Ta có: $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{BH}{CK}=\dfrac{dt(\Delta ABM)}{dt(\Delta ACM)}=\dfrac{AB.\sin(\widehat{ABM})}{AC.\sin(\widehat{ACM})}$

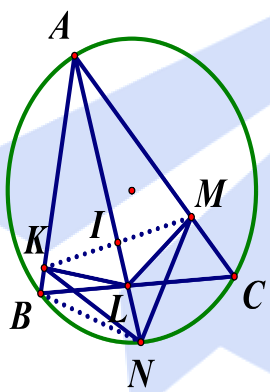
$\sin(\widehat{ABM})=\sin(\widehat{ACB})=\dfrac{2dt(\Delta ABC)}{BC.CA}$ Tương tự: $\sin(\widehat{ACM})=\dfrac{2dt(\Delta ABC)}{BC.AB}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin(\widehat{ABM})}{\sin(\widehat{ACM})}=\dfrac{AB}{AC}$ Suy ra: $\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

Câu 15. SỞ GD&ĐT LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt BC tại L và cắt đường tròn $(O;R)$ tại N. Gọi M, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của L lên AC và AB. Chứng minh tam giác ABC và tứ giác $AMNK$ có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải



Ta có: AL là đường trung trực của đoạn MK

Gọi $I=AL\cap MK\Rightarrow MK=2MI$ Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha$, $S_{AMNK}=\dfrac{1}{2}AN.MK$ Ta có: ΔACL đồng dạng với $\Delta ANB\Rightarrow AB.AC=AL.AN$

$\Rightarrow S_{AMNK}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\dfrac{MK}{AL}$ (1) Ta có: Tam giác AML vuông tại M $\Rightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{ML}{AL}\\ \cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{AM}{AL}\end{cases}$

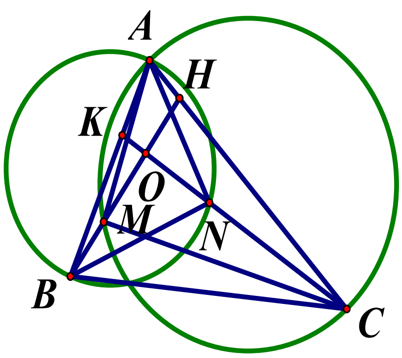
$\Rightarrow \sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2ML.AM}{AL^2}=\dfrac{2MI.AL}{AL^2}=\dfrac{MK}{AL}$ (2) Từ (1) và (2)

$\Rightarrow S_{AMNK}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha=S_{\Delta ABC}$

Câu 16. SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 VÒNG 1

Cho tam giác ABC có trực tâm O. Đường tròn đường kính AC cắt BO tại M, đường tròn đường kính AB cắt OC tại N. Chứng minh $AM=AN$.

Hướng dẫn giải



Gọi H, K lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC

Ta có ΔABH đồng dạng với ΔACK

$\Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{AK} \Leftrightarrow AB.AK = AC.AH$ (1) Ta có tam giác AMC vuông tại M, $MH \perp AC \Rightarrow AM^2 = AH.AC$ (2)

Tương tự: $AN^2 = AK.AB$ (3) Từ (1), (2),(3)

$\Rightarrow AM = AN$

Câu 17. Trường THPT chuyên Long An

Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J là trung điểm AD, BC.

Chứng minh: HK vuông góc với IJ.

Hướng dẫn giải

$$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}\right)$$

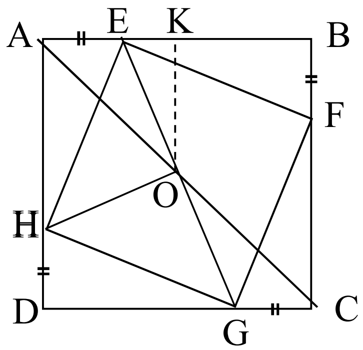
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}\right)$$

$= 0$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác $EFGH$ có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải



ΔHAE = ΔEBF = ΔFCG = ΔGHD

$\Rightarrow$ HE = EF = FG = GH

$\Rightarrow$ EFGH là hình thoi.

$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$

$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^0$

$\Rightarrow$ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG. Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG, do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

ΔHOE vuông cân: HE^2 = 2OE^2 $\Rightarrow$ HE = OE$\sqrt{2}$

Chu vi EFGH = 4HE = 4$\sqrt{2}$ OE. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OE nhỏ nhất

Kẻ OK $\perp$AB $\Rightarrow$ OE $\geq$OK (OK không đổi)

OE = OK $\Leftrightarrow$ E $\equiv$ K

Do đó minOE = OK

Như vậy, chu vi tứ giác $EFGH$ nhỏ nhất khi và chỉ khi E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

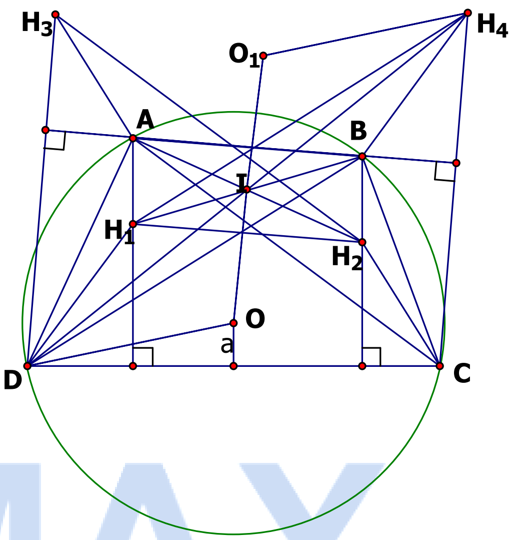
Câu 19. Trường THPT chuyên Long An

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O;R)$. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 thứ tự là trực tâm của các tam giác ACD, BCD, ABD, ABC. Chứng minh rằng:

a) BH_1, AH_2, CH_3, DH_4 đồng qui.

b) Tứ giác $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp

Hướng dẫn giải



a) Gọi a là khoảng cách từ O tới CD. Từ tính chất (*) suy ra $AH_1 = BH_2 = 2a$. Tứ giác AH_1H_2B có $AH_1 = BH_2$ và $AH_1 // BH_2$ (cùng vuông góc với CD) Þ AH_1H_2B là hình bình hành. Chứng minh tương tự thì CH_2H_3A, H_1DBH_4 cũng là các hình bình hành. Từ đó suy ra BH_1, AH_2, CH_3, DH_4 đồng qui tại trung điểm I của mỗi đường.

b) Lấy O_1 đối xứng với O qua I; suy ra DOH_4O_1 là hình bình hành Þ $O_1H_4 = OD = R$. Chứng minh tương tự ta có $O_1H_3 = OC = R$; $O_1H_2 = OA = R; O_1H_1 = OB = R$. Suy ra $H_1H_2H_3H_4$ nội tiếp đường tròn $(O_1; R)$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$T = MA.h_a + MB.h_b + MC.h_c$

(với h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao vẽ từ A, B, C).

III. Bài toán cực trị

Câu 31. (Sở GDĐT Nghệ An- thi chọn học sinh giỏi tỉnh 2004-2005)

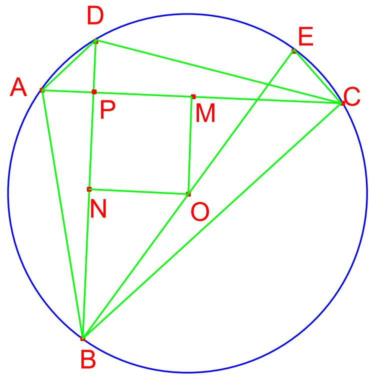
a. Tìm điểm M trong tam giác ABC để $MA+MB+MC$ nhỏ nhất.

b. Xét các tứ giác lồi $ABCD$ có độ dài đường chéo AC, BD cho trước và góc giữa hai đường chéo có độ lớn đã cho. Hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

Câu 32. (THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Tỉnh Lai Châu- Trại hè Hùng Vương lần X)

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn $(OP = d < R)$. Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo R và d.

Lời giải



Gọi chu vi tứ giác ABCD là $p = AB + BC + CD + DA$**.Ta có**

$$p^2 = (AB + BC + CD + DA)^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$
$$+2(AB.CD + AD.BC) + 2(AB.AD + CB.CD)$$
$$+2(BA.BC + DA.DC) \qquad (1)$$

Theo định lí P tô lê mê thì:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \qquad (2)$$

Kẻ đường kính BE,ta có

$$\Delta ABE \sim \Delta PAD \Rightarrow AB.AD = 2R.PA$$
$$\Delta CBE \sim \Delta CPD \Rightarrow CB.CD = 2R.PC$$

Từ hai đẳng thức trên ta có

$$AB.AD + CB.CD = 2R.(PA + PC) = 2R.AC \qquad (3)$$
$$\Rightarrow BA.BC + DA.DC = 2R.BD \qquad (4)$$

Chú ý rằng: $\begin{matrix} AB^2 + CD^2 = AB^2 + AE^2 = 4R^2 \\ BC^2 + DA^2 = BC^2 + CE^2 = 4R^2 \end{matrix}$

Thay hai đẳng thức trên và từ $(1),(2),(3),(4)$ **ta được:**

$$p^2 = 8R^2 + 2AC.BD + 4R(AC + BD) \qquad (5)$$

Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của AC,BD thì

$OM \perp AC, \quad ON \perp BD$

Ta có: $\begin{matrix} AC^2 + BD^2 = 4AM^2 + 4BN^2 = 4(R^2 - OM^2) + 4(R^2 - ON^2) \\ = 8R^2 - 4(OM^2 + ON^2) = 8R^2 - OP^2 = 8R^2 - 4d^2 \end{matrix}$

Do đó

$$(AC + BD)^2 = AC^2 + BD^2 + 2AC.BD = 8R^2 - 4d^2 + 2AC.BD \qquad (6)$$

Đặt $OM = u, ON = v$ **ta có:**

$$AC^2.BD^2 = 4AM^2.4BN^2 = 4\left(R^2 - u^2\right)4\left(R^2 - v^2\right)$$

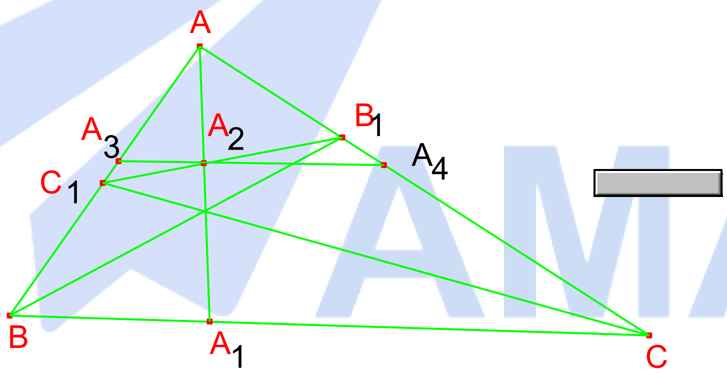
$$= 16\left(R^4 - R^2\left(u^2 + v^2\right) + u^2v^2\right) = 16\left(R^4 - R^2d^2 + u^2v^2\right)\ (8)$$

Từ $(6);(7);(8)$ suy ra: p^2 đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow$ $AC + BD$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow$ $AC.BD$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) $\Leftrightarrow u^2v^2$ đạt giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất).

Câu 33. (THPT Chuyên Hà Giang – Olympic Hùng Vương lần X - 2014)

Cho tam giác ABC có chu vi p. Các đường phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1 cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng tại A_2, B_2, C_2. Đường thẳng qua A_2 song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự A_3, A_4. Đường thẳng qua B_2 song song với AC cắt BC, BA theo thứ tự tại B_3, B_4. Đường thẳng qua C_2 song song với AB cắt CA, CB Theo thứ tự C_3, C_4. Chứng minh rằng $AB_4 + BC_4 + CA_4 + BA_3 + CB_3 + AC_3 \le p$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải



Đặt BC = a, AC = b, BA = c, p = a+b +c.

Vì A_3A_4 || BC nên theo định lí Talet ta có: $\dfrac{BA_3}{AB} = \dfrac{CA_4}{AC} = \dfrac{A_1A_2}{AA_1} \Leftrightarrow \dfrac{BA_3 + CA_4}{b+c} = 1 - \dfrac{AA_2}{AA_1}$ **(1)**

Áp dụng tính chất đường phân giác trong góc C: $\dfrac{C_1A}{C_1B} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{C_1A}{AB} = \dfrac{AC}{AC+BC} \Rightarrow C_1A = \dfrac{AB.AC}{AC+BC} = \dfrac{c.b}{a+b}$

Tương tự: $AB_1 = \dfrac{c.b}{a+c}$

Sử dụng công thức đường phân giác cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$

$$AA_1 = \frac{2c.b\cos\frac{A}{2}}{b+c}; AA_2 = \frac{2AB_1.AC_1\cos\frac{A}{2}}{AB_1 + AC_1}$$

Do đó: $\dfrac{AA_2}{AA_1} = \dfrac{b+c}{2a+b+c}$ **(2)**

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{BA_3+CA_4}{b+c}=1-\frac{b+c}{2a+b+c}=\frac{2a}{2a+b+c}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta nhận được:

$$BA_3+CA_4=\frac{2a(b+c)}{2a+b+c}\le\frac{\left(\frac{2a+(b+c)^2}{2}\right)}{2a+b+c}=\frac{2a+b+c}{4}\ \textbf{(3)}$$

Hoàn toàn tương tự: $AB_4+CB_3\le\frac{2b+c+a}{4}$ **(4);** $BC_4+AC_3\le\frac{2c+b+a}{4}$ **(5)**

Từ (3), (4) và (5) suy ra: $AB_4+BC_4+CA_4+BA_3+CB_3+AC_3\le a+b+c=p$ **(đpcm)**

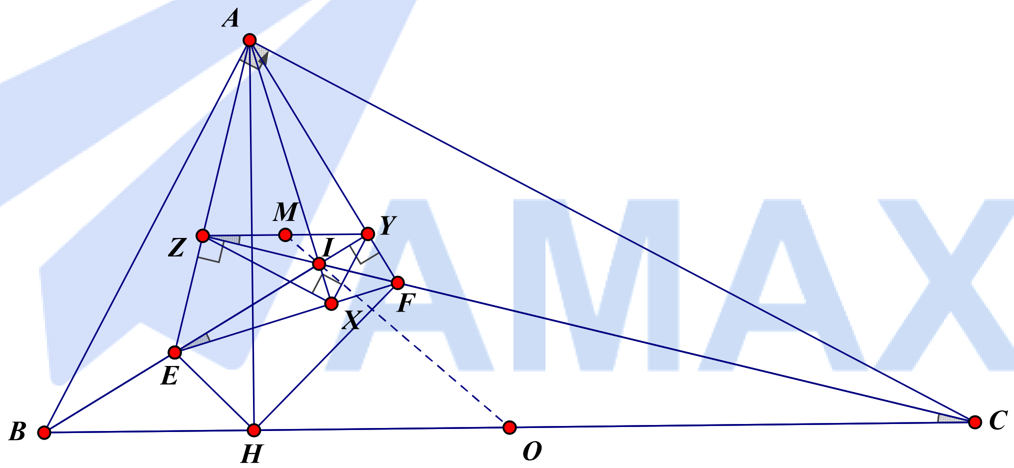
Dấu bằng xảy ra khi a = b =c.

VI. Các bài toán khác

Câu 34. (THPT Chuyên Chu Văn An – Lạng Sơn - Thi Toán 11)

Cho tam giác ABC vuông tại A và I là tâm đường tròn nội tiếp của nó. Gọi AH là đường cao từ đỉnh A của tam giác ABC và E, F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC tương ứng. Gọi O là trung điểm của BC. Chứng minh IO là đường thẳng Euler của tam giác AEF.

Lời giải



***Chứng minh*: Ta có**

$\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle HAC=\angle HAF$ **và** $AH\perp BH\Rightarrow BE\perp AF$**. Tương tự ta có** $CF\perp AE$**. Gọi giao điểm của *AI, BI, CI* với *EF, FA, AE* tương ứng là *X, Y, Z*. Khi đó, *I* là trực tâm *AEF*.**

Ta có $\angle IAF=\angle IAC-\angle CAF=45^0-\frac{1}{2}\angle BAD=45^0-\frac{\angle B}{2}=45^0-\frac{90^0-\angle C}{2}$

$=\frac{\angle C}{2}=\angle ICA$**, suy ra** $\Delta IAF\sim ICA\Rightarrow\frac{IA}{IC}=\frac{IF}{IA}\Rightarrow IA^2=IC.IF$**. Hoàn toàn tương tự, ta có** $IA^2=IB.IE$**, nên ta có** $IB.IE=IC.IF\Rightarrow$ ***BEFC* nội tiếp, nên suy ra** $\angle IEF=\angle FCB$**. Vì tứ giác *EZYF* nội tiếp nên** $\angle IZY=\angle IEF\Rightarrow YZ\,\square\,BC=\angle FCB$**. Hơn nữa, gọi *M* là trung điểm của *YZ*, theo định lí Thales suy ra *I, M, O* thẳng hàng. Mặt khác, các tứ giác *AYXE, AZXF* nội tiếp nên ta có**

$\angle ZXY=\angle ZXA+\angle YXA=\angle ZFA+\angle YEA=\angle ACF+\angle CAF+\angle ABE+\angle BAE=90^0$ **nên *M* là tâm ngoại tiếp của *XYZ*, suy ra *M* là tâm *Euler* của *AEF*, suy ra *IM* là đường thẳng *Euler* của *AEF* nghĩa là *OI* là đường thẳng *Euler* của tam giác *AEF*□**

Câu 35. (THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái – Toán 11)

Cho tam giác ABC với trọng tâm G nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Các tia
AG, BG, CG **cắt đường tròn tại D, E, F. Chứng minh rằng**
$\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\ge \frac{3}{R}$.

Lời giải

Gọi các trung tuyến của ΔABC là AM, BN, CP và đặt
$AB=c, AC=b, BC=a, AM=m_a$

Xét phương tích của M đối với đường tròn ta có

$$MD.MA=MB.MC \quad \text{hay } MD.m_a=\frac{a^2}{4}, MD=\frac{a^2}{4m_a}$$

$$\Rightarrow GD=GM+MD=\frac{1}{3}m_a+\frac{a^2}{4m_a}$$

Từ $GA=\frac{2}{3}m_a$ **và từ (2) ta có:**

$$\frac{GA}{GD}=\frac{\frac{2}{3}m_a}{\frac{1}{3}m_a+\frac{a^2}{4m_a}}=\frac{8m_a^2}{4m_a^2+3a^2}$$

Mà $4m_a^2=2\left(b^2+c^2\right)-a^2$ **khi đó ta được**

$$\frac{GA}{GD}=\frac{2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)}{2b^2+2c^2-a^2+3a^2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự ta tính được các tỷ số $\frac{GB}{GE},\frac{GC}{GF}$

$$\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=3$$

Ta có

$$\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}=3+\frac{GA}{GD}+\frac{GB}{GE}+\frac{GC}{GF}=6 \quad (4)$$

Do các dây AD, BE, CF **đều không lớn hơn** $2R$ **nên thay vào 4 ta có**

$$6=\frac{AD}{GD}+\frac{BE}{GE}+\frac{CF}{GF}\le\frac{2R}{GD}+\frac{2R}{GE}+\frac{2R}{GF}$$

Từ đó ta có: $\frac{1}{GD}+\frac{1}{GE}+\frac{1}{GF}\ge\frac{3}{R}$

Câu 36. (Sở GDĐT Quảng Ninh – Chuyên Hạ Long – 2013- Toán 11)

Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\angle BAC$ tại E nằm trong tam giác ABC. Đường