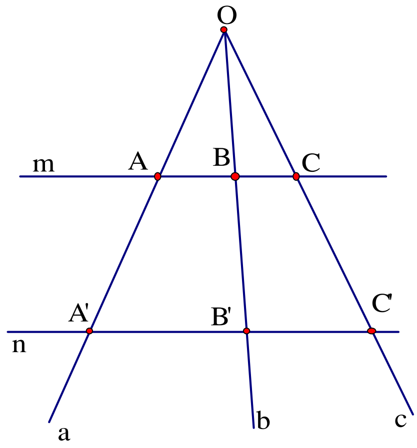
2) Chùm đường thẳng đồng quy:

Nếu các đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song thì chúng định ra trên hai đường thẳng song song ấy các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ



Nếu m // n, ba đường thẳng a, b, c đồng quy ở O chúng cắt m tại A, B, C và cắt n tại A', B', C' thì

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ hoặc $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$; $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

* Đảo lại:

+ Nếu ba đường thẳng trong đó có hai đường thẳng cắt nhau, định ra trên hai đường thẳng song song các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì ba đường thẳng đó đồng quy

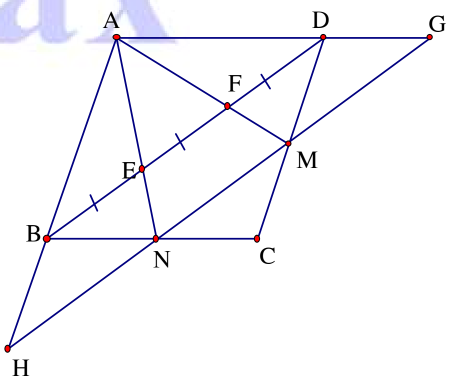
+ Nếu hai đường thẳng bị cắt bởi ba đường thẳng đồng quy tạo thành các cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng song song với nhau

B. Aùp dụng:

1) Bài 1:

Cho tứ giác ABCD có M là trung điểm CD, N là trung điểm CB. Biết AM, AN cắt BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành

Giải



Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD; G, H là giao điểm của MN với AD, BD

MN // BC (MN là đường trung bình của ΔBCD)

$\Rightarrow$ Tứ giác HBFM là hình thang có hai cạnh bên đòng quy tại A, N là trung điểm của đáy BF nên theo bổ đề hình thang thì N là trung điểm của đáy MH

$\Rightarrow$MN = NH (1)

Tương tự : trong hình thang CDEN thì M là trung điểm của GN $\Rightarrow$ GM = MN (2)

Từ (1) và (2) suy ra GM = MN = NH

Ta có ΔBNH = ΔCNM (c.g.c) $\Rightarrow$ $\widehat{BHN} = \widehat{CMN}$ $\Rightarrow$ BH // CM hay AB // CD (a)

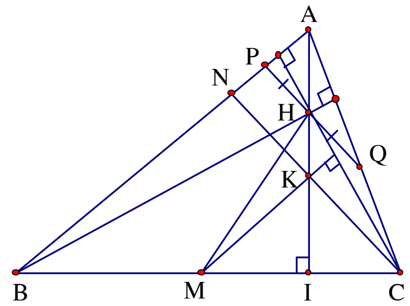
Tương tự: $\Delta GDM = \Delta NCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DGM} = \widehat{CNM} \Rightarrow$ GD // CN hay AD // CB (b)

Từ (a) và (b) suy ra tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành

2) Bài 2:

Cho ΔABC có ba góc nhọn, trực tâm H, một đường thẳng qua H cắt AB, AC thứ tự tạ P, Q sao cho HP = HQ. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $HM \perp PQ$

Giải



Gọi giao điểm của AH và BC là I

Từ C kẻ CN // PQ ($N \in AB$),

ta chứng minh $MH \perp CN \Rightarrow HM \perp PQ$

Tứ giác CNPQ là hình thang, có H là trung điểm PQ, hai cạnh bên NP và CQ đồng quy tại A nên K là trung điểm CN

$\Rightarrow$ MK là đường trung bình của $\Delta BCN \Rightarrow$ MK // CN $\Rightarrow$ MK // AB (1)

H là trực tâm của ΔABC nên $CH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MK \perp CH \Rightarrow$ MK là đường cao của ΔCHK (3)

Từ $AH \perp BC \Rightarrow MC \perp HK \Rightarrow$ MI là đường cao của ΔCHK (4)

Từ (3) và (4) suy ra M là trực tâm của $\Delta CHK \Rightarrow MH \perp CN \Rightarrow MH \perp PQ$

3) bài 3:

Cho hình chữ nhật ABCD có M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC.

Chứng minh rằng: NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$

Giải

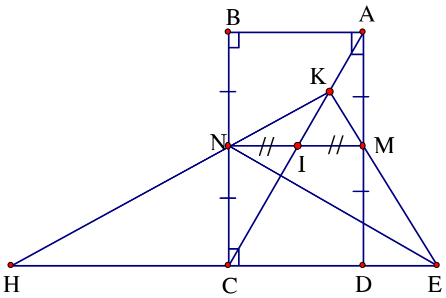
Gọi H là giao điểm của KN và DC, giao điểm của AC và MN là I thì IM = IN

Ta có: MN // CD (MN là đường trung bình của hình chữ nhật ABCD)

$\Rightarrow$ Tứ giác EMNH là hình thang có hai cạnh bên EM và HN đồng quy tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EH

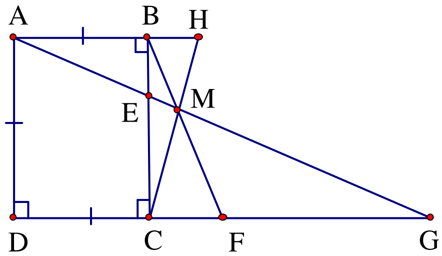
Trong ΔENH thì NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên ΔENH cân tại N $\Rightarrow$ NC là tia phân giác của $\widehat{ENH}$ mà $NC \perp MN$ (Do $NM \perp BC$ – MN // AB) $\Rightarrow$ NM là tia phân giác góc ngoài tại N của ΔENH

Vậy NM là tia phân giác của $\widehat{KNE}$



Bài 4:

Trên cạnh BC = 6 cm của hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho BE = 2 cm. Trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CF = 3 cm. Gọi M là giao điểm của AE và BF. Tính $\widehat{AMC}$



Giải

Gọi giao điểm của CM và AB là H, của AM và DF là G

Ta có: $\dfrac{BH}{CF} = \dfrac{AB}{FG} \Leftrightarrow \dfrac{BH}{3} = \dfrac{6}{FG}$

Ta lại có $\dfrac{AB}{CG} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CG = 2AB = 12\text{ cm}$

$\Rightarrow FG = 9\text{ cm} \Rightarrow \dfrac{BH}{3} = \dfrac{6}{9} \Rightarrow BH = 2\text{ cm} \Rightarrow BH = BE$

$\Delta BAE = \Delta BCH$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BCH}$ mà $\widehat{BAE} + \widehat{BEA} = 90^0$

Mặt khác $\widehat{BEA} = \widehat{MEC}$; $\widehat{MCE} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{MEC} + \widehat{MCE} = 90^0 \Rightarrow \widehat{AMC} = 90^0$

Bài 5:

Cho tứ giác ABCD. Qua điểm E thuộc AB, H thuộc AC vẽ các đường thẳng song song với BD, cắt các cạnh còn lại của tứ giác tại F, G

a) Có thể kết luận gì về các đường thẳng EH, AC, FG

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD, cho biết OB = OD. Chứng minh rằng ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy

Giải

a) Nếu EH // AC thì EH // AC // FG

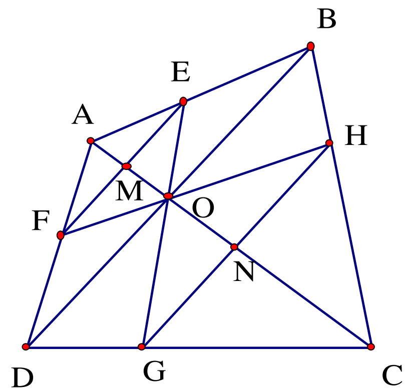
Nếu EH và AC không song song thì EH, AC, FG đồng quy

b) Gọi giao điểm của EH, HG với AC

Trong hình thang DFEB có hai cạnh bên DF, BE đồng quy tại A và OB = OD nên theo bổ đề hình thang thì M là trung điểm của EF

Tương tự: N là trung điểm của GH

Ta có $\frac{ME}{GN} = \frac{MF}{HN}$ nên ba đường thẳng EG, FH, AC đồng quy tại O



CHUYÊN ĐỀ 19 – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

1) Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

2) Phương pháp

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh A $\geq$ k với k là hằng số

+ Chỉ ra dấ "=" có thể xẩy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh A $\leq$ k với k là hằng số

+ Chỉ ra dấ "=" có thể xẩy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu : min A là giá trị nhỏ nhất của A; max A là giá trị lớn nhất của A

B.Các bài tập tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

I) Dạng 1: Tam thức bậc hai

Ví dụ 1 :

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 – 8x + 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 – 4x + 1$

Giải

a) $A = 2(x^2 – 4x + 4) – 7 = 2(x – 2)^2 – 7 \geq - 7$

min A $= - 7 \Leftrightarrow x = 2$

b) $B = - 5(x^2 + \frac{4}{5}x) + 1 = - 5(x^2 + 2.x.\frac{2}{5} + \frac{4}{25}) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5(x + \frac{2}{5})^2 \leq \frac{9}{5}$

max B $= \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

b) Ví dụ 2: Cho tam thức bậc hai $P(x) = a\,x^2 + bx + c$

a) Tìm min P nếu $a > 0$

b) Tìm max P nếu $a < 0$

Giải

Ta có: $P = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên:

a) Nếu $a > 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ do đó $P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

b) Nếu $a < 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$ do đó $P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

II. Dạng 2: Đa thức có dấu giá trị tuyệt đối

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = (3x - 1)^2 - 4\,|3x - 1| + 5$

đặt $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

$\min A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$

$\Rightarrow \min B = 1 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

2) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta có $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| = 3$

$\min C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2|+|x-3|=|x-2|+|3-x|\geq|x-2+3-x| = 1$ (2)

Vậy $T = |x-1| + |x-2| +|x-3| + |x-4| \geq 1 + 3 = 4$

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1\leq x\leq 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2\leq x\leq 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2\leq x\leq 3$

III.Dạng 3: Đa thức bậc cao

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = x(x-3)(x-4)(x-7) = (x^2-7x)(x^2-7x+12)$

Đặt x^2-7x+6 thì $A = (y-6)(y+6) = y^2-36 \geq -36$

Min $A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2-7x+6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 6$

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2-2xy+y^2) + (x^2-2x+1) + 2$

$= (x-y)^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$

Ta có $C + 3 = (x^2-2x+1) + (y^2-2y+1) + (xy-x-y+1)$

$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)(y-1)$. Đặt $x - 1 = a$; $y - 1 = b$ thì

$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

Min $(C + 3) = 0$ hay min $C = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

2) Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $C = (x+8)^4 + (x+6)^4$

Đặt $x + 7 = y \Rightarrow C = (y+1)^4 + (y-1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow$ min $A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$

b) $D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$

$= (x^2-3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ min $D = 0 \Leftrightarrow x = 3$

IV. Dạng phân thức:

1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN

Ví dụ : Tìm GTNN của $A = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \frac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \frac{-2}{(3x-1)^2 + 4}$

Vì $(3x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow (3x-1)^2 + 4 \ge 4 \Rightarrow \frac{1}{(3x-1)^2+4} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2+4} \ge \frac{-2}{4} \Rightarrow A \ge -\frac{1}{2}$

$\min A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

a) Ví dụ 1: Tìm GTNN của $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

+) Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x-1)^2} = 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$. Đặt $y = \frac{1}{x-1}$ Thì

$A = 3 - 2y + y^2 = (y-1)^2 + 2 \ge 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+) Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^2} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \ge 2$

$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ví dụ 2: Tìm GTLN của $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100}$

Ta có $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x+10)^2}$. Đặt $y = \frac{1}{x+10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10$ thì

$B = (\frac{1}{y} - 10).y^2 = -10y^2 + y = -10(y^2 - 2.y.\frac{1}{20}y + \frac{1}{400}) + \frac{1}{40} = -10\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{40} \le \frac{1}{40}$

$\text{Max } B = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10$

c) Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta có: $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right]}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$

3. Các phân thức có dạng khác

a)Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của $A = \frac{3 - 4x}{x^2+1}$

Ta có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2-4x+4)-(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow$ min A = - 1 $\Leftrightarrow x = 2$

Ta lại có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2+4)-(4x^2+4x+1)}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow$ max A = 4 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

C. Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức biết quan hệ giữa các biến

1) Ví dụ 1: Cho x + y = 1. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì x + y = 1)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

nên $A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1 = 2(y^2 - 2.y.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Vậy min $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$(1). Mặt khác $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có:

$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ min $A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2)Ví dụ 2: Cho x + y + z = 3

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của B = xy + yz + xz

Từ Cho $x + y + z = 3 \Rightarrow$ Cho $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9$ (1)

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2)

Đẳng thức xẩy ra khi $x = y = z$

a) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \le x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 3 \Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

b) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \ge xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx \le 3 \Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x)$ với $x,y,z > 0$ và $x + y + z = 1$

Vì $x,y,z > 0$,áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{27}$

áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có

$$(x+y).(y+z).(z+x) \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)} \Rightarrow 2 \ge 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3} \Rightarrow S \le \frac{8}{27}.\frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

4) Ví dụ 4: Cho $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy + yz + zx)^2 \le (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow 1 \le (x^2 + y^2 + z^2)^2$ (1)

áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2, y^2, z^2) và (1,1,1)

Ta có $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \le 3(x^4 + y^4 + z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \le 3(x^4 + y^4 + z^4) \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \le \frac{1}{3}$

Vậy $x^4 + y^4 + z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi $x = y = z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. Một số chú ý:

1) Khi tìm GTNN, GTLN ta có thể đổi biến

Ví dụ : Khi tìm GTNN của $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$, ta đặt $x - 2 = y$ thì

$A = (y + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2\ldots$

2) Khi tìm cực trị của một biểu thức, ta có thể thay đk của biểu thức này đạt cực trị bởi đk tương đương là biểu thức khác đạt cực trị:

+) -A lớn nhất $\Leftrightarrow$ A nhỏ nhất ; +) $\frac{1}{B}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ B nhỏ nhất (với B > 0)

+) C lớn nhất $\Leftrightarrow$ C^2 lớn nhất

Ví dụ: Tìm cực trị của $A = \frac{x^4 + 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

a) Ta có A > 0 nên A nhỏ nhất khi $\frac{1}{A}$ lớn nhất, ta có

$\frac{1}{A} = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2}{x^4 + 1} = 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \geq 1 \Rightarrow \min \frac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \max A = 1 \Leftrightarrow x = 0$

b) Ta có $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 \geq 2x^2$. (Dấu bằng xẩy ra khi $x^2 = 1$)

Vì $x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{2x^2}{x^4 + 1} \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \max \frac{1}{A} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$

3) Nhiều khi ta tìm cực trị của biểu thức trong các khoảng của biến, sau đó so sámh các cực trị đó để để tìm GTNN, GTLN trong toàn bộ tập xác định của biến

Ví dụ: Tìm GTLN của $B = \frac{y}{5 - (x + y)}$

a) xét $x + y \leq 4$

- Nếu x = 0 thì A = 0 - Nếu $1 \leq y \leq 3$ thì $A \leq 3$

- Nếu y = 4 thì x = 0 và A = 4

b) xét $x + y \geq 6$ thì $A \leq 0$

So sánh các giá trị trên của A, ta thấy max A = 4 $\Leftrightarrow$ x = 0; y = 4

4) Sử dụng các hằng bất đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTLN của $A = |2x + 3y|$ biết $x^2 + y^2 = 52$

Aùp dụng Bđt Bunhiacốpxki: $(a x + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ cho các số 2, x , 3, y ta có:

$(2x + 3y)^2 \le (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = (4 + 9).52 = 26^2 \Rightarrow |2x + 3y| \le 26$

Max A = 26 $\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 = 52 \Leftrightarrow 13x^2 = 52.4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Vậy: Ma x A = 26 $\Leftrightarrow$ x = 4; y = 6 hoặc x = - 4; y = - 6

5) Hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

Hai số có tích không đổi thì tổng của chúng lớn nhất khi và chỉ khi chúng bằng nhau

a)Ví dụ 1: Tìm GTLN của $A = (x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$

Vì $(x^2 – 3x + 1) + (21 + 3x – x^2) = 22$ không đổi nên tích $(x^2 – 3x + 1)(21 + 3x – x^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 – 3x + 1 = 21 + 3x – x^2 \Leftrightarrow x^2 – 3x – 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = - 2$

Khi đó A = 11. 11 = 121 $\Rightarrow$ Max A = 121 $\Leftrightarrow$ x = 5 hoặc x = - 2

b) Ví dụ 2: Tìm GTNN của $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x}$

Ta có: $B = \frac{(x+4)(x+9)}{x} = \frac{x^2 + 13x + 36}{x} = x + \frac{36}{x} + 13$

Vì các số x và $\frac{36}{x}$ có tích $x.\frac{36}{x} = 36$ không đổi nên $x + \frac{36}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{36}{x} \Leftrightarrow x = 6$

$\Rightarrow A = x + \frac{36}{x} + 13$ nhỏ nhất là min A = 25 $\Leftrightarrow$ x = 6

6)Trong khi tìm cực trị chỉ cần chỉ ra rằng tồn tại một giá trị của biến để xảy ra đẳng thức chứ không cần chỉ ra mọi giá trị để xảy ra đẳng thức

Ví dụ: Tìm GTNN của $A = |11^m - 5^n|$

Ta thấy 11^m tận cùng bằng 1, 5^n tận cùng bằng 5

Nếu $11^m > 5^n$ thì A tận cùng bằng 6, nếu $11^m < 5^n$ thì A tận cùng bằng 4

khi m = 2; n = 3 thÌ $A = |121 - 124| = 4 \Rightarrow$ min A = 4, chẳng hạn khi m = 2, n = 3

CHUYÊN ĐỀ 20 – PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

❋ - ***PHƯƠNG PHÁP 1***: Phương pháp đưa về dạng tổng

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn viết được dưới dạng tổng các bình phương.*

- Biến đổi phương trình về dạng một vế là một tổng của các bình phương các biểu thức chứa ẩn; vế còn lại là tổng bình phương của các số nguyên (*số số hạng của hai vế bằng nhau*).

Các ví dụ minh hoạ:

- Ví dụ 1: Tìm $x; y \in Z$ thoả mãn: $5x^2 - 4xy + y^2 = 169$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 = 144 + 25 = 169 + 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (2x-y)^2 + x^2 = 144 + 25 & \\ (2x-y)^2 + x^2 = 169 + 0 & \text{(II)} \end{array}\right.$$

Từ (I) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x-y)^2 = 12^2 \\ x^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 2 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 5 \\ y = \mp 22 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x-y)^2 = 5^2 \\ x^2 = 12^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = \mp 19 \end{cases}; \begin{cases} x = \pm 12 \\ y = \mp 29 \end{cases} \end{array}\right.$$

Tương tự từ (II) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x-y)^2 = 13^2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 13 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x-y)^2 = 0 \\ x^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 13 \\ y = \pm 26 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(x, y) \in \left\{\begin{array}{l} (5;-2);(5;-22);(-5;2);(-5;22);(12;-19);(12;-29) \\ (-12;19);(-12;29);(0;13);(0;-13);(13;26);(-13;-26) \end{array}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm $x; y \in Z$ thoả mãn: $x^2 + y^2 - x - y = 8$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 32 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 34 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 5^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2x-1)^2 = 3^2 \\ (2y-1)^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; x = -1 \\ y = 3; y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} (2x-1)^2 = 5^2 \\ (2y-1)^2 = 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3; x = -2 \\ y = 2; y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $(x; y) \in \{(2;3);(2;-2);(-1;3);(-1;-2);(3;2);(3;-1);(-2;2);(-2;-1)\}$

Ví dụ 3: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $x^3-y^3=91$ (1)

$(1)\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2)=91.1=13.7$ (Vì $(x^2+xy+y^2)>0$)

$$(x-y).(x^2+xy+y^2)=91.1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=1\\(x^2+xy+y^2)=91\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=5\end{cases};\begin{cases}x=-5\\y=-6\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=91\\(x^2+xy+y^2)=1\end{cases}\Rightarrow VN\end{array}\right.$$

Ví dụ 4: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $x^2+x-y^2=0$ (2)

$x^2+x-y^2=0\Rightarrow 4x^2+4x-4y^2=0\Rightarrow(2x+1)^2-(2y)^2=1\Rightarrow(2x+2y+1)(2x-xy+1)=1$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy: $(x;y)\in\{(0;0);(-1;0)\}$

❈ - ***PHƯƠNG PHÁP 2***: Phương pháp cực hạn

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình đối xứng*

- Vì phương trình đối xứng nên $x;y;z$ có vai trò bình đẳng như nhau. Do đó; ta giả thiết $x\le y\le z$; tìm điều kiện của các nghiệm; loại trừ dần các ẩn để có phương trình đơn giản. Giải phương trình; dùng phép hoán vị để suy ra nghiệm.

✠ Ta thường giả thiết $1\le x\le y\le z\le ....$

❀**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y;z\in Z^+$ thoả mãn: $x+y+z=x.y.z$ (1)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1\le x\le y\le z$. Khi đó:

$(1)\Rightarrow x.y.z=x+y+z\le 3z\Rightarrow x.y\le 3$ (Vì $x;y;z\in Z^+$) $\Rightarrow x.y\in\{1;2;3\}$

* Nếu: $x.y=1\Rightarrow x=y=1\Rightarrow 2+z=z$ (vô lí)

* Nếu: $x.y=2\Rightarrow x=1;y=2;z=3$

* Nếu: $x.y=3\Rightarrow x=1;y=3\Rightarrow z=2<y$ (vô lí)

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;3)$

Ví dụ 2: Tìm $x;y;z\in Z^{+}$ thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ (2)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1\le x\le y\le z$. Khi đó:

$(2)\Rightarrow 2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{3}{x}\Rightarrow x\le\frac{3}{2}\Rightarrow x=1$

Với: $x=1\Rightarrow 1=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{2}{y}\Rightarrow y\le 2\Rightarrow y\in\{1;2\}$

♦.Nếu: $y=1\Rightarrow\frac{1}{z}=0$ (vô lí)

♦.Nếu: $y=2\Rightarrow z=2$

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;2)$

✵ - ***PHƯƠNG PHÁP 3***: Phương pháp sử dụng tính chất chia hết

❀**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y\in Z$ để: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên

Ta có: $A=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{x^2+x+1}$. Khi đó:

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên.

$\Rightarrow 1\vdots\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow\left(x^2+x+1\right)\in U_{(1)}=\{-1;1\}$

Vì : $\left(x^2+x+1\right)>0;\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2+x+1=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy để A nhận giá trị nguyên thì: $x=0$ hoặc $x=-1$

Ví dụ 2: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+x.y$

$(2)\Rightarrow 2y^2.(x-1)-x.(x-1)-y.(x-1)+1=0(*)$

Với: $x=1;(*)\Rightarrow 1=0\Rightarrow x=1$ không phải là ngiệm của phương trình. Nên:

$$2y^2-x-y+\frac{1}{x-1}=0(**).$$

Phương trình có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1)\in U(1)=\{1;-1\}\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả mãn: $3^x+1=(y+1)^2$ (3)

Ta có:

$(3)\Rightarrow 3^x=(y-1)^2-1=y(y+2).3^x$ là số lẻ $\Rightarrow y;(y+2)$ là hai số lẻ liên tiếp $\Rightarrow (y;y+2)=1\Rightarrow y;y+2$ là các luỹ thừa của 3, nên:

$$\begin{cases} y=3^m\,(*) \\ y+2=3^n\,(**) \end{cases}(m+n=x)\Rightarrow 3^m+2=3^n\Rightarrow m<n$$

- Với: $m=0;\Rightarrow n=1\Rightarrow y=1;x=1.$
- Với: $m\geq 1;\Rightarrow n>1$ Từ $(*);(**)\Rightarrow \begin{cases} y\,\vdots\, 3 \\ (y+2)\,\vdots\, 3 \end{cases}\Rightarrow (y;(y+2))\neq 1$(vô lí)

Phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

❋ - ***<u>PHƯƠNG PHÁP 4</u>***: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình mà hai vế là những đa thức có tính biến thiên khác nhau.*

- Áp dụng các bất đẳng thức thường gặp:

*Bất đẳng thức Cô – si:

Cho n số không âm: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$. Khi đó:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+......+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.......a_n}$$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=......=a_n$

* Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

Cho 2n số thực: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$ và $b_1;b_2;b_3;......;b_n$. Khi đó:

$$(a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+....+a_n.b_n)^2\leq (a_1.+a_2.+a_3+....+a_n)(b_1+b_2.+b_3+....+b_n).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_i = kb_i\left(i=\overline{1;n}\right)$.

*Bất đẳng thứcgiá trị tuyết đối:

$$|a|+|b|=\left[\begin{array}{l}|a+b| \Leftrightarrow a.b \geq 0 \\ |a-b| \Leftrightarrow a.b<0\end{array}\right.$$

Các ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 1: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả: $\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y}=3$ (1)

Áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $3=\frac{x.y}{z}+\frac{y.z}{x}+\frac{z.x}{y}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{x.y}{z}.\frac{y.z}{x}.\frac{z.x}{y}}=3.\sqrt[3]{x.y.z}$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x.y.z}\leq 1 \Leftrightarrow x.y.z\leq 1 \Rightarrow x=y=z=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=z=1$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y+1)^2=3\left(x^2+y^2+1\right)$ (2)

(*Toán Tuổi thơ 2*)

Theo Bunhiacôpxki,ta có:

$(x+y+1)^2\leq\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(x^2+y^2+1\right)=3\left(x^2+y^2+1\right)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{1}{1}\Rightarrow x=y=1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=y=1$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn:

$$|x-3|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004 \quad (3)$$

- *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta nhận thấy: 2104 = 3 + 10 + 101 + 990 + 1000 =101 + 2003 và $|a|=|-a|$

Ta có:(3)$\Rightarrow |3-x|+|10-x|+|x+101|+|x+990|+|x+1000|=2004$.

Mà $|a| \ge a \Rightarrow \begin{cases} |3-x| \ge 3-x \\ |10-x| \ge 10-x \\ |x+101| \ge x+101 \\ |x+990| \ge x+990 \\ |x+1000| \ge x+1000 \end{cases} \Rightarrow 2004 \ge |x+101| + 2003 \Rightarrow |x+101| \le 1$

Do đó: $-1 \le (x+101) \le 1 \Rightarrow (x+101) \in \{-1;0;1\} \Rightarrow x \in \{-102;-101;-100\}$.

Với $x=-101 \Rightarrow 2004 = 2003$ (vô lí). Vậy nghiệm của phương trình là: $x \in \{-102;-100\}$

1) Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-3$

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$x^2+y^2+z^2 \le xy+3y+2z-3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3 \le 0 \Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right) \le 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \le 0$ (*) Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 \ge 0 \quad \forall x,y \in R$

$\Rightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

<u>PHƯƠNG PHÁP 5</u>: Phương pháp lựa chọn

Phương pháp: *Phương pháp này được sử dụng với các phương trình mà ta có thể nhẩm* (phát hiện dễ dàng) *được một vài giá trị nghiệm*

- Trên cơ sở các giá trị nghiệm đã biết. Áp dụng các tính chất như chia hết; số dư; số chính phương; chữ số tận cùng ….. ta chứng tỏ rằng với các giá trị khác phương trình vô nghiệm

Các ví dụ minh hoạ:

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm $x;y \in Z^+$ thoả mãn: $x^6+3x^3+1=y^4$

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy với $x=0; y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng. Ta cần chứng minh phương trình vô nghiệm với $x\neq 0$

+ Với $x=0; y=\pm1$ thì phương trình được nghiệm đúng

+ Với $x>0$. Khi đó:

$x^6+2x^3+1<x^6+3x^3+1<x^6+4x^3+4 \Rightarrow \left(x^3+1\right)^2<y^4<\left(x^3+2\right)^2$ (*)

Vì $\left(x^3+1\right);\left(x^3+2\right)$ là hai số nguyên liên tiếp nên không có giá trị nào của y thoả (*)

Vậy $x=0; y=\pm1$ là nghiệm của phương trình.

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm $x; y\in Z^+$ thoả: $x^2+x-1=3^{2y+1}$ (2)

(*Tạp chí Toán học và tuổi trẻ*)

Gọi b là chữ số tận cùng của x (Với $b\in\{0;1;2;...;9\}$. Khi đó: $\left(x^2+x-1\right)$ có chữ số tận cùng là: 1, 5 hoặc 9. (*)

Mặt khác: 3^{2y+1} là luỹ thừa bậc lẻ của 3 nên có tận cùng là 3 hoặc 7. (**)

Từ (*) và (**) suy ra phương trình vô nghiệm.

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm $x; y\in Z^+$ thoả mãn: $x^2-6xy+13y^2=100$ (3)

(3) $\Rightarrow (x-3)^2=4\left(25-y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} |y|\leq 5 \\ \left(25-y^2\right)=n^2\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

Do đó: $y\in\{-5;-4;-3;0;3;4;5\} \Rightarrow x\in\{3;9;11;13\}$

Phương trình có nghiệm nguyên: $(x;y)\in\{(-5;3);(-4;9);(-3;11);(0;13);(3;11);(4;9);(5;3)\}$

<u>PHƯƠNG PHÁP 6</u>: Phương pháp lùi vô hạn *(xuống thang)*

Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với những phương trình có (*n – 1) *ẩn mà hệ số có ước chung khác* 1

- Dựa vào tính chất chia hết ta biểu diễn ẩn theo ẩn phụ nhằm "hạ" (giảm bớt) hằng số tự do, để có được phương trình đơn giản hơn.

- Sử dụng linh hoạt các phương pháp để giải phương trình đó.

Các ví dụ minh hoạ:

<u>Ví dụ 1</u>: Giải phương trình: $x^3-3y^3-9z^3=0$ (1)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0 \Rightarrow \left(x^3 - 3y^3 - 9z^3\right) \vdots 3$ mà $\left(-3y^3 - 9z^3\right) \vdots 3$ nên $x^3 \vdots 3$

Ta có: $(1) \Rightarrow \left(x^3 - 3y^3 - 9z^3\right) \vdots 3 \Rightarrow x^3 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3 \Rightarrow x = 3x_1$

Khi đó: $(1) \Rightarrow \left(27x_1^3 - 3y^3 - 9z^3\right) \vdots 3 \Rightarrow \left(9x_1^3 - y^3 - 3z^3\right) \vdots 3 \Rightarrow y^3 \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y = 3y_1$.

$\Rightarrow \left(9x_1^3 - 27y_1^3 - 3z^3\right) \vdots 3 \Rightarrow z^3 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3 \Rightarrow y = 3z_1$.

* Tiếp tục sự biểu diễn trên và nếu gọi $x_0; y_0; z_0$ là nghiệm của (1) và thì $3 \in U_{(x_0; y_0; z_0)}$ và $0 \le x_0; y_0; z_0 \le 9$. Thực hiện thử chọn ta được: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

CÁC BÀI TẬP KHÁC

1/Dùng định nghĩa

1) Cho abc = 1 và $a^3 > 36$. . Chứng minh rằng $\frac{a^2}{3}+$b²+c²> ab+bc+ac

Giải

Ta có hiệu:

$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$=\left(\frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab-ac+2bc\right)+\frac{a^2}{12}-3bc=\left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+\frac{a^3-36abc}{12a}$

$=\left(\frac{a}{2}-b-c\right)^2+\frac{a^3-36abc}{12a}>0$ (vì abc=1 và $a^3 > 36$ nên a >0)

Vậy : $\frac{a^2}{3}+b^2+c^2> ab+bc+ac$ Điều phải chứng minh

2) Chứng minh rằng

a) $x^4+y^4+z^2+1\geq 2x.(xy^2-x+z+1)$

b) với mọi số thực a , b, c ta có : $a^2+5b^2-4ab+2a-6b+3>0$

c) $a^2+2b^2-2ab+2a-4b+2\geq 0$

Giải :

a) Xét hiệu :

H = $x^4+y^4+z^2+1-2x^2y^2+2x^2-2xz-2x=\left(x^2-y^2\right)^2+(x-z)^2+(x-1)^2$

H$\geq$0 ta có điều phải chứng minh

b) Vế trái có thể viết

H = $(a-2b+1)^2+(b-1)^2+1$

$\Rightarrow$ H > 0 ta có điều phải chứng minh

c) vế trái có thể viết

H = $(a-b+1)^2+(b-1)^2$

$\Rightarrow$ H $\geq$ 0 ta có điều phải chứng minh

Ii / Dùng biến đổi tương đương

1) Cho x > y và xy =1 .Chứng minh rằng : $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2} \geq 8$

Giải :

Ta có $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ (vì xy = 1)

$\Rightarrow (x^2+y^2)^2=(x-y)^4+4.(x-y)^2+4$

Do đó BĐT cần chứng minh tương đương với

$(x-y)^4+4(x-y)^2+4 \geq 8.(x-y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^4-4(x-y)^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2\right]^2 \geq 0$

BĐT cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh

2) Cho xy $\geq$ 1 .Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy}$

Giải :

Ta có $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \geq \dfrac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+y^2}\right)+\left(\dfrac{1}{1+y^2}-\dfrac{1}{1+xy}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{xy-x^2}{(1+x^2).(1+xy)}+\dfrac{xy-y^2}{(1+y^2).(1+xy)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(y-x)}{(1+x^2).(1+xy)}+\dfrac{y(x-y)}{(1+y^2).(1+xy)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2).(1+y^2).(1+xy)} \geq 0$

BĐT cuối này đúng do xy > 1 .Vậy ta có điều phải chứng minh

Iii / dùng bất đẳng thức phụ

1) Cho a , b, c là các số thực và a + b +c =1

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$

Giải :

áp dụng BĐT BunhiaCôpski cho 3 số (1,1,1) và (a,b,c)

Ta có $(1.a+1.b+1.c)^2 \leq (1+1+1).(a^2+b^2+c^2)$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)^2 \le 3.(a^2+b^2+c^2)$$

$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}$ (vì a+b+c =1) (đpcm)

2) Cho a,b,c là các số dương

Chứng minh rằng $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ (1)

Giải :

(1) $\Leftrightarrow \ 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+1 \ge 9 \Leftrightarrow \ 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \ge 9$

áp dụng BĐT phụ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$ Với x,y > 0

Ta có BĐT cuối cùng luôn đúng

Vậy $(a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9$ (đpcm)

Iv / dùng phương pháp bắc cầu

1) Cho 0 < a, b,c <1 .Chứng minh rằng :

$$2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$$

Giải :

Do a <1 $\Rightarrow$ $a^2<1$ và b <1 Nên $(1-a^2).(1-b^2) > 0 \Rightarrow 1+a^2b-a^2-b > 0$

Hay $1+a^2b > a^2+b$ (1)

Mặt khác 0 <a,b <1 $\Rightarrow$ $a^2 > a^3$; $b > b^3$ $\Rightarrow$ $1+a^2 > a^3+b^3$

Vậy $a^3+b^3 < 1+a^2b$

Tương tự ta có : $b^3+c^3 < 1+b^2c$

$a^3+c^3 < 1+c^2a$

$\Rightarrow \ 2a^3+2b^3+2c^3 < 3+a^2b+b^2c+c^2a$ (đpcm)

2) So sánh 31^{11} và 17^{14}

Giải :

Ta thấy $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56}$

Mặt khác $2^{56} = 2^{4.14} = \left(2^4\right)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$

Vởy $31^{11} < 17^{14}$ (đpcm)

V/ dùng tính chất tỉ số

ví dụ 4: Cho 4 số a,b,c,d bất kỳ, chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

ta có ac + bd $\le \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}$

mà $(a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2 \le \left(a^2+b^2\right)+2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{c^2+d^2}+c^2+d^2$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}$$