 69. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 4; -1), B(1; 4; -1), C(2; 4; 3) D(2; 2; -1)$. Biết $M(x; y; z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7$.

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1), B(-1; 2; 0), C(1; 1; -2)$. H là trực tâm tam giác ABC , khi đó, độ dài đoạn OH bằng

A. $\frac{\sqrt{870}}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{870}}{14}$.

C. $\frac{\sqrt{870}}{16}$.

D. $\frac{\sqrt{870}}{15}$.

Hướng dẫn giải

$H(x; y; z)$ là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow BH \perp AC, CH \perp AB, H \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{15}; y = \frac{29}{15}; z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{870}}{15}$$
.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3; 1; 0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2; 1; 1)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ các điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 - \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 - \sqrt{177}}{4}\right)$.

B. $B\left(\frac{-3 - \sqrt{177}}{4}; \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 + \sqrt{177}}{4}\right)$.

C. $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 - \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 + \sqrt{177}}{4}\right)$.

D. $B\left(\frac{-3 + \sqrt{177}}{4}; \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 - \sqrt{177}}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $B(x; y; 0) \in (Oxy), C(0; 0; z) \in Oz$.

$$H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \overline{CH} \perp \overline{AB} \\ \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AH} \text{ đồng phẳng} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{AH} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AH}] \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y-7=0 \\ 3x-3y+yz-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3-\sqrt{177}}{4}; y = \frac{17+\sqrt{177}}{2}; z = \frac{3+\sqrt{177}}{4}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4}; \frac{17+\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$$

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overline{CA} + \overline{CB}|$ bằng:

- A. $5\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD = 12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 + 8^2 = (a+5)^2 + (b+4)^2 \\ (a+1)^2 + (b+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ (a+1)^2 + (6-2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = \frac{-14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc}$$

$$A\left(\frac{17}{5}; \frac{-14}{5}; 0\right) \text{ (loại)}. \text{ Với } A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8).$$

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5;3;-1)$, $B(2;3;-4)$, $C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $9 - 2\sqrt{6}$. B. $9 - 3\sqrt{6}$. C. $9 + 3\sqrt{6}$. D. $9 + 2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{Suy ra: } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm

$M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN = \sqrt{13}$, $\sphericalangle MON = 60^\circ$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A = m + 2n^2 + p^2$ bằng

A. 29.

B. 27.

C. 28.

D. 30.

Hướng dẫn giải

$$\overline{OM} = (3; 0; 0), \overline{ON} = (m; n; 0) \Rightarrow \overline{OM} \cdot \overline{ON} = 3m$$

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = |\overline{OM}| \cdot |\overline{ON}| \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{\overline{OM} \cdot \overline{ON}}{|\overline{OM}| \cdot |\overline{ON}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$MN = \sqrt{(m-3)^2 + n^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Suy ra } m = 2; n = \pm 2\sqrt{3}$$

$$[\overline{OM}, \overline{ON}] \cdot \overline{OP} = 6\sqrt{3}p \Rightarrow V = \frac{1}{6} |6\sqrt{3}p| = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } A = 2 + 2 \cdot 12 + 3 = 29.$$

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$

A. 48.

B. 50.

C. 52.

D. 46.

Hướng dẫn giải

$I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ [\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{15}; y = \frac{61}{30}; z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50.$$

AMAX