+ Nếu $f(2)>0$, thì ta thấy $f(a)=0$ hoặc $f(a)=1$. Thật vậy, nếu $f(a)>1$, thì bằng cách cho $k\to+\infty$, ta thấy $2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k-1\right]\to+\infty$ nên (1) không thể xảy ra, còn nếu $0<f(a)<1$, thì với k đủ lớn, $2f(a)^k\left[f(2)f(a)^k-1\right]<0$ nên (1) cũng không thể xảy ra. Thành thử, ta đã chứng minh được với mọi a, thì $f(a)=0$ hoặc $f(a)=1$.

Từ đó suy ra $2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\in\{0;1;2\};\ \forall x,y\in\mathbf{Z}$. (2)

Do đó, $n\le 2$.

*)Nếu $n=0$, thì $2f(x^2+y^2)=f(x)+f(y);\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$.

Vì f khác hằng nên tồn tại $x_0\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(x_0)\neq 0$. Khi đó,

$$f(x_0)=f(x_0)f(1)\Rightarrow f(1)=1.$$

Do f khác hằng nên tồn tại $x_1\in\mathbb{Z}$ sao cho $f(x_1)\neq 1$. Từ i), ta có

$$f(0)=f(x_1).f(0)\Rightarrow f(0)=0.$$

Bây giờ, sử dụng (2), ta được

$$2=2f(1^2+0^2)=f(1)+f(0)=1.$$

Điều vô lí này chứng tỏ $n=0$ không thỏa mãn.

*)Nếu $n=1$, thì hàm số

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x=0\\ 1 & \text{nếu } x\neq 0\end{cases}$$

thỏa mãn đề bài. Do đó, $n=1$ thỏa mãn đề bài.

*)Nếu $n=2$, thì ta thấy không thể tồn tại 2 số $p,q\in\mathbf{Z};(p,q)=1$ sao cho $f(p^2+q^2)=0$. Thật vậy, nếu trái lại, thì $\forall x,y\in\mathbf{Z}$, ta có

$$\begin{aligned}0=f(p^2+q^2)f(x^2+y^2)&=f\left((p^2+q^2)(x^2+y^2)\right)\\&=f\left((xp+yq)^2+(xq-yp)^2\right)\end{aligned}$$

Kết hợp với (2) suy ra $f(xp+yq)=f(xq-yp)=0$. Thế nhưng, do $(p,q)=1$ nên tồn tại $x,y\in\mathbf{Z}$ để $xp+yq=1$. Do đó, $1=f(xp+yq)=0$. Điều vô lí này chứng tỏ

$$f(x^2+y^2)=1;\ \forall x,y\in\mathbf{Z};(x,y)=1.$$

Bây giờ, ta xét hàm số

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{nếu } \left[\begin{array}{l}p\mid x\\ q\mid x\end{array}\right.\\ 1 & \text{nếu } \begin{cases}p\nmid x\\ q\nmid x\end{cases}\end{cases}$$

trong đó p,q là 2 số nguyên tố phân biệt có dạng $4k+3$.

Ta sẽ chứng minh hàm $f(x)$ xây dựng như trên thỏa mãn

i) $f(xy)=f(x)f(y);\ \forall x,y\in\mathbf{Z}$

ii) $\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)\mid x,y\in\mathbf{Z}\}=\{0;1;2\}$

-Kiểm tra điều kiện i)

Nếu $\left[\begin{array}{l}p\mid xy\\ q\mid xy\end{array}\right.$ thì hiển nhiên $f(xy)=0=f(x)f(y)$.

Nếu $\begin{cases}pq\nmid x\\ pq\nmid y\end{cases}$ thì $f(xy)=1=f(x)f(y)$

-Kiểm tra điều kiện ii)

Vì $f(x)\in\{0;1\}$ nên $\left\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)|\ x,y\in\mathbf{Z}\right\}\subseteq\{0;1;2\}$

Dễ thấy $\begin{cases}2f(1+p^2)-f(1)-f(p)=1\\ 2f(p^2+q^2)-f(p)-f(q)=2\\ 2f(0)-f(0)-f(0)=0\end{cases}$ nên

$$\left\{2f(x^2+y^2)-f(x)-f(y)|\ x,y\in\mathbf{Z}\right\}=\{0;1;2\}$$

Vậy $n=1, n=2$ là tất cả các giá trị thỏa mãn đề bài.

Bài 38. Xác định hàm số $f(x)$ liên tục $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ là tập hợp các số thực dương) thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

1) $f(2x)=2f(x)$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$,
2) $f(f^3(x)(e^{f(x)}-1))=x^2(e^x-1)f(x)$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$,
3) $f(e-1)=(e-1)f(1)$,
4) $f(k)$ là số nguyên dương với mọi số nguyên dương k.

Hướng dẫn giải

Với $a,b\in\mathbf{R}^+$ và $f(a)=f(b)$, suy ra $f^3(a)(e^{f(a)}-1)=f^3(b)(e^{f(b)}-1)$. Do đó

$$f(f^3(a)(e^{f(a)}-1))=f(f^3(b)(e^{f(b)}-1)).$$

Hay $a^2(e^a-1)f(a)=b^2(e^b-1)f(b)$. Vì $f(a)=f(b)>0$ nên ta suy ra $a^2(e^a-1)=b^2(e^b-1)$.

Xét hàm số $h(x)=x^2(e^x-1)$ trên $\mathbf{R}^+$, ta có $h'(x)=2x(e^x-1)+x^2e^x>0$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$. Do đó hàm số $h(x)=x^2(e^x-1)$ đồng biến trên $\mathbf{R}^+$. Do đó từ $a^2(e^a-1)=b^2(e^b-1)$, ta suy ra $h(a)=h(b)$ hay $a=b$.

Vậy $f(x)$ là đơn ánh. Kết hợp với $f(x)$ liên tục ta suy ra $f(x)$ là hàm đơn điệu thực sự. Mặt khác, theo giả thiết $f(2)=2f(1)>f(1)$ nên ta suy ra $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên $\mathbf{R}^+$.

Từ 2) ta cho $x=1$ thì $f(f^3(1)(e^{f(1)}-1))=(e-1)f(1)$. Kết hợp với 3) ta suy ra

$$f(f^3(1)(e^{f(1)}-1))=f(e-1).$$

Vì $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên $\mathbf{R}^+$ nên ta suy ra $f^3(1)(e^{f(1)}-1)=e-1$.

Xét hàm số $g(x)=x^3(e^x-1)$ trên $\mathbf{R}^+$, ta có $g'(x)=3x^2(e^x-1)+x^3e^x>0$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$. Do đó hàm số $g(x)=x^3(e^x-1)$ đồng biến trên $\mathbf{R}^+$. Do đó từ $f^3(1)(e^{f(1)}-1)=e-1$, ta suy ra $g(f(1))=g(1)$ hay $f(1)=1$.

Vì $f(2x)=2f(x)$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$ và $f(1)=1$ nên theo quy nạp ta có $f(2^n)=2^n$ với mọi số tự nhiên n.

Với mọi số tự nhiên n, ta có

$$2^n=f(2^n)<f(2^n+1)<f(2^n+2)<\ldots<f(2^n+2^n-1)<f(2^{n+1})=2^{n+1}.$$

Vì điều kiện 4) nên $f(2^n+1), f(2^n+2),\ldots,f(2^n+2^n-1)$ đều là các số nguyên dương. Do đó ta suy ra $f(2^n+1)=2^n+1,\ f(2^n+2)=2^n+2,\ldots,f(2^n+2^n-1)=2^n+2^n-1$.

Vậy $f(n)=n$ với mọi số nguyên dương n.

Từ $f(2x)=2f(x)$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$. Ta suy ra $f(2^nx)=2^nf(x)$ với mọi $x\in\mathbf{R}^+$. Cho với mọi $x=\dfrac{m}{2^n}$ với mọi m,n là số nguyên dương ta suy ra $f(m)=2^nf(\dfrac{m}{2^n})$. Do đó $m=2^nf(\dfrac{m}{2^n})$ hay $f(\dfrac{m}{2^n})=\dfrac{m}{2^n}$ với mọi số nguyên dương m,n.

Với mỗi $x \in \mathbf{R}^+$ tùy ý cho trước đều tồn tại dãy số $\{q_k\}$, q_k có dạng $\dfrac{m}{2^n}$ hội tụ đến x . Vì $f(x)$ là hàm liên tục nên

$$x = \lim_{k\to\infty} q_k = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = f(\lim_{k\to\infty} q_k) = f(x).$$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn mọi điều kiện của bài ra.

Bài 39. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}\setminus\{-1;0;1\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i/ $f(m) = f(2015), f(m+1) = f(2016);$

ii/ $f(n+m) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $n = 1, 2, \ldots.$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(n+2m) = -\dfrac{1}{f(n)} \Rightarrow f(n+4m) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $m = 1$, ta có $f(n+4) = f(n) \Rightarrow f(n+4k) = f(n), \forall k, n \in \mathbb{N}^*$

$$f(n+2) = -\frac{1}{f(n)}; f(n+1) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$f(1) = f(2015) = f(4.503+3) = f(3) = -\frac{1}{f(1)} : \text{vô lý.}$$

Với $m = 2$, ta có $f(n+8) = f(n) \Rightarrow f(n+8k) = f(n), \forall n, k \in \mathbb{N}^*$

và $f(n+4) = -\dfrac{1}{f(n)}; f(n+2) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $f(2) = f(2015) = f(251.8+7) = f(7) = -\dfrac{1}{f(3)};$

$$f(3) = f(2016) = f(251.8+8) = f(8) = -\frac{1}{f(4)}$$

$$\Rightarrow f(2) = f(4) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1} \Rightarrow (f(2))^2 = -1$$

Điều mâu thuẫn trên dẫn đến $m \ge 3$.

Với $m = 3$, ta xây dựng được vô số hàm f thỏa yêu cầu bài toán như sau

Cho $a \in \mathbb{Q}\setminus\{-1;0;1\}$, đặt $f(1) = a; f(2) = \dfrac{1+a}{1-a}; f(3) = -\dfrac{1}{a};$

$$\text{và } f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \ge 1$$

Khi đó, chứng minh quy nạp thì hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$ và

$$f(n) \in \mathbb{Q}\setminus\{-1;0;1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

hơn nữa theo chứng minh trên

$$f(n+6) = -\frac{1}{f(n)}, f(n+12k) = f(n), \forall n, k \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó $f(2015)=f(167.12+11)=f(11)=-\frac{1}{f(5)}=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}=-\frac{1}{a}=f(3)$

$$f(2016)=f(167.12+12)=f(12)=-\frac{1}{f(6)}=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}=\frac{a-1}{a+1}=f(4)$$

Vậy hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 40. Tìm hàm $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \quad \forall x,y\in R.$$

Hướng dẫn giải

+)Cho x = y = 0 từ (*) $\Rightarrow$ f(0) = 0.

+)Thay x bởi y và y bởi x ta được:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y) \quad \forall x,y\in R$$

suy ra $f(x-y)=f(y-x)$, $\forall x,y\in R$ $\Rightarrow$ f(x) là hàm số chẵn.

+)Cho $x=y\to f(2x)=4f(x)$, CM quy nạp ta được $f(nx)=n^2f(x)$, $\forall x\in R,\forall n\in N^*$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n^2}f(x),\forall x\in R,\forall n\in N^* \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m^2}{n^2}f(x),\forall x\in R,\forall n,m\in N^*$$

hay $f(rx)=r^2f(x)$, $\forall x\in R,\forall r\in Q^+$,

+) Vì f(x) là hàm chẵn nên $f(rx)=r^2f(x)$, $\forall x\in R,\forall r\in Q$.

+) Vì f(x) liên tục trên R nên $f(\alpha x)=\alpha^2f(x)$, $\forall x\in R$, $\forall \alpha\in R$ $\Rightarrow$ $f(\alpha)=a\alpha^2$

Vậy $f(x)=ax^2$, với $a=f(1)$, $x\in R$.

Bài 41. Cho hàm $f:R_+\to R_+ \quad (R_+=\{x\in R|\ x\geq 0\})$ sao cho:

$$f(x^2)+f(y)=f(x^2+y+xf(4y))\ \forall x,y\geq 0$$

a) Chứng minh f là hàm tăng không nghiêm ngặt trên R_+

b) Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Hướng dẫn giải

a) Thay x=y=0 ta có f(0)=0.

Xét hàm $g(x)=x^2+f(4y)x$ là hàm đồng biến trên R_+ vì f(4y)>=0. Mà:

$g(0)=0; g(+\infty)=+\infty\Rightarrow \underset{x\geq 0}{TGT}\ g(x)=[0;+\infty)$ nên với mỗi số dương a bất kỳ luôn tồn tại x_0 để a= $g(x_0)$ > 0 . Do đó f(y+a) = $f(g(x_0)+y)$ >= f(y) với mọi số a dương. Chứng tỏ f là hàm tăng không nghiêm ngặt.

b) Xét hai trường hợp sau:

TH1: Tồn tại t > 0 để f(t) = 0.

$Thay\ \ x=\sqrt{t}\Rightarrow f(y)=f(y+t+\sqrt{t}f(4y))\geq f(t+y)$

$Mà\ \ f(t)\leq f(t+y)\Rightarrow f(y)=f(y+t)\ \ \forall y\geq 0$

$\Rightarrow f(0)=f(t)=f(2t)=...=f(nt)\ \forall n\in Z^+$

Kết hợpvới f(x) là hàm không giảm nên f(x) = 0 với mọi x không âm. Vì nếu ngược lại tồn tại u > 0 để f(u) > 0 thì luôn tồn tại n nguyên dương để nt > u nhưng f(nt) = 0 mâu thuẫn với tính không giảm của hàm f.

TH2: Với mọi số dương t có f(t) > 0. Theo chứng minh trên suy ra f là hàm tăng ngặt

Thay y bởi y^2 ta có: $f(x^2)+f(y^2)=f(x^2+y^2+xf(4y^2))$

Thay x bởi y, y bởi x^2:

$f(y^2)+f(x^2)=f(y^2+x^2+yf(4\sqrt{x}))$

Vì f tăng ngặt nên:

$$x^2+y^2+xf(4y^2)=y^2+x^2+yf(4\sqrt{x})\Rightarrow x(f(4y^2)=\mathrm{y}f(4\sqrt{x})\Rightarrow \frac{f(4y^2)}{y}=\frac{f(4\sqrt{x})}{x}=kf\ \forall x>0; y>0$$

$$\Rightarrow f(x)=k\sqrt{x}$$

Thử lại ta được k=1.

KL: Bài toán có hai nghiệm là

$f\left(x\right)=0;\ f(x)=\sqrt{x}.$

Bài 42. Tìm tất cả hàm f: R→R* liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x^2+2x)}=1 \qquad \forall x\in R.$$

Hướng dẫn giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow$ f(x)+f(x^2+2x) = f(x).f(x^2+2x)

$\Leftrightarrow$ [f(x)-1].[f$(x+1)^2$-1]=1

Thế x bởi x-1 ta [f(x-1)-1].[f(x^2-1)-1]=1

Đặt g(x)=f(x-1)-1 $\Rightarrow$ g liên tục trên R; g(x)≠1 ∀x∈R và g(x) g(x^2)=1 ∀x∈R (2)

Từ (2) ta có g(x) ≠0 1 ∀x∈R

Thay x bởi –x $\Rightarrow$ g(-x).g(x^2)=1-g(x).g(x^2) $\Rightarrow$g(-x)=g(x)

Vậy g là hàm chẵn x nên ta chỉ cần xét với x>0 trên R.

Từ (2) ta có: g(x) = = g(x^4)⇒ g(x)=g($x^{1/4}$) ∀x>0

Lấy a>0 tùy ý, xét dãy (x_n) xác định như sau:

x_0=a; $x_{n+1}=x_n^{1/4}$∀n∈N⇒Lim x_n=1

Và có g(x_n)=g($x_n^{1/4}$)=g(x_{n+1}) ∀x∈N⇒ g(x_n)=g(x_{n-1})=…=g(x_0)=g(a)

Vì g liên tục nên ta có g(x) =Lim g(x_n)=g(Lim x_n) = g(1)

Thay x=1 vào (2) ⇒g^2(1)=1 ⇒ g(1)=1 (vì g≠1) ⇒g(x) =1 ∀a>0 bất kì

⇒g(x)=1 ∀x∈R ⇒f(x)=2 ∀x∈R

Bài 43. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$xf\left(x+xy\right)=xf\left(x\right)+f\left(x^2\right)f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

$xf\left(x+xy\right)=xf\left(x\right)+f\left(x^2\right)f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$

Trong (1) lấy x = y = 0 được f(0) = 0.

Trong (1) lấy y = -1 ta có

$xf\left(x\right)+f\left(x^2\right)f\left(-1\right)=xf\left(0\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$

Trong (2) lấy x = -1 ta được:

$$f\left(1\right)f\left(-1\right)-f\left(-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(-1\right)=0\\ f\left(1\right)=1\end{array}\right.$$

+ Nếu $f\left(-1\right)=0$ thì từ (2) suy ra f đồng nhất 0 và hàm này thỏa mãn bài toán.

+ Nếu $f\left(1\right)=1$ thì trong (2) lại lấy x = 1 ta thu được $f\left(-1\right)=-1$.

Từ đó (2) trở thành : $f\left(x^2\right)=xf\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad (3)$

Trong (1) ta cho y = 1:

$xf\left(2x\right)=xf\left(x\right)+f\left(x^2\right)f\left(1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f\left(2x\right)=2f\left(x\right),\ \forall x\neq 0$

Kết hợp (1) và (3) ta được:

$f\left(x+xy\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)f\left(y\right),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0 \qquad (4)$

Từ (4) lần lượt lấy x = 1, x = -1 ta có: $f\left(1+y\right)=1+f\left(y\right),\ \forall y\in\mathbb{R}$

$$f\left(-1-y\right)=-1-f\left(y\right),\ \forall y\in\mathbb{R}$$

Như vậy hàm f là một hàm số lẻ.

Trong (4) thay y bởi -y và sử dụng tính lẻ của hàm f:

$f\left(x-xy\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)f\left(-y\right)=f\left(x\right)-f\left(x\right)f\left(y\right),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0 \qquad (5)$

Cộng vế theo vế (4) và (5) :

$f\left(x+xy\right)+f\left(x-xy\right)=2f\left(x\right)=f\left(2x\right),\ \forall y\in\mathbb{R},x\neq 0$

Mà f(0) = 0 nên ta có $f\left(x+xy\right)+f\left(x-xy\right)=2f\left(x\right)=f\left(2x\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Và bây giờ ta sẽ tính biểu thức $f\left(\left(x+1\right)^2\right)$ theo hai cách:

$f\left(\left(x+1\right)^2\right)=f\left(x^2+2x+1\right)=f\left(x^2\right)+f\left(2x\right)+f\left(1\right)=xf\left(x\right)+2f\left(x\right)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$f\left(\left(x+1\right)^2\right)=\left(x+1\right)f\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(f\left(x\right)+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Từ hai điều trên thu được:

$xf\left(x\right)+2f\left(x\right)+1=\left(x+1\right)\left(f\left(x\right)+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f\left(x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Thử lại thỏa. Kết luận của bài toán là: $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$; $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 44. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ sao cho với mọi x,y khác 0 và $x\neq y$ ta có

$$f(y)-f(x)=f(y).f\left(\frac{x}{x-y}\right).$$

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ta được PTH: $g(y)-g(x)=g(y)g\left(1-\frac{x}{y}\right)$ (1)

+ Cho y=1: $g(1)-g(x)=g(1)g\left(1-x\right)$. Suy ra $g(1)-g\left(\frac{x}{y}\right)=g(1)g\left(1-\frac{x}{y}\right)$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $g(y)-g(x)=g(y).\dfrac{g(1)-g\left(\frac{x}{y}\right)}{g(1)}\Rightarrow g(y)g\left(\frac{x}{y}\right)=g(x).g(1)$ (3), với mọi $x,y\neq 0;x\neq y$.

+ Trong (3) thay x bởi $y-x$, ta được: $g(y)g\left(1-\frac{x}{y}\right)=g(y-x).g(1)$ (4).

+ Từ (1), (4) suy ra $g(y)-g(x)=g(y-x).g(1)$. Từ đây suy ra $g(u+v)=g(u)+g(v).g(1)$ (5), với mọi $u,v\neq 0;u+v\neq 0$.

+ Từ (3) suy ra $g(xy)g(1)=g(x).g(y)$ với mọi $x,y\neq 0$ (6).

+ Hoán đổi vai trò của u,v trong (5) suy ra nếu $g(1)\neq 1$ thì $g(x)\equiv 0$ (mâu thuẫn). Do đó $g(1)=1$ và ta được: $g(u+v)=g(u)+g(v);g(uv)=g(u).g(v)$ với mọi $u,v\neq 0$.

Theo kết quả cơ bản ta được $g(x)=x$. Vậy $f(x)=\frac{1}{x}$ là hàm duy nhất cần tìm.

Bài 45. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) Với mọi cặp *a, b* nguyên dương không nguyên tố cùng nhau, ta có $f(a).f(b) = f(ab)$

ii) Với mọi bộ *a, b* nguyên dương tồn tại một tam giác không suy biến có độ dài ba cạnh là $f(a), f(b)$ và $f(a+b-1)$.

Hướng dẫn giải

Từ đk 2, với mọi bộ a, b nguyên dương, ta có

$f(a)+f(b)>f(a+b-1);$

$f(a)+f(a+b-1)>f(b);$

$f(a+b-1)+f(b)>f(a);$

$a=b=2: f(4)=f(2)^2; 2f(2)>f(3).$

$a=3; b=2: f(2)+f(3)>f(4)$

$f(2)^2=f(4)<f(2)+f(3)<f(2)+2f(2)=3f(2)$

$\Rightarrow f(2)=1$ or $f(2)=2.$

Nếu f(2)=1. Do $2f(2)>f(1) \to f(1)=1$.

Quy nạp chứng minh f(n)=1 với mọi n nguyên dương.

Cho $a=n, b=2: f(n+1)<f(n)+f(2)=2 \to f(n+1)=1$.

Nếu $f(2)=2$, bằng quy nạp chứng minh được $f(2^k)=f(2).f(2^{k-1})=....=f(2)^k=2^k$.

Do $f(4)-f(2)<f(3)<2f(2) \Rightarrow f(3)=3.$

Quy nạp chứng minh $f(n)=n$ với mọi $n \geq 2$.

Cho $a=n-1, b=2: f(n)<f(n-1)+f(2)=n+1 \to f(n) \leq n$.

Lấy r là số nguyên lớn nhất sao cho 2^r không vượt quá n.

Nếu 2^r=n thì theo chứng minh trên có f(n)=n

Nếu n= 2^r+s với $1 \leq s < 2^r$.

$a=n=2^r+s$; $b=2^r-s+1.$

Ta có $f(2^r-s+1)=2^r-s+1 \Rightarrow f(n)+f(2^r-s+1)>f(2^r+s+2^r-s+1-1)$

$f(n)>f(2^{r+1})-f(2^r-s+1)=2^{r+1}-(2^r-s+1)=2^r+s-1=n-1$

$\Rightarrow f(n) \geq n$

$f(n)=n \ \forall n \geq 2.$.

Do $f(1)<2f(2)=4$ nên f(1) bằng 1, 2 hoặc 3.

Vậy f(n)=1 với mọi n nguyên dương hoặc $f(n)=n \ \forall n \geq 2.$; $f(1) \in \{1;2;3\}$