Tương tự có $V(G;\ -\frac{1}{2})$ biến E thành E'. $V(G;\ -\frac{1}{2})$ biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D', E', F' thẳng hàng. Do D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ nên theo định lí Simson D', E', F' thẳng hàng $\leftrightarrow$ O nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta IJK \leftrightarrow OH = 2R \rightarrow (đpcm)$.

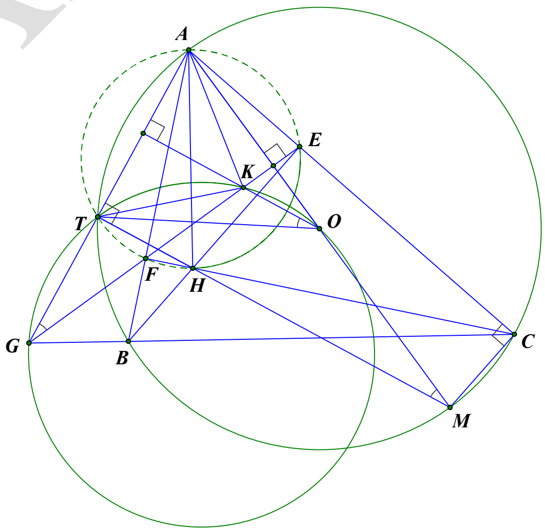
Câu 43. Cho **tam** giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF cắt nhau tại H $(E \in AC, F \in AB)$. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Lấy điểm T trên (O) sao cho $\widehat{ATH} = 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GTO cắt EF tại K $(K \neq G)$. Chứng minh rằng

a) Ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Đường thẳng OK vuông góc với đường thẳng AT.

a) Dễ thấy tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

Hướng dẫn giải



Hơn nữa, $\widehat{ATH} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH}$

nên ngũ giác $ATFHE$ nội tiếp.

Do đó AT, FE, BC là ba trục đẳng phương của $(ATFHE), (O)$ và $(BFEC)$ nên chúng

đồng quy tại G tức là ba điểm G, T, A thẳng hàng.

b) Nối TH cắt (O) tại M, suy ra A, O, M thẳng hàng.

Dễ thấy $\widehat{AEK} = \widehat{ABC} = \widehat{AMC} \Rightarrow$ AM $\perp$ EF.

Từ đó suy ra $\widehat{AGK} = \widehat{AMT}$. Do đó $\widehat{KOT} = \widehat{KGA} = \widehat{OMT}$ (1).

Hơn nữa, $\widehat{AOT} = 2\widehat{OMT}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KOT} = \widehat{KOA}$. Mà $OA = OT$ nên OT là trung trực của AT, suy ra $OK \perp AT$.

Câu 44. Tứ giác lồi $ABCD$ diện tích S và không có hai cạnh nào song song. Lấy điểm P_1 nằm trên đường thẳng CD sao cho P_1 và C nằm cùng **phía** so với đường thẳng AB và $S_{\triangle ABP_1} = \frac{S}{2}$. Tương tự cũng có các điểm P_2, P_3, P_4 lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, AB và DA. Chứng minh P_1, P_2, P_3, P_4 thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Gọi x là khoảng cách từ D đến AC và y là khoảng cách từ B đến AC. Ta có:

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}}=\frac{y}{x+y}$$

Lấy Q_1 nằm trên đường thẳng BC sao cho $\frac{BQ_1}{BC}=\frac{x+y}{2y}$.Khi đó

$$S_{Q_1AB}=\frac{x+y}{2y}.S_{ABC}=\frac{S}{2}$$

$\Rightarrow P_1Q_1 \parallel AB \Rightarrow \frac{EP_1}{P_1C}=\frac{BQ_1}{Q_1C}=\frac{y+x}{y-x}$,khi đó với mọi điểm O ta có

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{OE}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{OC}\ \ (1)$$

Tương tự ta cũng có các đẳng thức dưới đây:

$$\overrightarrow{OP_2}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{OF}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{OA}\ \ (2)$$

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{OE}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{OA}\ \ (3)$$

$$\overrightarrow{OP_4}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{OF}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{OC}\ \ (4)$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{y-x}{2y}.\overrightarrow{EF}+\frac{y+x}{2y}.\overrightarrow{CA}\ \ \text{(từ (1) và (2))}$$

$$\overrightarrow{P_3P_4}=\frac{x-y}{2x}.\overrightarrow{EF}+\frac{y+x}{2x}.\overrightarrow{AC}\ \text{(từ (3) và (4))}$$

Suy ra $\overrightarrow{P_1P_2}\parallel\overrightarrow{P_3P_4}$

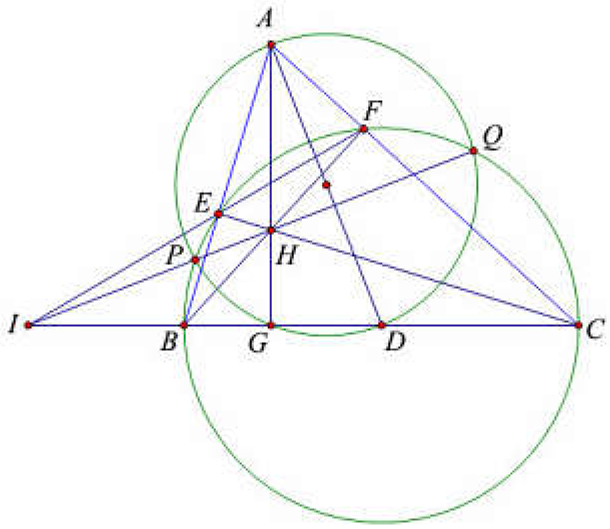
Hoàn toàn tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{P_3P_2}\parallel\overrightarrow{P_1P_4}$ và $\overrightarrow{P_3P_1}\parallel\overrightarrow{P_2P_4}$ .Suy ra P_1,P_2,P_3,P_4 thẳng hàng.

Câu 45. Cho H là trực tâm tam giác ABC không cân góc A nhọn. Hình chiếu vuông góc của H trên AB,AC theo thứ tự là E,F. Gọi D là trung điểm $BC;P,Q$ là giao điểm của hai đường tròn đường kính AD và BC. Chứng minh H,P,Q thẳng hàng và các đường thẳng BC,EF,PQ đồng quy.

Hướng dẫn giải

Gọi G là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Ta có $P_{H/[BC]} = \overline{HE}.\overline{HC} = \overline{HG}.\overline{HA} = P_{H/[AD]}$ suy ra H nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính BC và A**D.** Suy ra H, P, Q thẳng hàng.



Gọi I là giao điểm của EF và B**C.** (DEF) là đường tròn Euler của tam giác ABC nên G nằm trên (DEF). Do đó $P_{I/[BC]} = \overline{IB}.\overline{IC} = \overline{IE}.\overline{\text{IF}} = \overline{IG}.\overline{ID} = P_{I/[AD]}$

Suy ra I, P, G thẳng hàng hay BC, EF, PQ đồng quy tại I.

Câu 46. Cho tam giác ABC với H là trực tâm tam giác, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC, E là điểm đối xứng của B qua CA, F là điểm đối xứng của C qua AB. Chứng minh rằng D,E,F thẳng hàng khi và chỉ khi $OH = 2R$.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm tam giác AB**C.** A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, A**B.** Gọi I, J,K là tam giác nhận, A, B, C là trung điểm các cạnh JK, KI, IJ. Do đó G là trọng tâm tam giác IJK.

Từ cách dựng suy ra *HA, HB, HC* lần lượt là đường trung trực của *JK, KI, IJ.* Do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *IJK có bán kinh 2R.*

Gọi D', E', F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường *JK, KI, IJ.* Do G là trọng tâm hai tam giác trên nên:

Xét V(G; -1/2) biến A, B, C, I, J, K thành A', B', C', A, B, C.

Có A' là trung điểm BC nên $OA' \perp$ BC, $OD' \perp$ JK; suy ra $OD' \perp$ B**C.** Vậy O, A', D' thẳng hàng. Do đó $A'D'$ vuông góc với B**C.**

Suy ra $A'D'$ // AD và $A'D = \frac{1}{2}AD \to \overrightarrow{GAD} = \overrightarrow{GA'D'} \to \angle GAD = \angle GA'D'$

$\to \widehat{AGD} = \widehat{A'GD'} \to \widehat{AGD} + \widehat{AGD'} = \widehat{A'GD'} + \widehat{AGD'} = 180^0$

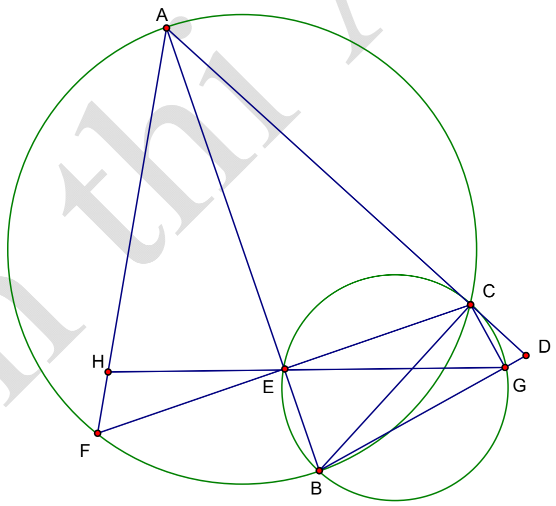
Vậy D,G,D' Thẳng hàng và $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ biến D thành D'.

Tương tự có $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ biến E thành $E'.V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ biến F thành F'.

D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi D',E',F' thẳng hàng. Do D',E',F' là hình chiếu vuông góc của O lên các đường JK, KI, IJ nên theo định lí Simson D',E',F' thẳng hàng $\leftrightarrow$ O nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔIJK $\leftrightarrow OH=2R\rightarrow(đpcm)$.

Câu 47. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm B,C và BC là đường kính của đường tròn (O_1). Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (O_1) tại điểm C cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai là A. Đường thẳng AB cắt đường tròn (O_1) tại E, $E\neq B$. Đường thẳng CE cắt đường tròn (O_2) tại F, $F\neq C$. Giả sử H là một điểm bất kì trên đoạn thẳng AF. Đường thẳng HE cắt đường tròn (O_1) tại G và đường thẳng BG cắt đường thẳng AC tại D. Chứng minh rằng $\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$.

Hướng dẫn giải



Vì BC là đường kính của đường tròn (O_1) và ACD là tiếp tuyến nên $BC\perp AD\Rightarrow\widehat{ACB}=90^0$. Do đó AB là đường kính của (O_2).

Ta lại có $\widehat{BEC}=90^0\Rightarrow AB\perp CF\Rightarrow\widehat{FAB}=\widehat{CAB}$.

Nối CG, ta có $CG\perp BD$. Suy ra $\widehat{ADB}=\widehat{BCG}=\widehat{BEG}=\widehat{AEH}$

Xét tam giác AHE và tam giác ABD có:

$+\widehat{HAE}=\widehat{BAD}$

$+\widehat{AEH}=\widehat{ADB}$

Suy ra hai tam giác AHE và ABD đồng dạng. Do đó $\frac{AH}{AE}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow AH.AD=AB.AE.$

Mặt khác AC là tiếp tuyến của đường tròn $\left(O_1\right)$ nên $AC^2=AE.AB$.

Suy ra $AH.AD=AE.AB=AC^2=AC.AF$

Vì vậy $\frac{AH}{AF}=\frac{AC}{AD}$

$$\frac{AH}{AF}=\frac{AC}{AD}\Leftrightarrow\frac{AH}{AH+HF}=\frac{AC}{AC+CD}\Rightarrow\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$$

Câu 48. Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H,O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, hai đường cao AD,BE. OD cắt BE tại K, OE cắt AD tại L. Gọi M là trung điểm AB. Chứng minh rằng K,L,M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C,D,O,H cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn giải

Sử dụng Menelaus cho tam giác HAB và 3 điểm K, L, M thẳng hàng

Vậy

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}\cdot\frac{\overline{LM}}{\overline{LA}}\cdot\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1\Leftrightarrow\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}\ (1)$$

$$\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}}\ (2);\ \frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}}\ (3).$$

$$S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d\left(O;AE\right)=\frac{1}{2}.\mathrm{R}.AB.\mathrm{cosA}.\ \cos B$$

$$S_{BOD}=\frac{1}{2}AE.d\left(O;AE\right)=\frac{1}{2}.\mathrm{R}.AB.\mathrm{cosA}.\ \cos$$

Do đó hệ thức xảy ra khi và chỉ khi $S_{HOE}=S_{HOD}\Leftrightarrow OH//DE$ hoặc OH đi qua trung điểm P của DE.

Qua C kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (C) thì d song song với DE.

Do CO vuông góc với d nên CO vuông góc với DE.

Nếu OH đi qua P thì P là trung điểm của OH, hay EDOH là hình bình hành, suy ra EO và HD song song (trái giả thiết).

Vậy K, L,M thẳng hàng khi và chỉ khi OH song song với DE, hay OH vuông góc với CO, tương đương C, D, O, H cùng thuộc đường tròn đường kính CH.

Câu 49. Cho tam giác ABC. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ và giả sử $\angle KCB=\frac{1}{3}\angle ACB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên CK,M là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng MH vuông góc với BC.

Hướng dẫn giải

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CK. Khi đó $\widehat{KCB}=\widehat{KCD}=\widehat{ACD}$. Do $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ nên $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}}=2$. Vì $\frac{S_{\Delta ACK}}{S_{\Delta KCB}}=\frac{AC\sin\widehat{ACK}}{BC\sin\widehat{KCB}}$

$=\frac{2AC\sin\widehat{ACK}\cos\widehat{KCB}}{BC\sin\widehat{ACK}}==\frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}$ nên

$\frac{2AC\cos\widehat{KCB}}{BC}=2\Rightarrow\cos\widehat{KCB}=\frac{BC}{AC}\Rightarrow\cos\widehat{ACD}=\frac{DC}{AC}$

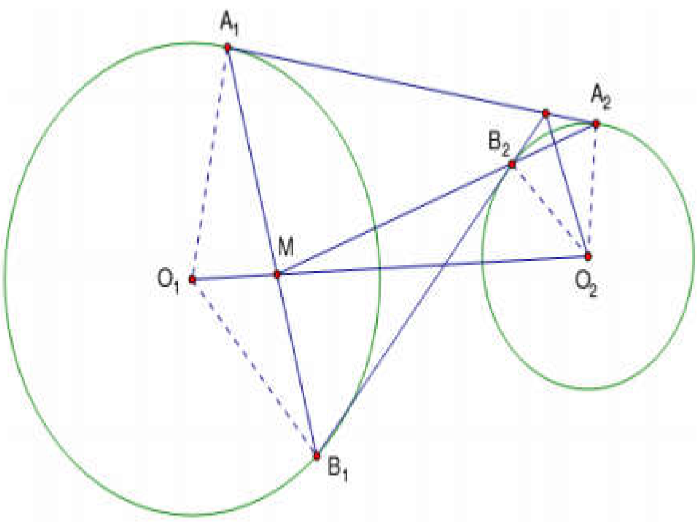
$\Rightarrow\widehat{ADC}=90^0$ và tứ giác CHDA là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow\widehat{KCB}=\widehat{ACD}=\widehat{AHD}$ (1)

Do AH và BD cùng vuông góc với CK nên AH // DB$\Rightarrow\widehat{HDB}=\widehat{AHD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp (DH cắt BC tại E, CK cắt BC tại F) suy ra H là trực tâm tam giác BCD $\Rightarrow$ BH $\perp$ CD$\Rightarrow$ BH//AD

Vậy tứ giác AHBD là hình bình hành, do M là trung điểm của AB nên H, M, D thẳng hang. Vậy MH $\perp$ BC.

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài A_1A_2, tiếp tuyến chung trong B_1B_2 của hai đường tròn ($A_1,B_1\in(O_1)$, $A_2,B_2\in(O_2)$) . Chứng minh rằng ba đường thẳng A_1B_1, A_2B_2,O_1O_2 đồng quy.



Gọi M là giao điểm của A_1B_1 với A_2B_2. Dễ dàng có $A_1B_1 \perp A_2B_2$.

Gọi (C_1),(C_2) lần lượt là các đường tròn đường kính A_1A_2,B_1B_2.

Do $\angle A_1MA_2 = \angle B_1MB_2 = 90^0$ nên M nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).

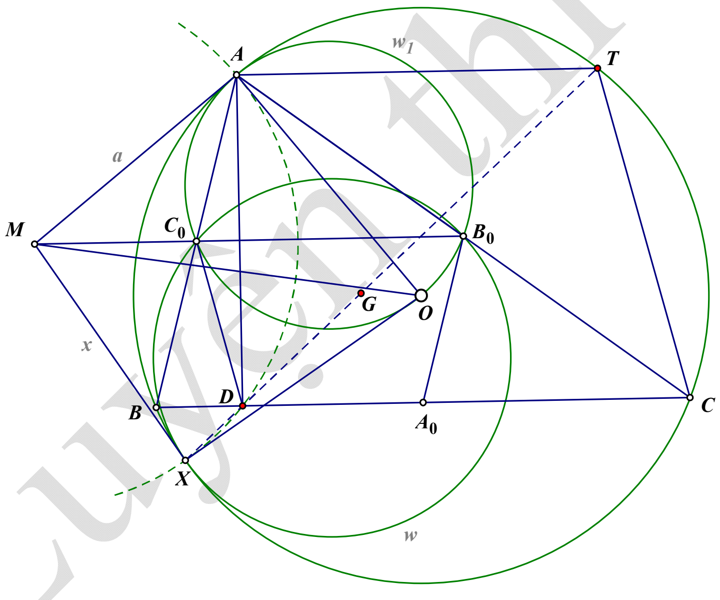
Mặt khác $O_1A_1^2 = O_1B_1^2$ và O_1A_1, O_1B_1 lần lượt là tiếp tuyến của (C_1),(C_2) nên O_1 nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2).
Tương tự O_2 cũng nằm trên trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)
Suy ra O_1,M,O_2 thẳng hàng.
Ta có đpcm.

Câu 50. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_0, C_0 là trung điểm của cạnh AC và $AB.D$ là hình chiếu của A trên BC. Gọi (ω) là đường tròn đi qua B_0, C_0 và tiếp xúc với (O) tại điểm X khác **A.**

a) Gọi T là giao điểm thứ hai của đường thẳng DX với (O). Chứng minh rằng $ATCB$ là hình thang cân.

b) Chứng minh rằng đường thẳng DX đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải



Gọi a và x là tiếp tuyến tại A và X của đường tròn (O) và gọi (ω_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_0C_0. Dễ thấy a cũng là tiếp tuyến của (ω_1) tại A và a là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (ω_1).

Như vậy ba đường thẳng a, x và B_0C_0 lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O) và (ω_1); (O) và (ω); (ω) và (ω_1), do đó a, x và B_0C_0 đồng quy tại điểm M.

Ta có $MA = MD = MX$ nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADX. Chú ý là $O \in (\omega_1)$.
Ta có

$\widehat{DAT} = \widehat{ADX} - \widehat{ATD} = \frac{1}{2}\left(360^0 - \widehat{AMX}\right) - \frac{1}{2}\widehat{AOX} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{AMX} + \widehat{AOX}\right) = 90^0$, suy ra $AD \perp AT \Rightarrow AT \parallel BC$. Do đó $ATCB$ là hình thang cân.

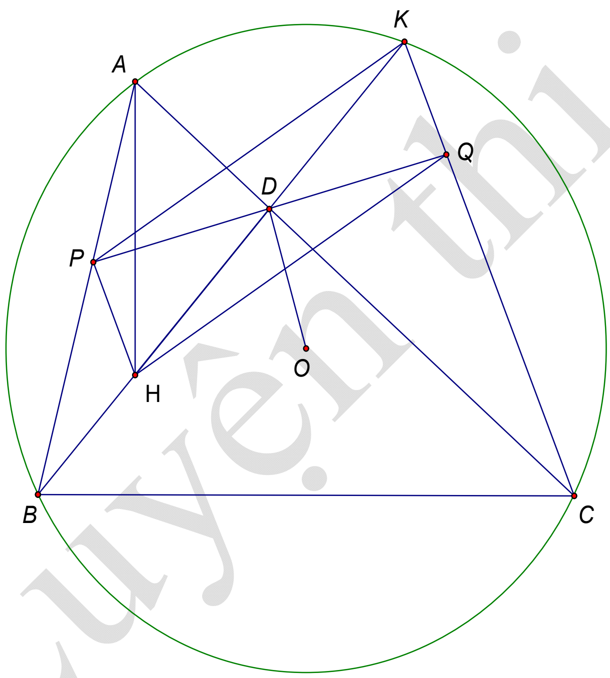
b) (2,0 điểm)

Gọi A_0 là trung điểm của B_0C_0. Xét phép vị tự $V_G^{-\frac{1}{2}}$ biến $A \mapsto A_0$; $B \mapsto B_0$; $C \mapsto C_0$; $T \mapsto T'$, suy ra $\widehat{TCB} = \widehat{T'C_0B_0}$.

Mặt khác $\widehat{TCB} = \widehat{CBA} = \widehat{B_0C_0A} = \widehat{DC_0B_0}$. Do đó $T' \equiv D$, từ đó suy ra D, G, T thẳng hàng và ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Muốn cho bài toán khó lên thì có thể chỉ hỏi phần (b).

Câu 51. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, $AB < BC$. D là chân đường cao xuất phát từ B và H là trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt cạnh AB tại P. Chứng minh rằng $\angle DHP = \angle BAC$.



Gọi K là giao điểm của BD và $(O), K \neq B$. Q là giao điểm của CK và PD.

Theo định lý con bướm, suy ra D là trung điểm của đoạn PQ.

Mặt khác D là trung điểm của HK, do đó tứ giác $PHQK$ là một hình bình hành. Suy ra $\angle DHP = \angle HKQ$.

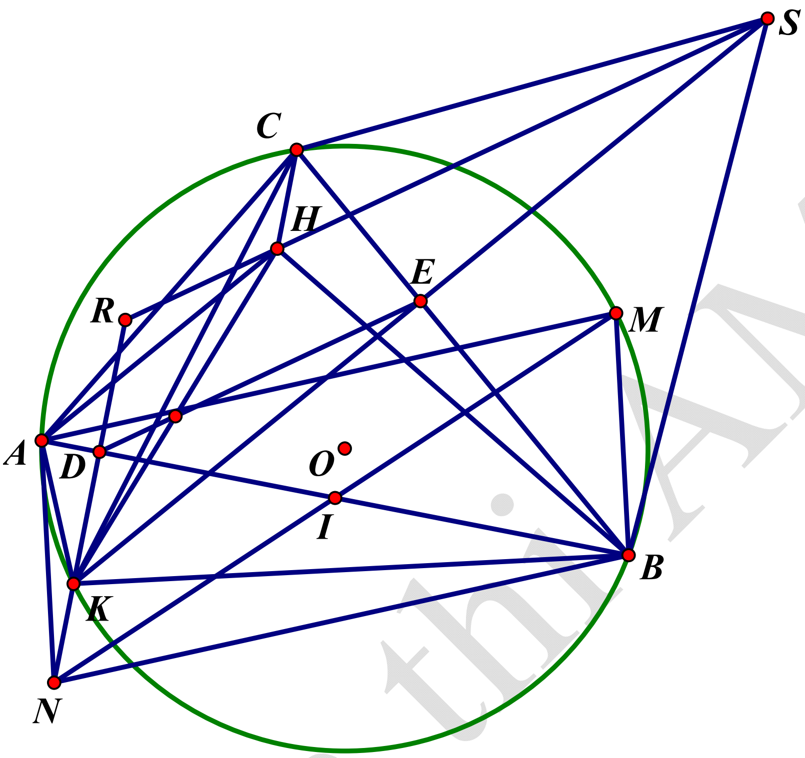
Mà $\angle HKQ = \angle BAC$, do vậy $\angle DHP = \angle BAC$.

Câu 52. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm là H và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. N là điểm đối xứng của M qua trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng trực tâm K của tam giác NAB nằm trên đường tròn (O).

b) Giả sử NK cắt AB tại D, hạ KE vuông góc với BC tại E. Chứng minh rằng ba điểm D, E và trung điểm của HK thẳng hàng.

Hướng dẫn giải



a) Chứng minh K thuộc đường tròn (O)

+ N là điểm đối xứng của M qua trung điểm I của AB nên tứ giác ANBM là hình bình hành, suy ra $BN \parallel AM$ và $AN \parallel BM$

+ Vì K là trực tâm tam giác NAB nên $BK \perp NA, AK \perp NB$,

Do đó $BK \perp BM$ và $AK \perp AM$

Từ đó suy ra tứ giác BKAM nội tiếp.

Vậy K thuộc đường tròn (O).

b) Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm của HK.

+ Gọi S là điểm đối xứng của K qua E; R là điểm đối xứng của K qua **D.** Ta có: $\widehat{BKC} = \widehat{BSC}$ (do BC là đường trung trực của SK)

+ Mặt khác $\widehat{BKC} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC) nên $\widehat{BSC} = \widehat{BAC}$.

+ Mà $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0$ nên $\widehat{BHC} + \widehat{BSC} = 180^0$

Suy ra tứ giác BHCS nội tiếp nên $\widehat{BHS} = \widehat{BCS} = \widehat{BCK} \quad (1)$

+ Tương tự tứ giác ABHR nội tiếp nên $\widehat{AHR} = \widehat{ABR} = \widehat{ABK} \quad (2)$

+ Từ (1) và (2) ta có $\widehat{AHB} + \widehat{BHS} + \widehat{AHR} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ABK} = \widehat{AHB} + \widehat{BCK} + \widehat{ACK} = 180^0$

Suy ra S, H, R thẳng hàng.

+ Vì DE là đường trung bình của tam giác KRS, nên DE đi qua trung điểm của HK.

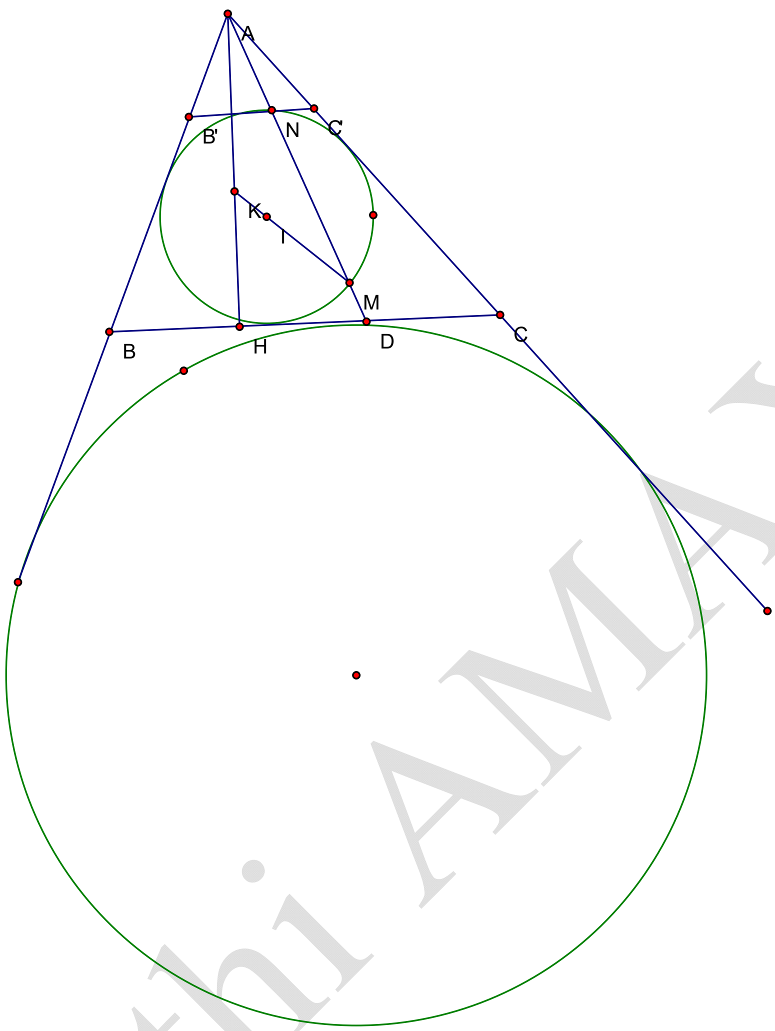
Câu 53. (Kỳ thi HSG trường THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng năm học 2014 – 2015) Hai đường tròn $(O'),(O'')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại D và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại E,F tương ứng sao cho O,O',O'' không thẳng hàng. d là tiếp tuyến chung tại D của (O') và (O''). AB là đường kính của (O) sao cho AB vuông góc với d và A,E,O' cùng phía so với d. Chứng minh rằng AO',BO'',EF và d đồng quy.

Câu 54. (Đề thi đề xuất – trường THPT Chuyên Biên Hòa tỉnh Hà Nam – năm 2015) Cho ΔABC là tam giác nhọn với đường tròn nội tiếp (I). Gọi D là điểm của đường tròn bang tiếp góc A với BC. Gọi M,N là giao điểm của AD với (I) (N nằm giữa A và M. Giả sử IM cắt đường cao AH của ΔABC tại K.

a. Chứng minh $KA = KM$.

b. Gọi (O_a) là đường tròn có tâm nằm trên đường cao AH đi qua A và tiếp xúc với đường tròn (I) tại A_1. Các điểm B_1,C_1 xác định tương tự. Chứng minh AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại 1 điểm.

Hướng dẫn giải:



a. Gọi J là tiếp điểm của (I) với BC.

Giả sử IJ cắt (I) tại điểm thứ 2 là $N' \neq E$. Qua N' vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại điểm B', C'.

Ta có: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = k \Rightarrow$ phép vị tự $V_A^k : B \to B'$; $V_A^k : C \to C'$

$\Rightarrow V_A^k : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Do đó $\Rightarrow V_A^k : D \to N' \Rightarrow A, N', D$ thẳng hàng $\Rightarrow N' \equiv N$

Khi đó $NI // AK$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \frac{IN}{AK} = \frac{IM}{MK}$

Mà $IN = IM$ nên suy ra $KA = KM$

b. Từ câu a ta suy ra: đường tròn có tâm thuộc đường cao AH, đi qua A và tiếp xúc với (I) tại M thì $M \in AD$. Do đó $A_1 \in AD$.

Tương tự nếu gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bang tiếp góc B, C của ΔABC với CA, CB thì $B_1 \in BE; C_1 \in CF \Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ đồng quy $\Leftrightarrow AD, BE, CF$ đồng quy.

Mặt khác nếu ta gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của ΔABC và p là nửa chu vi thì ta có:

$$BD = EC = p - c; DC = AF = p - b; AE = BE = p - a \Rightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

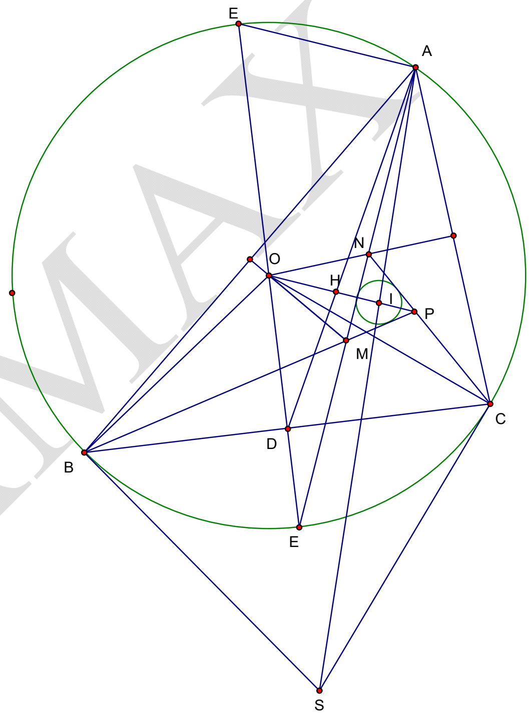
Theo định lý Ceva ta có AD, BE, CF đồng quy.

Câu 55. (Đề thi chọn HSG trường THPT chuyên Thái Bình – 2015) Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B cắt nhau tại S. Trung trực của AB, AC cắt d là phân giác trong góc A của ΔABC thứ tự tại M và N. Gọi P là giao của BM và CN, I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP.

a. Chứng minh H, I đối xứng nhau qua d với H là trực tâm của ΔOMN.

b. Chứng minh A, I, S thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:



Không mất tính tổng quát ta giả sử bài toán có vị trí tương đối như hình vẽ.

Gọi *D* là trung điểm của *BC, E* là giao của phân giác góc *A* với *(O)* khác *A*. *F* là trung điểm của *MN*.

a) +) Chứng minh *OP* là trung trực của *MN*

Vì hai tam giác cân *MAB* và *NAC* có các cặp góc tương ứng bằng nhau nên ta có: $\widehat{PMN} = \widehat{PNM}, \widehat{OMN} = \widehat{ONM}$. Suy ra tam giác PMN và OMN cân tại *P* và *O*. Vậy *OP* là trung trực của *MN*.

+) Chứng minh *I, H* đối xứng nhau qua *d*

Ta có:

$$\widehat{IMF} = \frac{1}{2}\widehat{BME} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}; \widehat{HMF} = \widehat{HON} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{IMF} = \widehat{HMF}$$

Ta được đpcm.

b)+) Chứng minh *AD, AS* đối xứng nhau qua *AE*

Gọi *EK* là đường kính của *(O)*. Ta có $(DSEK) = -1$ nên $A(DSEK) = -1$ mà *AE* và *AK* vuông góc với nhau suy ra AE là phân giác $\widehat{SAD}$. Ta có đpcm

Dựa vào tính chất của phép đối xứng trục ta thấy *A, I, S* thẳng hàng khi và chỉ khi *A, H, D* thẳng hàng. Ta dùng định lý Menelaus với tam giác *OEF* để chứng minh điều này.

$$\frac{HO}{HF} = \frac{FO}{FH} - 1 = \frac{MF\cot\frac{A}{2}}{MF\tan\frac{A}{2} - 1} = \frac{\cos A}{\sin^2\frac{A}{2}}; \frac{DE}{DO} = \frac{R(1-\cos A)}{R\cos A} = \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$\Rightarrow \frac{HO}{HF}.\frac{DE}{DO}.\frac{AF}{AE} = 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 56. (Đề thi đề xuất thi HSG trường THPT Chu Văn An – Hà Nội – 2015) ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. M thuộc BC thỏa mãn $OM // AB$. DM cắt (O) tại P khác D. Chứng minh C, H, P thẳng hàng, với H là trực tâm ΔABC.

Hướng dẫn giải:

DP cắt AB tại E thì M là trung điểm DE (vì OM là đường trung bình).
$BHCD$ là hình bình hành nên DH cắt DC tại I là trung điểm mỗi đường.
Suy ra MI là đường trung bình của $\Delta DHE \Rightarrow MI\,//\,EH$; $EH\,//\,BC$
Kéo dài CH cắt (O) tại Q. Ta sẽ chứng minh $Q \equiv P$ bằng cách chứng minh Q, E, D thẳng hàng.
Vì $BD\,//\,CQ$ nên $BDCQ$ là hình thang cân (hình thang nội tiếp).

Ta có $\widehat{EQH} = \widehat{EHK}$ vì tam giác QBH cân tại B

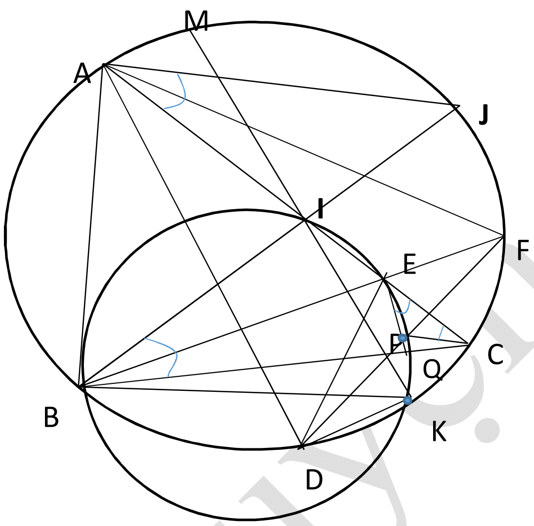
$\widehat{DQC} = \widehat{BCQ}$ vì hình thang $BDCQ$ cân

Nên $\widehat{EQH} = \widehat{DQC}$. Mà Q, H, C thẳng hàng nên E, Q, D thẳng hàng hay $Q \equiv P$.

Câu 57. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên Hưng Yên tỉnh Hưng Yên – 2015)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D khác A. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. I là một điểm thay đổi trên cạnh $AC\,(I \neq E)$. Đường thẳng BI cắt (O) tại J khác B. Từ C kẻ đường thẳng song song với AJ cắt FD tại P. Đường tròn (T) ngoại tiếp ΔBIE cắt BC tại $Q\,(Q \neq B)$ và cắt (O) tại $K\,(K \neq B)$. Chứng minh E, P, Q thẳng hàng và đường thẳng KI luôn đi qua điểm cố định khi I thay đổi.

Hướng dẫn giải:



Gọi D là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ và E đối xứng với B qua AD nên $DB = DE = DC$.

$\widehat{DEF} = 180^0 - \widehat{DEB} = 180^0 - \widehat{DBE} = \widehat{DCF}$ vì $B, D, C, F \in (O)$

$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{DFC} \Rightarrow \Delta DEF = \Delta DCF\,(g.c.g)$

$\Rightarrow$ DF là trung trực của EC.

$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{PCE} = \widehat{CAJ}$ (do $CP\,//\,AJ$)

Mà $\widehat{CAJ} = \widehat{CBI}$ (do $A, B, C, J \in (O)$)

Có $B, Q, E, I \in (T) \Rightarrow \widehat{QEC} = \widehat{QBI} = \widehat{CBJ}$

$\Rightarrow \widehat{PEC} = \widehat{QEC}$ và P, Q cùng phía đối với EC nên P, Q, E thẳng hàng.

Đường thẳng IK cắt (O) tại M khác K

$(KB, KI) \equiv (EB, EI) \pmod{\pi}$ vì $B, K, E, I \in (T)$

$(KD, KB) \equiv (AD, AB) \pmod{\pi}$ vì $B, D, K, A \in (O)$

$(KD, KI) \equiv (KD, KB) + (KB, KI) \pmod{\pi} \equiv (AD, AB) + (EB, EI) \pmod{\pi}$

$\equiv (AE, AD) + (EB, EA) \pmod{\pi} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ do AD là trung trực của $BE \Rightarrow BE \perp AD$

$\Rightarrow \widehat{DKM} = 90^0 \Rightarrow$ DM là đường kính của (O)

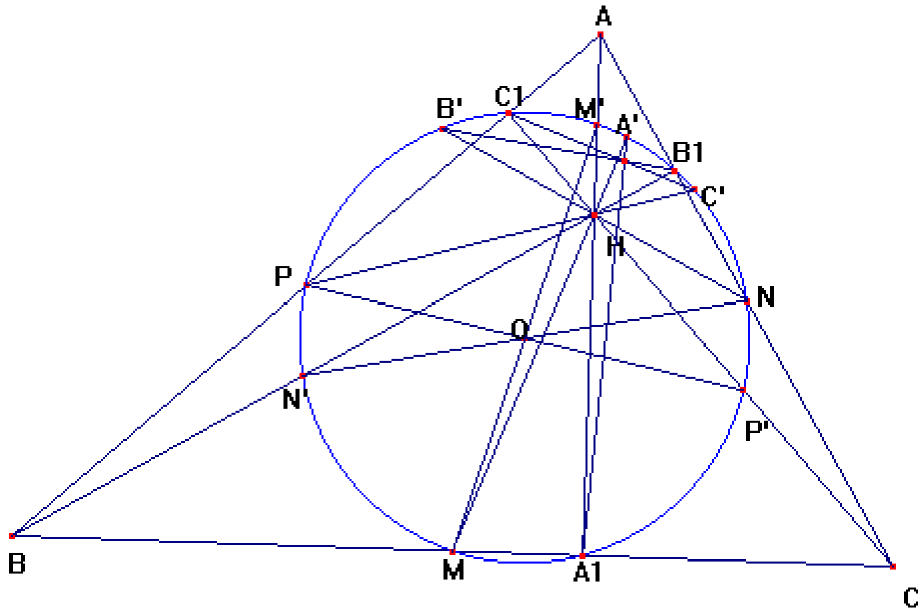
Mà D là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A thì M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên M cố định. Vậy đường thẳng KI luôn qua điểm M cố định khi I thay đổi.

Câu 58. (Đề thi đề xuất trường THPT chuyên tỉnh Lào Cai – trại hè Hùng Vương lần thứ X)

Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD. Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B cắt AC tại P, PD cắt đường tròn (O) lần nữa tại G. Gọi W là giao điểm của AG với BC. Chứng minh 3 điểm $\mathrm{O,P,Q}$ thẳng hàng.

Câu 59. (Đề thi đề xuất HSG Vùng duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ lần thứ VI - trường THPT chuyên Lào Cai) Cho ΔABC có trực tâm H, ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Gọi (W) là đường tròn ngoại tiếp $\Delta\mathrm{MNP}$ (còn gọi là đường tròn Euler của ΔABC). Kí hiệu A', B', C' là các giao điểm thứ hai của MH, NH, PH và (W). Chứng minh rằng A_1A', B_1B', C_1C' đồng quy tại một điểm X nằm trên đường thẳng đi qua trọng tâm và trực tâm ΔABC (còn gọi là đường thẳng Euler của ΔABC).

Hướng dẫn giải:



Ta kí hiệu đường tròn qua 3 điểm *T, U, V* là (*TUV*).

Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *M, N, P*. Ta biết rằng (*W*) đi qua 9 điểm: *M, N, P,* A_1, B_1, C_1 và trung điểm *AH, BH, CH*. Giả sử *M', N', P'* là điểm đối xứng với *M, N, P* qua *O*.

Xét phép nghịch đảo cực *H* và giữ bất biến (*W*). Phép nghịch đảo này biến A_1A', B_1B', C_1C' tương ứng thành các đường tròn $(HMM'), (HNN'), (HPP')$.

Ta sẽ chỉ ra rằng trục đẳng phương của (*HNN'*) và (*HPP'*) là đường thẳng Euler của tam giác *ABC* (do đường thẳng này bất biến qua phép nghịch đảo nói trên). Thật vậy:

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HNN'*) là *NN'*;

Trục đẳng phương của (*W*) và (*HPP'*) là *PP'*;

Do đó trục đẳng phương của (*HNN'*) và (*HPP'*) đi qua *H* và giao của *NN'* và *PP'*. Nhưng ta biết rằng tâm *O* của (*W*) cũng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ***ABC.*** Do đó trục đẳng phương của (*HNN'*) và (*HPP'*) chính là đường thẳng Euler của tam giác ***ABC.***