Đặt $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{2ND}=$ k.Ta có $\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta AIJ}}=\frac{\frac{1}{2}AM.AN.\text{sinMAN}}{\frac{1}{2}AI.AJ.\text{sinIAJ}}=\frac{AM.AN}{AI.AJ}$

$=\frac{AI+IM}{\text{AI}}.\frac{\text{AJ}+JN}{\text{AJ}}=\left(1+\frac{IM}{\text{AI}}\right)\left(1+\frac{JN}{\text{AJ}}\right) \quad (1)$

+) $\frac{BC}{BM}=\frac{\text{BM}+CM}{\text{BM}}=1+\frac{1}{\text{k}}=\frac{\text{k}+1}{\text{k}} \quad (2)$, $\frac{DC}{DN}=\frac{\text{DN}+CN}{\text{DN}}=1+\frac{CN}{\text{DN}}=1+2k \quad (3)$

+) Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{IM}{AI}=\frac{\text{BM}}{\text{AD}}=\frac{BM}{BC}=\frac{\text{k}}{\text{k+1}}$; $\frac{JN}{AJ}=\frac{\text{DN}}{\text{AB}}=\frac{DN}{DC}=\frac{1}{\text{2k+1}}$

+) thay vào (1) $\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta AIJ}}=\left(1+\frac{k}{\text{k+1}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{2k+1}}\right)=2$

hay $S_{\Delta AMN} = 2\, S_{\Delta AIJ}$, $S_{IMNJ} = S_{\Delta AMN} - S_{\Delta AIJ} = 2\, S_{\Delta AIJ} - S_{\Delta AIJ} = S_{\Delta AIJ}$.

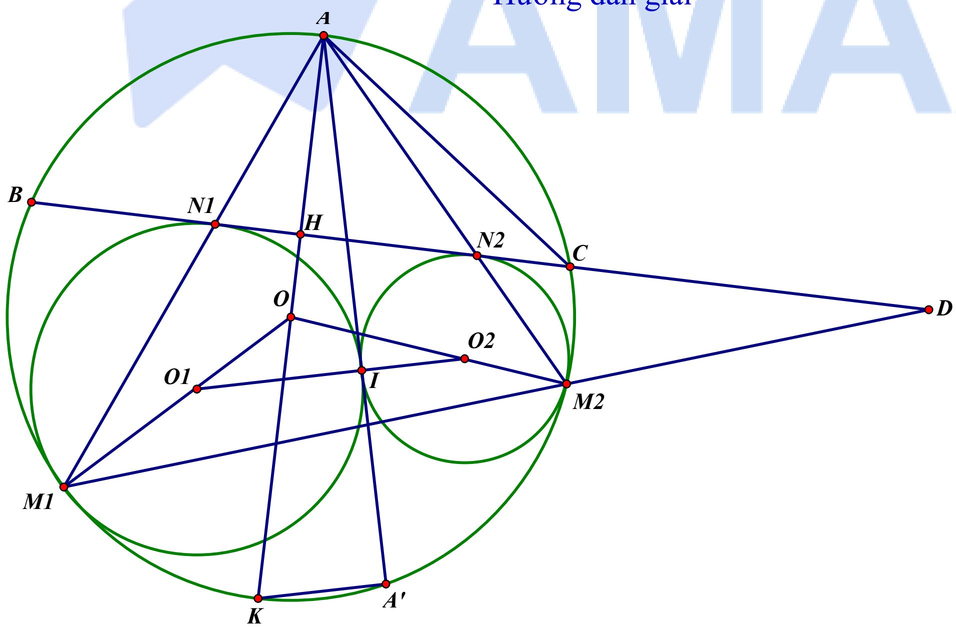
Bài 5. Cho (O) và hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tiếp điểm của (O_1) và (O_2); M_1,M_2 là tiếp điểm của (O) với $(O_1),(O_2)$. Tiếp tuyến chung tại I của $(O_1),(O_2)$ cắt (O) tại A. AM_1 cắt (O_1) tại N_1; AM_2 cắt (O_2) tại N_2.

a) Chứng minh rằng $OA \perp N_1N_2$.

b) N_1N_2 cắt (O) ở B,C; AI cắt (O) tại A'. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'BC$.

c) Chứng minh rằng N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Hướng dẫn giải



A thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $\overline{AN_1}.\overline{AM_1}=\overline{AN_2}.\overline{AM_2}$ suy ra $N_1N_2M_2M_1$ là tứ giác nội tiếp dẫn đến

$\widehat{AN_1N_2}=\widehat{AM_2M_1} \Rightarrow \frac{Sđ\overset{\frown}{BM_1}+Sđ\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{Sđ\overset{\frown}{BM_1}+Sđ\overset{\frown}{AB}}{2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB} \Rightarrow OA \perp N_1N_2$

----

b) Gọi H, K là giao điểm của AO với $BC, (O)$.

Tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK}$

$\widehat{AM_1K} = 90^o \Rightarrow HN_1M_1K$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow AB^2 = \overline{AH}.\overline{AK} = \overline{AN_1}.\overline{AM_1} = P_{A/(O_1)} = AI^2$

$\Rightarrow AB = AC = AI$

Suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC

Dẫn đến $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{A'AC} = \frac{1}{2}\widehat{A'BC}$

Suy ra BI là phân giác của $\widehat{A'BC}$

Rõ ràng $A'I$ là phân giác của $\widehat{BA'C}$ (do $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$)

Vì thế I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'BC$

----

c)Giả sử O_1O_2 cắt N_1N_2 tại D, gọi R, R_1, R_2 là bán kính của (O), $(O_1), (O_2)$.

Rõ ràng D là tâm vị tự ngoài của (O_1) và $(O_2) \Rightarrow \frac{DO_1}{DO_2} = \frac{R_1}{R_2}$,lại có $\frac{M_2O_2}{M_1O_1} = \frac{R_2}{R_1}$

Suy ra $\frac{DO_1}{DO_2}.\frac{M_2O_2}{M_2O}.\frac{M_1O}{M_1O_1} = 1$

Dẫn đến D, M_1, M_2 thẳng hàng (Menelauyt đảo)

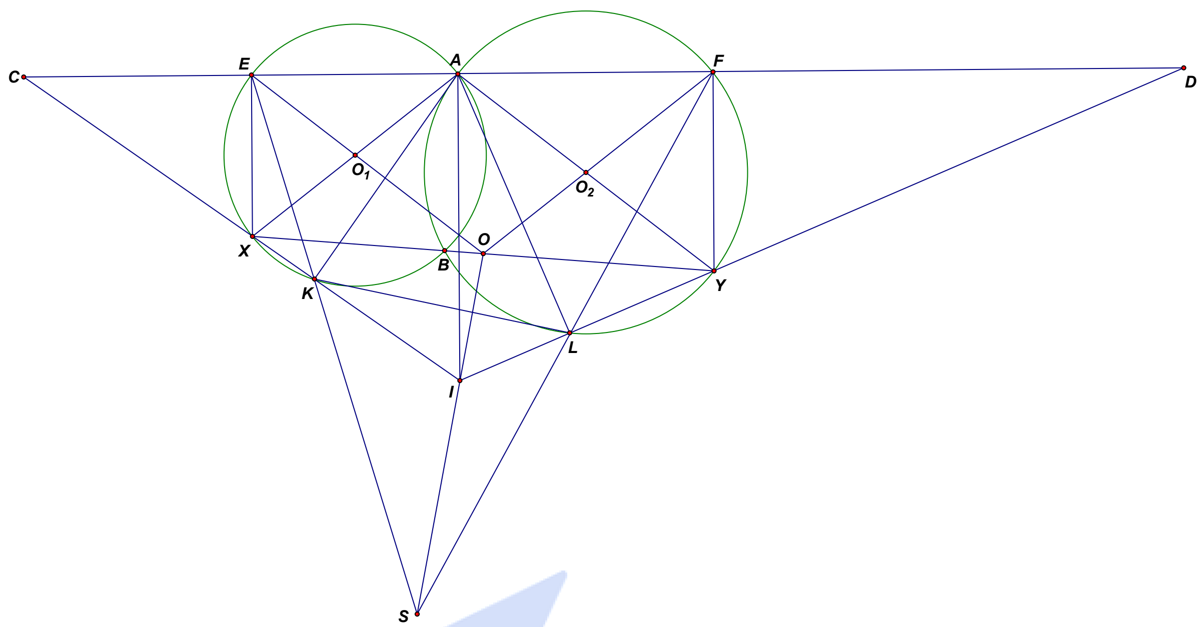
Vậy N_1N_2, O_1O_2, M_1M_2 đồng quy.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. AX, AY lần lượt là các đường kính của (O_1) và (O_2). Gọi O là trung điểm của XY; I là điểm thuộc đường phân giác của góc $\widehat{XAY}$ sao cho OI không vuông góc với XY và I không thuộc hai đường tròn. Đường thẳng đi qua A vuông góc với AI lần lượt cắt các đường tròn (O_1), (O_2) tại các điểm E, F khác A. IX cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai K, IY cắt đường tròn (O_2) tại điểm thứ hai L.

1. Gọi C là giao điểm của EF với IX. Chứng minh rằng OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK).

2. Chứng minh rằng 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy.

Hướng dẫn giải



1. Không mất tính tổng quát giả sử I là điểm thuộc đường phân giác trong của góc $\widehat{XAY}$.
Ta có tứ giác AO_1OO_2 là hình bình hành nên suy ra $OO_1 \parallel HY$
Lại có $(EA,\ EO_1) = (AO_1, AE) = (AF,\ AO_2)\ (\text{mod } \pi) \Rightarrow EO_1 \parallel HY$
Do đó $O,\ O_1,\ E$ thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có $O,\ O_2,\ F$ thẳng hàng
Mặt khác

$$(CE,\ CK) = (AC,\ AK) + (AK,\ CK) = (AC,\ AK) + \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{O_1E},\ \overrightarrow{O_1K}\right) = (EO_1,\ EK)\ (\text{mod } \pi)$$

Do đó OE là tiếp tuyến của đường tròn (CEK)
Nội dung
2. Ta có $\widehat{AKI} = \widehat{ALI} = 90^0$ nên 4 điểm $A,\ I,\ K,\ L$ cùng thuộc đường tròn đường kính AI.
Mà $EF \perp AI$ nên suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AI.
Do đó $(AE,\ AK) = (LA,\ LK)\ (\text{mod } \pi)$ (1)

Mặt khác $(KE,\ KA) = (XE,\ XA) = (XE,\ EA) + (AE, AX) = \frac{\pi}{2} + (AE, AX)\ (\text{mod } \pi)$

$= \frac{\pi}{2} + (AY, AF) = (AF,\ FY) + (AY, AF) = (AY, FY) = (LA, LF)(\text{mod } \pi)$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra
$(EF,\ EK) = (EA,\ AK) + (AK,\ EK) = (LA,\ LK) + (LF,\ LA) = (LF,\ LK)\ (\text{mod } \pi)$
Vậy 4 điểm $E,\ F,\ L,\ K$ cùng thuộc một đường tròn.
Gọi S là giao điểm của EK và FL
Vì 4 điểm $E,\ F,\ L,\ K$ cùng thuộc một đường tròn nên ta có
$\overline{SE}.\overline{SK} = \overline{SF}.\overline{SL} \Rightarrow P_{S/(CEK)} = P_{S/(DFL)}$ (3)
Ta có $\overline{IC}.\overline{IK} = \overline{ID}.\overline{IL} = IA^2 \Rightarrow P_{I/(CEK)} = P_{I/(DFL)}$ (4)
Gọi D là giao điểm của EF với IY
Chứng minh tương tự câu 1) ta có OF là tiếp tuyến của đường tròn (DFL)

Mặt khác tứ giác $EFYX$ là hình thang vuông tại E, F và O là trung điểm của XY nên suy ra $OE = OF$. Do đó $P_{O/(CEK)} = OE^2 = OF^2 = P_{O/(DFL)}$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra S, O, I cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn $(CEK), (DFL)$ nên S, O, I thẳng hàng. Vậy 3 đường thẳng EK, FL, OI đồng quy tại S.

**) Chú ý: Nếu HS không sử dụng góc định hướng thì phải xét các trường hợp vị trí của điểm I (I nằm ngoài các đoạn XK, YL và I nằm trong các đoạn XK, YL)*

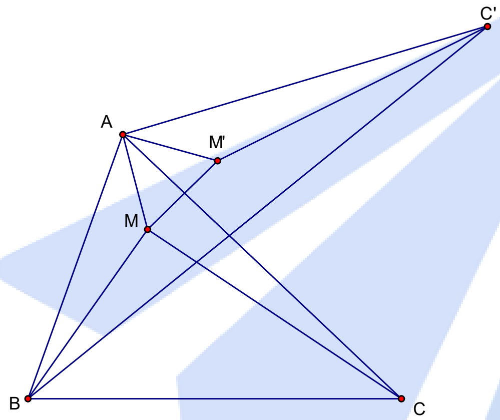
Bài 1: (Kỳ thi học sinh giỏi tỉnh Hà Tĩnh 2008 – 2009) Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$.

a. Nếu biết $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^0$. Hãy tính diện tích tứ giác ABCD theo a.

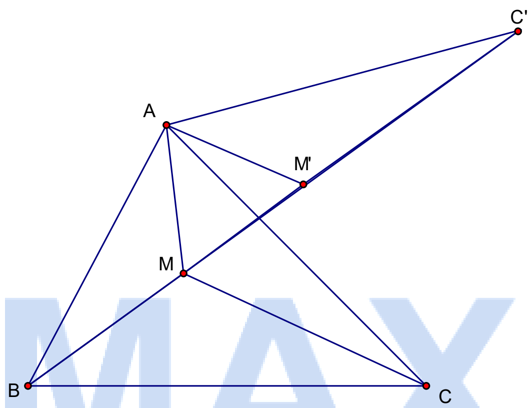
b. Giả sử tứ giác $ABCD$ thay đổi, mà $AB = BC = CD = a$ không đổi. Hãy tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$

Bài 2: (Đề thi chọn HSG vòng tỉnh Vĩnh Long – NH: 2016 – 2017) Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Xác định điểm M bên trong tam giác sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải:



Dùng phép quay quanh A với góc quay 60^0 biến M thành



M'; *C* thành *C'*.

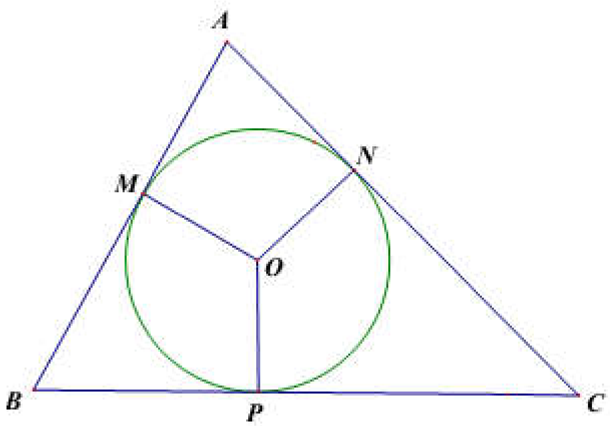
Ta có $MA + MB + MC = BM + MM' + M'C'$.

$MA + MB + MC$ bé nhất khi bốn điểm *B, M, M', C'* thẳng hàng.

Khi đó $\widehat{BMA} = 120^0$. Ta được vị trí của *M* trong tam giác *ABC.*

Bài 3: (Đề thi chọn HSG tỉnh Vĩnh Long – NH : 2015 – 2016) Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng $\frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab} = 1$ với $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của (O) với AB, AC, BC.

Ta có $AM = AN$, $OM = ON$ nên

$$S_{AMON} = \frac{1}{2}AM^2.\sin A + \frac{1}{2}OM^2.\sin \widehat{MON}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AM^2 + OM^2\right).\sin A = \frac{1}{2}.OA^2.\sin A$$

Tương tự: $S_{BPOM} = \frac{1}{2}.OB^2.\sin B$,

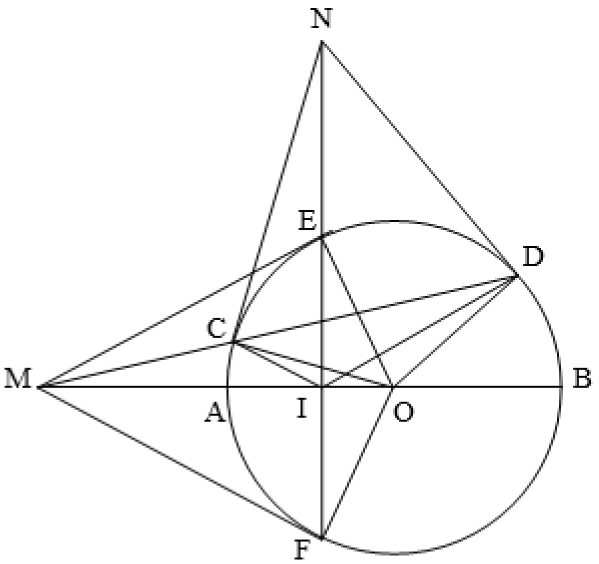
$S_{CPON} = \frac{1}{2}.OC^2.\sin C$

Khi đó: $\dfrac{OA^2}{bc}+\dfrac{OB^2}{ca}+\dfrac{OC^2}{ab}=\dfrac{OA^2.\sin A}{bc.\sin A}+\dfrac{OB^2.\sin B}{ca.\sin B}+\dfrac{OC^2.\sin C}{ab.\sin C}$

$=\dfrac{2\left(S_{AMON}+S_{BPOM}+S_{CPON}\right)}{2S_{ABC}}=\dfrac{2S_{ABC}}{2S_{ABC}}=1$

Bài 4: (Đề đề xuất thi chọn HSG khu vực duyên hải – đồng bằng Bắc bộ năm học 2015 – 2016, trường THPT chuyên Lương Văn Tụy) Cho đường tròn (ω) tâm O đường kính AB, điểm M trên tia đối của tia AB. Đường thẳng d qua M cắt đường tròn (ω) tại C, D. Hai tiếp tuyến của (ω) tại C, D cắt nhau tại N, kẻ NI vuông góc với AB tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC}=\widehat{BID}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi *E, F* thứ tự là giao của *NI* với (ω) suy ra *CEDF* là tứ giác điều hòa

$\Rightarrow$ *ME*, *MF* tiếp xúc với (ω).

Giả sử *C* nằm giữa *M*, *D*. Ta có $MC.MD=ME^2=MI.MO\Rightarrow$ tứ giác *CDOI* nội tiếp

Suy ra $\widehat{AIC}=\widehat{ODC}=\widehat{OCD}=\widehat{BID}\Rightarrow\widehat{AID}=\widehat{BIC}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

V. Bài toán nội tiếp đường tròn

Câu 33. (THPT Chuyên tỉnh Sơn La – Trại hè Hùng Vương lần X)

Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB không đi qua O. C là điểm chính giữa cung nhỏ AB, D nằm ngoài đường tròn (O) sao cho D và C nằm khác phía đối với đường thẳng AB. Qua D kẻ tiếp tuyến DT với đường tròn (O), T là tiếp điểm. CT cắt AB tại E. Đường thẳng qua E và vuông góc với AB cắt OT tại I. Một đường thẳng thay đổi qua D cắt dường tròn (O) tại M và N (M nằm giữa D và N), CM cắt AB tại P.

Chứng minh rằng

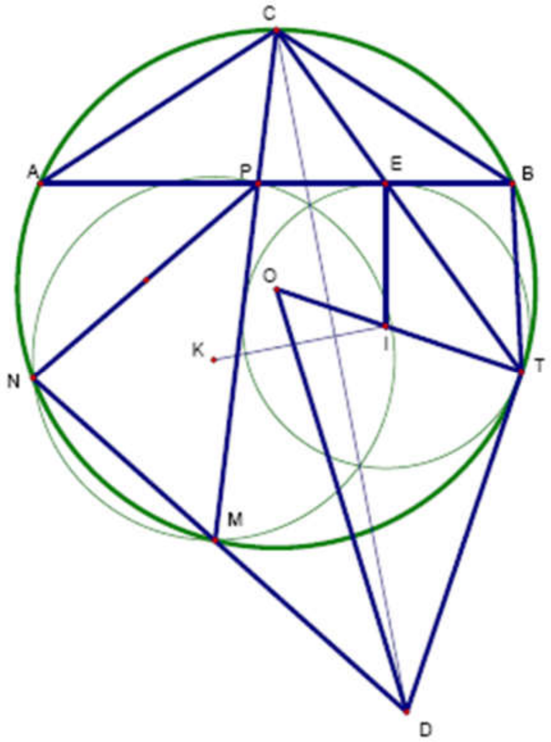
1. Đường tròn tâm I, bán kính IE tiếp xúc trong với đường tròn (O).
2. Tứ giác $ETMP$ nội tiếp một đường tròn.

Lời giải

1) Tam giác OCT đồng dạng với tam giác IET vì: $\widehat{OCT}=\widehat{IET};\ \widehat{OTC}=\widehat{ITE}$

Mà tam giác OCT cân tại O nên tam giác IET cân tại I, suy ra $IE=IT$

Vậy: đường tròn tâm I bán kính IE tiếp xúc trong với đường tròn tâm (O) tại T.



2) Tam giác ACP đồng dạng với tam giác MCA vì $\widehat{CAP} = \widehat{CMA}, \widehat{ACP} = \widehat{MCA}$

Do đó: $AC^2 = CP.CM$

Tương tự, tam giác BCE đồng dạng với tam giác TCB vì $\widehat{CBE} = \widehat{CTB}, \widehat{BCE} = \widehat{TCB}$

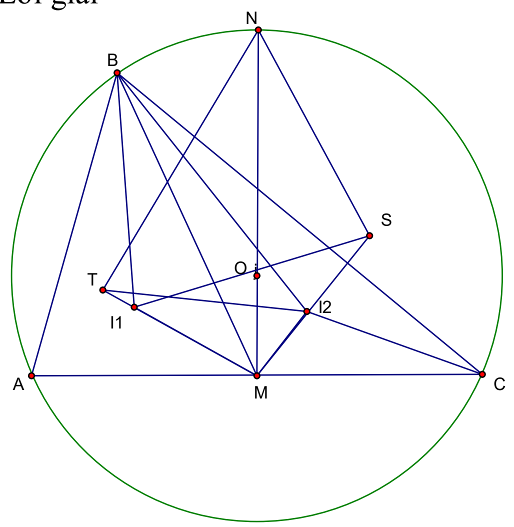
Do đó: $BC^2 = CE.CT$

Suy ra $CP.CM = CE.CT$. Vậy tứ giác PETM nội tiếp

Câu 34. (THPT Chuyên Bắc Ninh – Tỉnh Bắc Ninh- Thi Olympic lần VII – 2013-2014)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi N là điểm chính giữa cung $\widehat{ABC}$ của đường tròn (O); M là trung điểm của AC; I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABM và CBM. Chứng minh rằng I_1 I_2, B, N cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



$I_1M \perp I_2M$ và $MN \perp AC$. Xét phép quay tâm M góc quay 90^o biến C thành N.

Gọi ảnh của điểm I_2 trong quép quay này là T, khi đó T nằm trên I_1M .
Ta định nghĩa tương tự điểm S trên I_2M .

Ta có $\angle I_1TI_2 = \angle MNC = \dfrac{B}{2}$, $\angle I_1SI_2 = \angle ANM = \dfrac{B}{2}$.

Do đó $\angle I_1TI_2 = \angle I_1SI_2 = \dfrac{B}{2} = \angle I_1BI_2$, suy ra I_1, T, B, S, I_2 đồng viên.

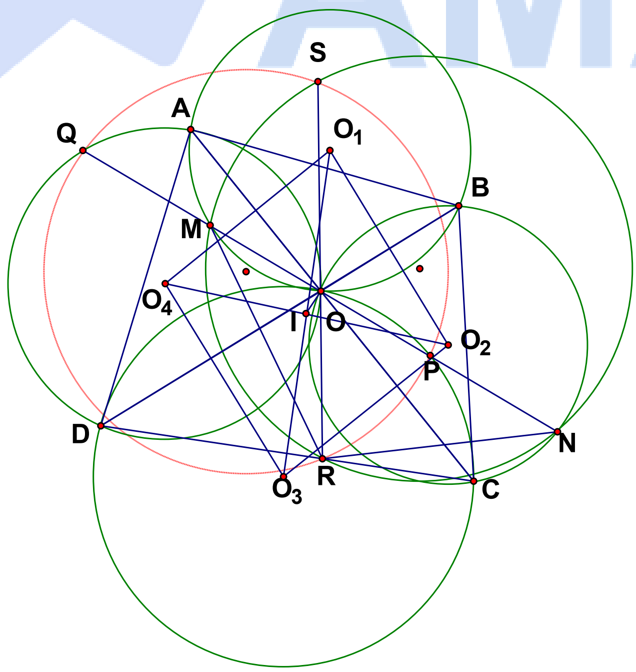
Ta có $\angle TNM = \angle I_2CM = \dfrac{C}{2}$, tương tự $\angle SNM = \dfrac{A}{2}$.

Vì vậy $\angle TNS = 90^o - \dfrac{B}{2}$. Mặt khác góc $\angle TI_2S$ là góc ngoài tam giác TI_2M , nên

$\angle TI_2S = 90^o + \dfrac{B}{2}$.

Do đó N nằm trên đường tròn đi qua các điểm I_1, T, B, S, I_2 .
Do đó ta suy ra ĐPCM

Câu 35. (Trường THPT Chuên Vĩnh Phúc – Trại hè Hùng Vương lần X- 2014)
Cho tứ giác $ABCD$ coa hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng d qua O cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA lần lượt tại M , N , P , Q (các điểm này khác O) sao cho O là trung điểm của MP . Gọi R là một điểm nằm trên đoạn CD (R khác C, D). Gọi S là giao điểm thứ hai của đường thẳng OR với đường tròn ngoại tiếp tam giác MNR . Chứng minh rằng bốn điểm P , Q , R , S cùng nằm trên một đường tròn.
Lời giải



Theo tính chất của hai đường tròn cắt nhau ta có:

$O_1O_4 \perp AC,\ O_2O_3 \perp AC \Rightarrow O_1O_4 \parallel O_1O_4$

$O_1O_2 \perp BD,\ O_3O_4 \perp BD \Rightarrow O_1O_2 \parallel O_3O_4$

Do đó tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành suy ra O_1O_3, O_2O_4 cắt nhau tại điểm I và I là trung điểm của mỗi đoạn O_1O_3, O_2O_4.

Bổ đề. Cho hai đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi I là trung điểm của O_1O_2. Một đường thẳng Δ qua A và cắt $(O_1),(O_2)$ lần lượt tại E, F. Khi đó $AE = AF$ khi và chỉ khi $\Delta \perp AI$.

Thật vậy, gọi K, L lần lượt là trung điểm của AE, AF suy ra $O_1K \perp \Delta$, $O_2L \perp \Delta$. Do đó tứ giác KO_1O_2L là hình thang vuông. Khi đó $\Delta \perp AI$ khi và chỉ khi AI là đường trung bình của hình thang KO_1O_2L hay $AK = AL \Leftrightarrow AE = AF$. Vậy bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán: Do O là trung điểm của MP nên theo bổ đề cho hai đường tròn $(O_1),(O_3)$ và đường thẳng (d) ta được $OI \perp d$, cũng theo bổ đề trên cho $(O_2),(O_4)$ và đường thẳng (d) ta được O là trung điểm của NQ. Từ đó suy ra $OM.ON = OP.OQ$ (1).

Do bốn điểm M, R, N, S cùng nằm trên một đường tròn nên $OR.OS = OM.ON$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $OR.OS = OP.OQ \Rightarrow$ bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 36. (THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương – Toán 11- 2015)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có AC vuông góc với BD tại H. Gọi I, J, K, L lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Gọi M, N, P, Q tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

a. Chứng minh rằng các điểm I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OH.

b. Chứng minh giao điểm của IK và JL nằm trên đường thẳng OH.

Lời giải

ớc hết ta chứng minh H, I, P thẳng hàng. Thật vậy, $\widehat{AHI} = 90^0 - \widehat{IAH} = 90^0 - \widehat{HDC} = \widehat{HCD} = \widehat{PHC}$ (vì HP là trung tuyến của tam giác vuông HCD)

ra I, H, P thẳng hàng. Tương tự cũng có J, H, Q thẳng hàng, K, H, M
ng hàng, L, H, N thẳng hàng.
ràng I và K nằm trên đường tròn đường kính MP, J và L nằm trên đường
đường kính NQ. (1)
t khác, MNPQ là hình bình hành và MN song song AC, NP song song
, AC vuông góc BD nên MN vuông góc NP, vì vậy MNPQ là hình chữ
t. Do đó đường tròn đường kính MP cũng là đường tròn đường kính NQ

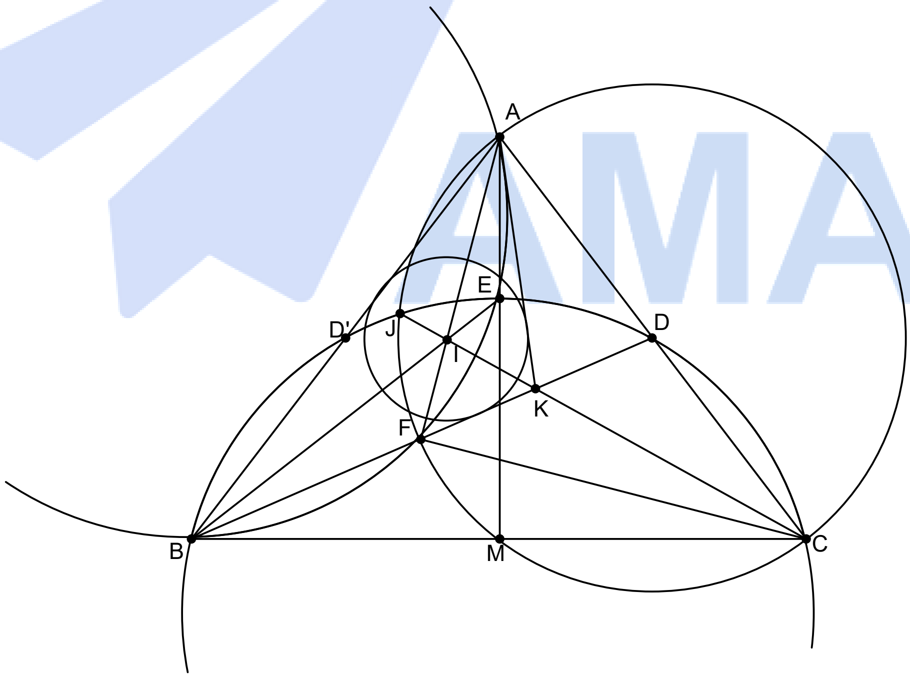
(1) và (2) suy ra I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có
là trung điểm của MP và NQ, gọi tâm đó là T. Hơn nữa, OM song song
(vì cùng vuông góc với AB), OP song song HM(vì cùng vuông góc với
) nên OMHP là hình bình hành, do đó trung điểm T của MP cũng là
ng điểm của OH.
y I, J, K, L, M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung
m của OH.
2 điểm) Ta sẽ dùng phép nghịch đảo để chứng minh phần này.
hiệu (T) là đường tròn được nêu trong phần (a).Ta có
$_{(T)} = \overline{HI}.\overline{HP} = \overline{HJ}.\overline{HQ} = \overline{HK}.\overline{HM} = \overline{HL}.\overline{HN} = k$ nên phép nghịch đảo cực H
rong tích k biến I thành P, J thành Q, K thành M, L thành N.
xét hai trường hợp:
Nếu IK và JL đều không đi qua H: thế thì phép nghịch đảo nêu trên biến

thành đường tròn (HPM), biến JL thành đường tròn (HQN). Gọi G là
o điểm của IK và JL, phép nghịch đảo trên biến G thành G' thì G' thuộc
hai đường tròn (HPM) và (HQN). Vậy đường thẳng HG' là trục đẳng
rơng của hai đường tròn này.
có MNPQ là hình chữ nhật tâm T nên $\overline{TM}.\overline{TP}=\overline{TN}.\overline{TQ}\Rightarrow P_{T/(HPM)}=P_{T/(HQN)}$
đó T thuộc trục đẳng phương HG'. Mà T là trung điểm của OH và H, G,
hẳng hàng nên G nằm trên đường đẳng OH.(đpcm)
Nếu IK hoặc JL đi qua H: giả sử IK đi qua H, thế thì AB song song CD
ı ABCD là hình thang nội tiếp đường tròn (O), do đó ABCD là hình thang
. Khi đó I, H, O, K thẳng hàng nên giao điểm của IK và JL nằm trên
ờng thẳng OH.(đpcm)

LOẠI 2: Chứng minh các tính chất:tam giác, tứ giác đường tròn.

Câu 37. Cho tam giác ABC cân tại A.Gọi D là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD giao với phân giác góc $\widehat{BAC}$ tại E nằm trong tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE giao với BD tại F (khác B), AF giao với BE tại I. CI giao với BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK.(Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Hướng dẫn giải:



Gọi D' là trung điểm của AB và M là trung điểm cạnh BC.

Ta có D' nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Do tính đối xứng nên suy ra $\overset{\frown}{D'E}=\overset{\frown}{ED}$ suy ra

$\widehat{ABI}=\widehat{D'BE}=\widehat{EBD}=\widehat{IBK}$

Suy ra I nằm trên phân giác góc $\widehat{ABK}$ hay BI là tia phân giác góc $\widehat{ABK}$ $\quad(1)$

Ta có: $\widehat{DFA}=180^o-\widehat{BFA}=180^o-\widehat{BEA}=\widehat{MEB}=\frac{1}{2}\widehat{CEB}=\frac{1}{2}\widehat{CDB}$

$\Rightarrow\widehat{DFA}=\widehat{DAF}$ suy ra ΔADF cân tại D và tam giác AFD vuông tại F.

Do $IA.IF = IE.IB$ nên I thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.Từ đó CI đi qua giao điểm thứ hai J của hai đường tròn này.

Ta có $\widehat{DCJ} = \widehat{DJC} = \widehat{DBC}$ nên $DA^2 = DC^2 = DK.DB$

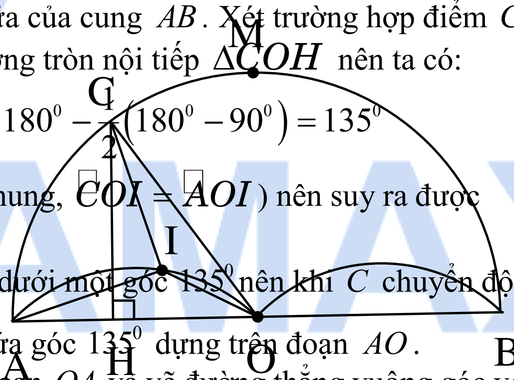
Suy ra $\widehat{DAK} = \widehat{DBA}$ hay $\widehat{FAD} - \widehat{FAK} = \widehat{DFA} - \widehat{FAB}$. Từ đó $\widehat{FAK} = \widehat{BFA}$.Ta có (đpcm)

Câu 38. Gọi D là trung điểm cạnh BC của ΔABC và E, Z lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Giả sử T là giao điểm của các tiếp tuyến tại E, Z với đường tròn đường kính AD. Chứng minh rằng $TB = TC$.(Tỉnh Nam Định 2010-2011-vòng 1)

Câu 39. Gọi M là giao điểm của hai đường chéo AB, AC trong tứ giác lồi $ABCD$. Phân giác của góc ACD cắt cạnh AB tại K. Nếu $MA.\text{MC} + \text{MA.CD} = MB.MD$, chứng minh rằng góc BKC bằng góc CDB.(Tỉnh Nam Định 2010-2011-vòng 2)

LOẠI 3: Tìm quỹ tích:

Câu 40. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và C là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn này. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH. Tìm tập hợp các điểm I.(Trường THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ)



Phần thuận: Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Xét trường hợp điểm C chuyển động trên cung nhỏ AM. Do I là tâm đường tròn nội tiếp ΔCOH nên ta có:

$\widehat{CIO} = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\widehat{HCO} + \widehat{HOC}\right) = 180^0 - \frac{1}{2}\left(180^0 - 90^0\right) = 135^0$

Do $\Delta AIO = \Delta CIO$ (OA = OC, OI chung, $\widehat{COI} = \widehat{AOI}$) nên suy ra được

$\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^0$

Do A, B cố định và I luôn nhìn AB dưới một góc 135^0 nên khi C chuyển động trên cung $\overset{\frown}{AM}$ thì I chuyển động trên cung chứa góc 135^0 dựng trên đoạn AO.

Phần đảo: Lấy điểm H bất kì thuộc đoạn OA và vẽ đường thẳng vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C. Dựng phân giác trong của $\widehat{COH}$ cắt cung chứa góc 135^0 dựng trên OA tại điểm I. Ta chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của ΔCOH.

Do I thuộc cung chứa góc 135^0 dựng trên OA nên $\widehat{AIO} = 135^0$ ngoài ra ta có

$\Delta AOI = \Delta COI$ (cgc) nên $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^0$, $\widehat{ICO} = \widehat{IAO}$

Suy ra $\widehat{AIC} = 360^0 - \left(\widehat{CIO} + \widehat{AIO}\right) = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $ACIH$ nội tiếp được tromg đường tròn

đườngkính AC Suy ra $\widehat{ICH} = \widehat{IAH}$. Mặt khác $\widehat{ICO} = \widehat{IAO} \Rightarrow \widehat{ICH} = \widehat{ICO}$ hay I là tâm đường trònnội tiếp của ΔCOH

Khi C chuyển động trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BM}$, chứng minh tương tự, cho I chuyển động trên cung
chứa góc 135^0 dựng trên đoạn OB.

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB đã cho thì I tâm đường tròn nội tiếp của ΔCOH chuyển động trên 2 cung chứa góc 135^0 dựng trên các đoạn OA, OB thuộc nửa mặt phẳng bờ AB cùng phía với nửa đường tròn đã cho.