**129.** *Cách 1* : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Ta có :

$$\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2 \le \left(x^2-y^2\right)\left(1-y^2+1-x^2\right).$$

Đặt $x^2 + y^2 = m$, ta được : $1^2 \le m(2 - m) \Rightarrow (m - 1)^2 \le 0 \Rightarrow m = 1$ (đpcm).

*Cách 2* : Từ giả thiết : $x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}$ . Bình phương hai vế :

$$x^2(1 - y^2) = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2(1 - x^2) \Rightarrow x^2 = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2$$

$$0 = (y - \sqrt{1-x^2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 .$$

**130.** Áp dụng $|A| + |B| \ge |A + B|$. $\min A = 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$ .

**131.** Xét $A^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ . Do $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 2 \le 2 + 2\sqrt{1-x^2} \le 4$

$$\Rightarrow 2 \le A^2 \le 4.\ \min A = \sqrt{2} \text{ với } x = \pm 1,\ \max A = 2 \text{ với } x = 0.$$

**132.** Áp dụng bất đẳng thức : $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ (bài 23)

$$A = \sqrt{x^2+1^2} + \sqrt{(1-x)^2+2^2} \ge \sqrt{(x+1-x)^2+(1+2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\min A = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

**133.** Tập xác định : $\begin{cases} -x^2+4x+12 \ge 0 \\ -x^2+2x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(6-x) \ge 0 \\ (x+1)(3-x) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$ (1)

Xét hiệu : $(- x^2 + 4x + 12)(- x^2 + 2x + 3) = 2x + 9$. Do (1) nên $2x + 9 > 0$ nên $A > 0$.

Xét : $A^2 = \left(\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}\right)^2$ . Hiển nhiên $A^2 \ge 0$ nhưng dấu “ = ” không xảy ra (vì $A > 0$). Ta biến đổi $A^2$ dưới dạng khác :

$$A^2 = (x + 2)(6 - x) + (x + 1)(3 - x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} =$$

$$= (x + 1)(6 - x) + (6 - x) + (x + 2)(3 - x) - (3 - x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)}$$

$$= (x + 1)(6 - x) + (x + 2)(3 - x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} + 3$$

$$= \left(\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}\right)^2 + 3 .$$

$$A^2 \ge 3. \text{ Do } A > 0 \text{ nên } \min A = \sqrt{3} \text{ với } x = 0.$$

**134.** **a)** Điều kiện : $x^2 \le 5$.

* Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A^2 = (2x + 1.\sqrt{5-x^2})^2 \le (2^2 + 1^1)(x^2 + 5 - x^2) = 25 \;\Rightarrow\; A^2 \le 25.$$

$$A^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \sqrt{5-x^2} \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 4(5-x^2) \\ x^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Với x = 2 thì A = 5. Vậy max A = 5 với x = 2.

* Tìm giá trị nhỏ nhất : Chú ý rằng tuy từ $A^2 \le 25$, ta có $-5 \le x \le 5$, nhưng không xảy ra $A^2 = -5$. Do tập xác định của A, ta có $x^2 \le 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$. Do đó : $2x \ge -2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5-x^2} \ge 0$. Suy ra : $A = 2x + \sqrt{5-x^2} \ge -2\sqrt{5}$. Min $A = -2\sqrt{5}$ với $x = -\sqrt{5}$

**b)** Xét biểu thức phụ | A | và áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacôpxki và Cauchy :

$$|A| = |x|\left(\sqrt{99}.\sqrt{99} + 1.\sqrt{101-x^2}\right) \le |x|\sqrt{(99+1)(99+101-x^2)} = |x|.10.\sqrt{200-x^2} <$$

$$< 10.\frac{x^2 + 200 - x^2}{2} = 1000$$

$$|A| = 1000 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 101 \\ \dfrac{\sqrt{99}}{1} = \dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{101-x^2}} \\ x^2 = 200 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 10. \text{ Do đó : } -1000 < A < 1000.$$

min A = - 1000 với x = - 10 ; max A = 1000 với x = 10.

**135.** *Cách 1* : $A = x + y = 1.(x+y) = \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}\right)(x+y) = a + \dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} + b$.

Theo bất đẳng thức Cauchy với 2 số dương : $\dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} \ge 2\sqrt{\dfrac{ay}{x}.\dfrac{bx}{y}} = 2\sqrt{ab}$.

Do đó $A \ge a + b + 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

$$\min A = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \text{ với } \begin{cases} \dfrac{ay}{x} = \dfrac{bx}{y} \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y} = 1 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+\sqrt{ab} \\ y = b+\sqrt{ab} \end{cases}$$

*Cách 2* : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A = (x+y).1 = (x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right) \geq \left(\sqrt{x.\frac{a}{x}}+\sqrt{y.\frac{b}{y}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

Từ đó tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

**136.** $A = (x+y)(x+z) = x^2 + xz + xy + yz = x(x+y+z) + yz \geq 2\sqrt{xyz(x+y+z)} = 2$

$$\min A = 2 \text{ khi chẳng hạn } y = z = 1,\ x = \sqrt{2} - 1.$$

**137.** Theo bất đẳng thức Cauchy : $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\dfrac{xy}{z}.\dfrac{yz}{x}} = 2y$.

Tương tự : $\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y} \geq 2z$ ; $\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z} \geq 2x$. Suy ra $2A \geq 2(x+y+z) = 2$.

$$\min A = 1 \text{ với } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

**138.** Theo bài tập 24 : $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\ ;\ \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}\ ;\ \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \text{ nên } \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

**139. a)** $A = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = 2a+2b \leq 2$.

$$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

**b)** Ta có : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4 \leq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4 + \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^4 = 2(a^2+b^2+6ab)$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^4 \le 2(a^2+c^2+6ac)\ ;\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{d}\right)^4 \le 2(a^2+d^2+6ad)$$

Tương tự : $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4 \le 2(b^2+c^2+6bc)\ ;\ \left(\sqrt{b}+\sqrt{d}\right)^4 \le 2(b^2+d^2+6bd)$

$$\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^4 \le 2(c^2+d^2+6cd)$$

Suy ra : $B \le 6(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd) = 6(a+b+c+d)^2 \le 6$

$$\max B = 6 \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=\sqrt{d}\\ a+b+c+d=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$$

**140.** $A = 3^x + 3^y \ge 2.\sqrt{3^x.3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 2.\sqrt{3^4} = 18$. min A = 18 với x = y = 2.

**141.** Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b \ge c + d$. Từ giả thiết suy ra :

$$b+c \ge \frac{a+b+c+d}{2}.$$

$$A = \frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b} = \frac{b+c}{c+d} - \left(\frac{c}{c+d}-\frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{a+b+c+d}{2(c+d)} - \left(\frac{c+d}{c+d}-\frac{c+d}{a+b}\right)$$

Đặt $a + b = x$ ; $c + d = y$ với $x \ge y > 0$, ta có :

$$A \ge \frac{x+y}{2y}-\frac{y}{y}+\frac{y}{x} = \frac{x}{2y}+\frac{1}{2}-1+\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{2y}+\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2} \ge 2.\sqrt{\frac{x}{2y}.\frac{y}{x}}-\frac{1}{2} = \sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

$\min A = \sqrt{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow d = 0\ ,\ x = y\sqrt{2}\ ,\ b+c \ge a+d$ ; chẳng hạn khi

$$a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1, c=2, d=0$$

**142.** **a)** $(x-3)^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{3})^2 = 0$. Đáp số : x = 3.

**b)** Bình phương hai vế, đưa về : $(x^2 + 8)(x^2 – 8x + 8) = 0$. Đáp số : $x = 4 + 2\sqrt{2}$.

**c)** Đáp số : x = 20.

**d)** $\sqrt{x-1} = 2+\sqrt{x+1}$. Vế phải lớn hơn vế trái. Vô nghiệm.

**e)** Chuyển vế : $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 1+\sqrt{x-1}$. Bình phương hai vế. Đáp số : x = 1.

**g)** Bình phương hai vế. Đáp số : $\frac{1}{2} \le x \le 1$

**h)** Đặt $\sqrt{x-2}$ = y. Đưa về dạng $|y-2|+|y-3| = 1$. Chú ý đến bất đẳng thức :

$$|y-2|+|3-y| \ge |y-2+3-y| = 1.$$ Tìm được $2 \le y \le 3$. Đáp số : $6 \le x \le 11$.

**i)** Chuyển vế : $\sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1-\sqrt{x}$, rồi bình phương hai vế. Đáp : x = 0 (chú ý loại x = $\frac{16}{25}$)

**k)** Đáp số : $\frac{16}{25}$ .

**l)** Điều kiện : x ≥ 1 hoặc x = - 1. Bình phương hai vế rồi rút gọn :

$$2\sqrt{2(x+1)^2(x+3)(x-1)} = x^2-1.$$

Bình phương hai vế : $8(x + 1)^2(x + 3)(x – 1) = (x + 1)^2(x – 1)^2 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x – 1)(7x + 25) = 0$

$$x = -\frac{25}{7}$$ loại. Nghiệm là : $x = \pm 1$.

**m)** Vế trái lớn hơn x, vế phải không lớn hơn x. Phương trình vô nghiệm.

**n)** Điều kiện : x ≥ - 1. Bình phương hai vế, xuất hiện điều kiện x ≤ - 1. Nghiệm là : x = - 1.

**o)** Do x ≥ 1 nên vế trái lớn hơn hoặc bằng 2, vế phải nhỏ hơn hoặc bằng 2. Suy ra hai vế bằng 2, khi đó x = 1, thỏa mãn phương trình.

**p)** Đặt $\sqrt{2x+3+\sqrt{x+2}} = y$ ; $\sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}} = z$ (1). Ta có :

$$y^2-z^2 = 1+2\sqrt{x+2} \ ; \ y+z = 1+2\sqrt{x+2}.$$ Suy ra y – z = 1.

Từ đó $z = \sqrt{x+2}$ (2). Từ (1) và (2) tính được x. Đáp số : x = 2 (chú ý loại x = - 1).

**q)** Đặt $2x^2 – 9x + 4 = a \ge 0$ ; $2x – 1 \ge b \ge 0$. Phương trình là : $\sqrt{a}+3\sqrt{b} = \sqrt{a+15b}$ . Bình phương hai vế rồi rút gọn ta được : b = 0 hoặc b = a. Đáp số : $\frac{1}{2}$ ; 5

**144.** Ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

Vậy :

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2(\sqrt{4}-\sqrt{3})+...+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) =$$

$$= 2(\sqrt{n+1}-1) \quad \text{(đpcm).}$$

**150.** Đưa các biểu thức dưới dấu căn về dạng các bình phương đúng. M = -2

**151.** Trục căn thức ở mẫu từng hạng tử. Kết quả : A = $\sqrt{n}$ - 1.

**152.** Ta có : $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}} = -(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}) \Rightarrow P = -(\sqrt{2}+\sqrt{2n+1})$.

P không phải là số hữu tỉ (chứng minh bằng phản chứng).

**153.** Ta hãy chứng minh : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow A = \dfrac{9}{10}$

**154.** $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}.n = \sqrt{n}$.

**155.** Ta có a + 1 = $\sqrt{17}$. Biến đổi đa thức trong ngoặc thành tổng các lũy thừa cơ số a + 1

$$A = [(a+1)^5 - 3(a+1)^4 - 15(a+1)^3 + 52(a+1)^2 - 14(a+1)]^{2000}$$

$$= (259\sqrt{17} - 225\sqrt{17} - 34\sqrt{17} - 1)^{2000} = 1.$$

**156.** Biến đổi : $\sqrt{a}-\sqrt{a-1} = \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$ ; $\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3} = \dfrac{1}{\sqrt{a-2}+\sqrt{a-3}}$.

**157.** $x^2 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{2} = x^2 - x + \dfrac{1}{4} + x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \ge 0$.

Dấu " = " không xảy ra vì không thể có đồng thời : $x = \dfrac{1}{2}$ và $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$.

**168.** Trước hết ta chứng minh : $a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$ (*) $(a+b \ge 0)$

Áp dụng (*) ta có : $S = \sqrt{x-1}+\sqrt{y-2} \le \sqrt{2(x-1+y-2)} = \sqrt{2}$

$$\max S = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = y-2 \\ x+y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

* Có thể tính $S^2$ rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

**180.** Ta phải có $|A| \le \sqrt{3}$. Dễ thấy A > 0. Ta xét biểu thức : $B = \dfrac{1}{A} = 2 - \sqrt{3-x^2}$. Ta có :

$$0 \le \sqrt{3-x^2} \le \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \le -\sqrt{3-x^2} \le 0 \Rightarrow 2-\sqrt{3} \le 2-\sqrt{3-x^2} \le 2.$$

$\min B = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $\max A = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\max B = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Khi đó min A = $\dfrac{1}{2}$

**181.** Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta xét biểu thức : $B = \dfrac{2x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x}$. Khi đó :

$$B \ge 2\sqrt{\frac{2x}{1-x}.\frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}.\ B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{1-x}{x} & (1) \\ 0 < x < 1 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) : $2x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow |x\sqrt{2}| = |1-x|$. Do $0 < x < 1$ nên $x\sqrt{2} = 1-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

Như vậy $\min B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ ta xét hiệu : $A - B = \left(\dfrac{2}{1-x} + \dfrac{1}{x}\right) - \left(\dfrac{2x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x}\right) = \dfrac{2-2x}{1-x} + \dfrac{1-1+x}{x} = 2+1 = 3$

Do đó $\min A = 2\sqrt{2} + 3$ khi và chỉ khi $x = \sqrt{2} - 1$.

**182. a)** Điều kiện : $x \ge 1$ , $y \ge 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm giảm một tổng :

$\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ . Ở đây ta muốn làm tăng một tổng. Ta dùng bất đẳng thức :

$a + b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \le \sqrt{2(x-1+y-3)} = \sqrt{2}$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x+y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Cách khác : Xét $A^2$ rồi dùng bất đẳng thức Cauchy.

**b)** Điều kiện : $x \ge 1$ , $y \ge 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm trội một tích : $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$

Ta xem các biểu thức $\sqrt{x-1}$ , $\sqrt{y-2}$ là các tích :

$\sqrt{x-1} = \sqrt{1.(x-1)}$ , $\sqrt{y-2} = \dfrac{\sqrt{2(y-2)}}{\sqrt{2}}$

Theo bất đẳng thức Cauchy : $\frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{1.(x-1)}}{x} \le \frac{1+x-1}{2x} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{y-2}}{y} = \frac{\sqrt{2.(y-2)}}{y\sqrt{2}} \le \frac{2+y-2}{2y\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\max B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

**183.** $a = \frac{1}{\sqrt{1997}+\sqrt{1996}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{1998}+\sqrt{1997}}$. Ta thấy

$\sqrt{1997}+\sqrt{1996} < \sqrt{1998}+\sqrt{1997}$

Nên $a < b$.

**184.** **a)** min A = $5 - 2\sqrt{6}$ với x = 0. max A = $\frac{1}{5}$ với x = ± $\sqrt{6}$.

**b)** min B = 0 với x = 1 ± $\sqrt{5}$. max B = $\sqrt{5}$ với x = 1

**185.** Xét $-1 \le x \le 0$ thì $A \le 0$. Xét $0 \le x \le 1$ thì $A = \sqrt{x^2(1-x^2)} \le \frac{x^2+(1-x^2)}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\max A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1-x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**186.** $A = |x-y| \ge 0$, do đó A lớn nhất khi và chỉ khi $A^2$ lớn nhất. Theo bđt Bunhiacôpxki :

$$A^2 = (x-y)^2 = \left(1.x - \frac{1}{2}.2y\right)^2 \le \left(1+\frac{1}{4}\right)(x^2+4y^2) = \frac{5}{4}$$

$$\max A = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = -\frac{1}{2} \\ x^2+4y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

**187.** **a)** *Tìm giá trị lớn nhất* : Từ giả thiết :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \le x^2 \\ y^3 \le y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + y^3 \le x^2 + y^2 = 1$$

$$\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x^2 \\ y^3 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 1 \ \text{V} \ x = 1, y = 0$$

**b)** *Tìm giá trị nhỏ nhất* : $(x + y)^2 \le 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \le \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{x+y}{\sqrt{2}} \le 1$. Do đó :

$x^3 + y^3 \ge \dfrac{(x^3+y^3)(x+y)}{\sqrt{2}}$. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$(x^3 + y^3)(x + y) = \left[\left(\sqrt{x^3}\right)^2 + \left(\sqrt{y^3}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2\right] \ge \left(\sqrt{x^3}.\sqrt{x} + \sqrt{y^3}.\sqrt{y}\right)^2 = (x^2 + y^2) = 1$$

$$\min A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**188.** Đặt $\sqrt{x} = a$ ; $\sqrt{y} = b$, ta có a, b $\ge 0$, $a + b = 1$.

$$A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab = 1 - 3ab.$$

Do $ab \ge 0$ nên $A \le 1$. max A = 1 $\Leftrightarrow$ a = 0 hoặc b = 0 $\Leftrightarrow$ x = 0 hoặc x = 1, y = 0.

Ta có $ab \le \dfrac{(a+b)^2}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow ab \le \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - 3ab \ge \dfrac{1}{4}$. $\min A = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{4}$

**189.** Điều kiện : $1 - x \ge 0$ , $2 - x \ge 0$ nên $x \le 1$. Ta có :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - |x-2|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-1)(x-2)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 3 \Leftrightarrow x = -8.$$

**190.** Ta có : $6 + 4x + 2x^2 = 2(x^2 + 2x + 1) + 4 = 2(x + 1)^2 + 4 > 0$ với mọi x. Vậy phương trình xác định với mọi giá trị của x. Đặt $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = y \ge 0$, phương trình có dạng :

$$y^2 - y\sqrt{2} - 12 = 0 \Leftrightarrow (y - 3\sqrt{2})(y + 2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \ \ (\text{loai vì } y \ge 0 \end{array}\right.$$

Do đó $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 18 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 3 ; x = -5$ .

**191.** Ta có :

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k}.\frac{1}{(k+1)k} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$= \left(1+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$. Do đó : $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Vậy :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+...+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2$ (đpcm).

**192.** Dùng bất đẳng thức Cauchy $\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{2}{a+b}$ (a, b > 0 ; a ≠ 0).

**193.** Đặt $x - y = a$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) Nếu $b = 0$ thì $x = y = 0$, do đó $\sqrt{x}$, $\sqrt{y} \in \mathbf{Q}$.

b) Nếu $b \neq 0$ thì $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ (2).

Từ (1) và (2) : $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right) \in Q$ ; $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b-\frac{a}{b}\right) \in Q$.

**199.** Nhận xét : $\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right) = a^2$. Do đó :

$$2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \le \frac{5a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (1) \Leftrightarrow 2\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \le \frac{5\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Do $a \neq 0$ nên : $\sqrt{x^2+a^2}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \ge 0$. Suy ra : $\sqrt{x^2+a^2}+x > 0$, $\forall x$.

Vì vậy : (1) $\Leftrightarrow$

$$2\sqrt{x^2+a^2} \le 5\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right) \Leftrightarrow 5x \le 3\sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ 25x^2 \le 9x^2+9a^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ 0 < x \le \frac{3}{4}|a| \end{array}\right. \Leftrightarrow x \le \frac{3}{4}|a|.$$

**207. c)** Trước hết tính x theo a được $x = \dfrac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}$. Sau đó tính $\sqrt{1+x^2}$ được $\dfrac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}$.

Đáp số : B = 1.

**d)** Ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$. Tương tự :

$b^2 + 1 = (b + a)(b + c)$ ; $c^2 + 1 = (c + a)(c + b)$. Đáp số : M = 0.

**208.** Gọi vế trái là A > 0. Ta có $A^2 = \dfrac{2x+4}{\sqrt{x}}$. Suy ra điều phải chứng minh.

**209.** Ta có : $a + b = -1$, $ab = -\dfrac{1}{4}$ nên : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{9} = \frac{17}{8}\ ;\ a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$$

Do đó : $a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b) = -\dfrac{7}{4}.\dfrac{17}{8} - \left(-\dfrac{1}{64}\right)(-1) = -\dfrac{239}{64}$.

**210. a)** $a^2 = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$.

$$a^3 = (\sqrt{2}-1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}.$$

**b)** *Theo khai triển Newton* : $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$ ; $(1 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ với $A, B \in N$

Suy ra : $A^2 - 2B^2 = (A + B\sqrt{2})(A - B\sqrt{2}) = [(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})]^n = (-1)^n$.

Nếu n chẵn thì $A^2 - 2b^2 = 1$ (1). Nếu n lẻ thì $A^2 - 2B^2 = -1$ (2).

**Bây giờ ta xét $a^n$**. Có hai trường hợp :

* *Nếu n chẵn thì* : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2}$. Điều kiện $A^2 - 2B^2 = 1$ được thỏa mãn do (1).

* *Nếu n lẻ thì* : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$. Điều kiện $2B^2 - A^2 = 1$ được thỏa mãn do (2).

**211.** Thay $a = \sqrt{2}$ vào phương trình đã cho : $2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(b + 2) = -(2a + c).$$

Do a, b, c hữu tỉ nên phải có b + 2 = 0 do đó 2a + c = 0. Thay b = - 2 , c = - 2a vào phương trình đã cho :

$$x^3 + ax^2 - 2x - 2a = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) + a(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x + a) = 0.$$

Các nghiệm phương trình đã cho là: $\pm\sqrt{2}$ và - a.

**212.** Đặt $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

**a)** *Chứng minh* $A > 2\sqrt{n} - 3$ : **Làm giảm mỗi số hạng của A :**

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

Do đó $A > 2\left[\left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\sqrt{3} + \sqrt{4}\right) + ... + \left(-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\right] =$

$$= 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} > 2\sqrt{n+1} - 3 > 2\sqrt{n} - 3.$$

**b)** *Chứng minh* $A < 2\sqrt{n} - 2$ : **Làm trội mỗi số hạng của A :**

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

Do đó : $A < 2\left[\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) + ... + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right)\right] = 2\sqrt{n} - 2.$

**213.** Kí hiệu $a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ có n dấu căn. Ta có :

$$a_1 = \sqrt{6} < 3 ; a_2 = \sqrt{6 + a_1} < \sqrt{6+3} = 3 ; a_3 = \sqrt{6 + a_2} < \sqrt{6+3} = 3 ... a_{100} = \sqrt{6 + a_{99}} < \sqrt{6+3} = 3$$

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$.

**214. a)** <u>*Cách 1*</u> (tính trực tiếp) : $a^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

Ta có $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ nên $6 < 4\sqrt{3} < 7 \Rightarrow 13 < a^2 < 14$. Vậy $[a^2] = 13$.

<u>*Cách 2*</u> (tính gián tiếp) : Đặt $x = (2 + \sqrt{3})^2$ thì $x = 7 + 4\sqrt{3}$ .

Xét biểu thức $y = (2 - \sqrt{3})^2$ thì $y = 7 - 4\sqrt{3}$. Suy ra $x + y = 14$.

Dễ thấy $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < (2 - \sqrt{3})^2 < 1$, tức là $0 < y < 1$. Do đó $13 < x < 14$.

Vậy $[x] = 13$ tức là $[a^2] = 13$.

**b)** Đáp số : $[a^3] = 51$.

**215.** Đặt $x - y = a$ ; $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$   (1) thì a và b là số hữu tỉ. Xét hai trường hợp :

**a)** Nếu $b \neq 0$ thì $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{a}{b}$ là số hữu tỉ  (2). Từ (1) và (2) ta có :

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ ; } \sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ.}$$

**b)** Nếu b = 0 thì x = y = 0, hiển nhiên $\sqrt{x}$ , $\sqrt{y}$ là số hữu tỉ.

**216.** Ta có

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$ Từ đó ta giải được bài toán.

**217.** Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \ldots. < a_{25}$. Suy ra : $a_1 \geq 1$ , $a_2 \geq 2$ , …

$a_{25} \geq 25$. Thế thì : $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{25}}$   (1). Ta lại có :

$$\frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + \ldots. + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{25}+\sqrt{25}} + \frac{2}{\sqrt{24}+\sqrt{24}} + \ldots. + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + 1 <$$

$$< \frac{2}{\sqrt{24}+\sqrt{24}} + \frac{2}{\sqrt{23}+\sqrt{23}} + \ldots. + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + 1 = 2\left(\sqrt{25} - \sqrt{24} + \sqrt{24} - \sqrt{23} + \ldots. + \sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + 1 =$$

$$= 2\left(\sqrt{25} - \sqrt{1}\right) + 1 = 9 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}} + \ldots. + \dfrac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số $a_1$ , $a_2$ , … , $a_{25}$.

**218.** Điều kiện : $0 \leq x \leq 4$. Đặt $\sqrt{2+\sqrt{x}} = a \geq 0$ ; $\sqrt{2-\sqrt{x}} = b \geq 0$.

Ta có : $ab = \sqrt{4-x}$ , $a^2 + b^2 = 4$. Phương trình là : $\dfrac{a^2}{\sqrt{2}+a} + \dfrac{b^2}{\sqrt{2}-b} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{2} - a^2b + b^2\sqrt{2} + ab^2 = \sqrt{2}(2 - b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - ab)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(a^2 + b^2 - 2 + ab) - ab(a - b) = 2(a - b)$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}\,(2 + ab) = (a – b)(2 + ab) \quad (\text{chú ý}: a^2 + b^2 = 4)$$

$$\Rightarrow\ a – b = \sqrt{2} \quad (\text{do } ab + 2 \neq 0)$$

Bình phương : $a^2 + b^2 – 2ab = 2 \Rightarrow 2ab = 2 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow \sqrt{4-x} = 1$. Tìm được $x = 3$.

**219.** Điều kiện : $0 < x \le 1$ , $a \ge 0$. Bình phương hai vế rồi thu gọn : $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Với $a \ge 1$, bình phương hai vế, cuối cùng được : $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$.

Điều kiện $x \le 1$ thỏa mãn (theo bất đẳng thức Cauchy).

Kết luận : Nghiệm là $x = \dfrac{2\sqrt{a}}{a+1}$. Với $a \ge 1$.

**220.** Nếu $x = 0$ thì $y = 0$, $z = 0$. Tương tự đối với y và z. Nếu $xyz \neq 0$, hiển nhiên $x, y, z > 0$

Từ hệ phương trình đã cho ta có : $\sqrt{x} = \dfrac{2y}{1+y} \le \dfrac{2y}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$.

Tương tự $\sqrt{y} \le \sqrt{z}$ ; $\sqrt{z} \le \sqrt{x}$ . Suy ra $x = y = z$. Xảy ra dấu “ = ” ở các bất đẳng thức trên với $x = y = z = 1$. Kết luận : Hai nghiệm $(0 ; 0 ; 0)$ , $(1 ; 1 ; 1)$.

**221. a)** Đặt $A = (8 + 3\sqrt{7})^7$. Để chứng minh bài toán, chỉ cần tìm số B sao cho $0 < B < \dfrac{1}{10^7}$ và $A + B$ là số tự nhiên.

Chọn $B = (8 - 3\sqrt{7})^7$. Dễ thấy $B > 0$ vì $8 > 3\sqrt{7}$. Ta có $8 + 3\sqrt{7} > 10$ suy ra :

$$\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^7} < \frac{1}{10^7} \Rightarrow \left(8-3\sqrt{7}\right)^7 < \frac{1}{10^7}$$

Theo khai triển Newton ta lại có : $A = (8 + 3\sqrt{7})^7 = a + b\sqrt{7}$ với $a, b \in N$.

$B = (8 - 3\sqrt{7})^7 = a - b\sqrt{7}$. Suy ra $A + B = 2a$ là số tự nhiên.

Do $0 < B < \dfrac{1}{10^7}$ và $A + B$ là số tự nhiên nên A có bảy chữ số 9 liền sau dấu phẩy.

*Chú ý* : $10^{-7} = 0{,}0000001$.

**b)** Giải tương tự như câu a.