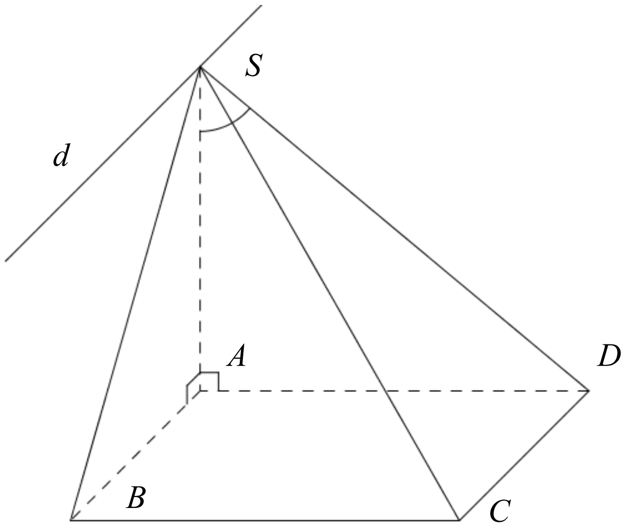
Ta thấy giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường d qua S và song song với AB.

Dễ chứng minh $d \perp (SAD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là $\widehat{DSA}$.

Ta dễ thấy góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SCA} = 45^0$.Từ đó dễ dàng tính được $SA = AC = a\sqrt{2}, AD = a$.

$\Rightarrow \tan \widehat{DSA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35^0 15'$.



Câu 22. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0. Tính góc giữa (SBC) và (SCD).

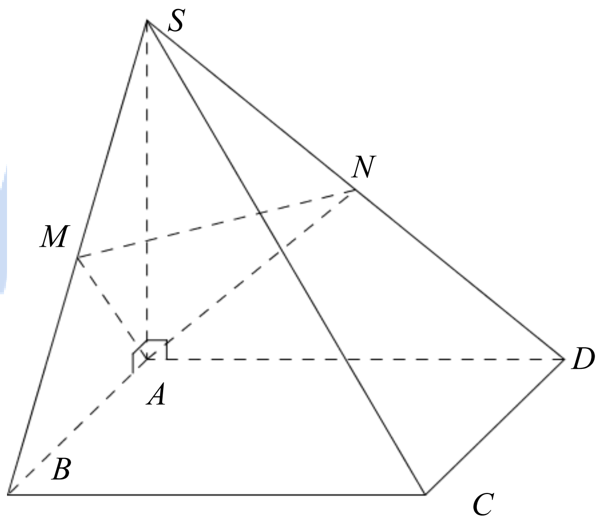
A. $\alpha = 74^0 12'$. **B.** $\alpha = 42^0 34'$.
C. $\alpha = 30^0$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Hướng dẫn giải

Dễ chứng minh được góc giữa (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 45^0$ nên $SA = a$

Lấy M, N là trung điểm SB, SD. Dễ chứng minh $AN \perp (SCD)$, $AM \perp (SBC)$ suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) là góc giữa AN, AM.

$$AM = AN = MN = \frac{DB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^0.$$



Câu 23. Cho $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết rằng $SA = SB = a$, $SC = a\sqrt{2}$. Hỏi góc giữa (SBC) và (ABC) ?

A. $\alpha \approx 50^0 46'$. **B.** $\alpha = 63^0 12'$.
C. $\alpha = 34^0 73'$. **D.** $\alpha = 42^0 12'$.

Hướng dẫn giải

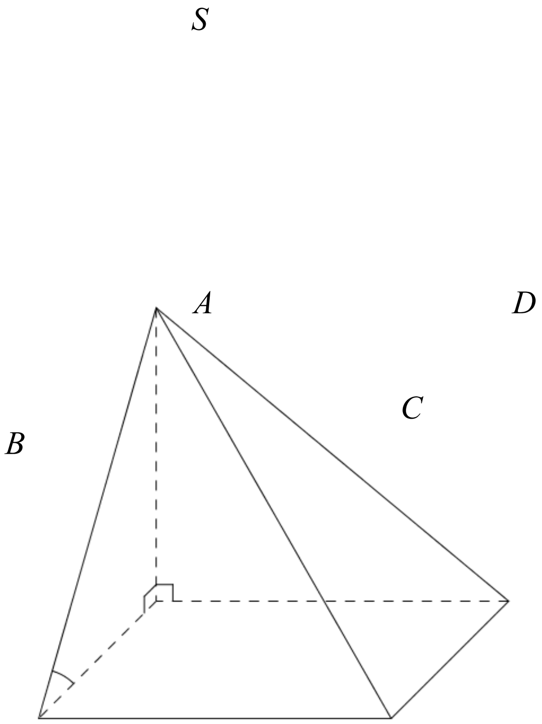
Hạ $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SHA}$.

$$SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{SHA} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 50^0 46'.$$

Câu 24. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA$ vuông góc mặt phẳng đáy, SC hợp với mặt phẳng đáy góc 45^0 và hợp với (SAB) góc 30^0. Tính góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy?

A. $\alpha = 83^0 81'$.
B. $\alpha = 79^0 01'$.
C. $\alpha = 62^0 33'$.
D. $\alpha \approx 54^0 44'$.

Hướng dẫn giải



Dễ thấy rằng $\widehat{SCA} = 45^0, \widehat{BSC} = 30^0$.

$\Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + a^2}$

$\Delta SBA \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

$\Delta SBC \Rightarrow SB.\tan 30^0 = BC$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x = a$

$BC = x \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + a^2}$

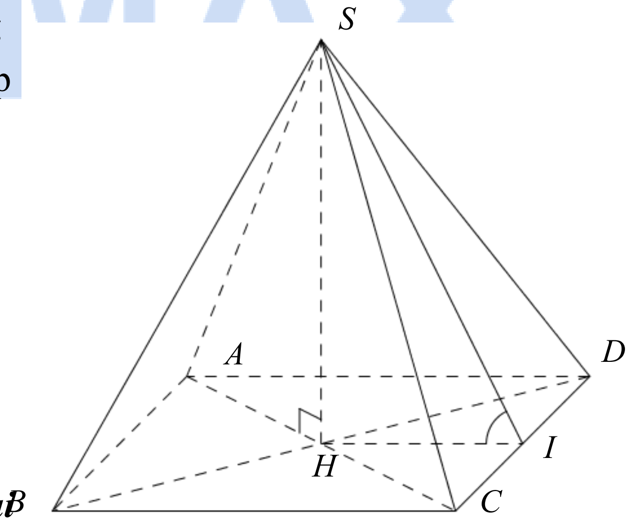
$\Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAB có $\tan \widehat{SBA} = \sqrt{2}$ nên $\alpha \approx 54^0 44'$.

Câu 25. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$?

A. $\alpha = 75^0 46'$
B. $\alpha = 71^0 21'$
C. $\alpha = 68^0 31'$
D. $\alpha \approx 65^0 12'$

Hướng dẫn giải



Hạ $SH \perp (ABCD)$. Do các cạnh bên bằng nhau nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy, tức H là tâm đáy. Lấy I là trung điểm BC nên góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH}$.

$IH = 2a,\ SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \tan \widehat{SIH} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \alpha \approx 65^0 12'$.

Câu 26. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $a \perp d$.

Hướng dẫn giải:

- Đường thẳng d có thể vuông góc với hai đường thẳng song song nằm trên mặt phẳng (α) nên đáp án này **sai.**
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì lúc đó nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) nên nó vuông góc với hai đường thẳng thì hiển nhiên **đúng.**
- đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì nó sẽ vuông góc với mặt phẳng (α) và do đó d vuông với mọi đường thẳng nằm trong (α) là hiển nhiên **đúng.**
- Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d song song hoặc trùng với giá của véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) do đó nếu đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $a \perp d$ là **đúng.**

Câu 27. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O**.** Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Qua điểm O có vô số đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước chúng nằm trong mặt phẳng qua O và vuông góc với đường thẳng Δ.

Câu 28. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng đi qua O và vuông góc với một đường thẳng cho trước

Câu 29. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề ***sai*** ?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Hướng dẫn giải:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song **nếu hai đường thẳng này đồng phẳng.** Trong trường hợp không đồng phẳng chúng có thể chéo nhau trong không gian.

Các đáp án khác đều đúng hiển nhiên

Câu 30. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là *3, 4, 5* thì độ dài đường chéo của nó là:

A. $5\sqrt{2}$. B. 50. C. $2\sqrt{5}$. D. 12.

Hướng dẫn giải:

Độ dài đường chéo của hình hộp là $\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Vậy đáp án đúng là $5\sqrt{2}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. $SA\perp BC$. B. $AH\perp BC$. C. $AH\perp AC$. D. $AH\perp SC$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$.

Mà $\triangle ABC$ vuông tại *B*: $AB\perp BC$.

$\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp AH\subset(SAB)$; $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp SB\end{cases}\Rightarrow AH\perp SC\subset(SBC)$.

Nếu $\begin{cases}AH\perp AC\\SA\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp AB\subset(SAB)$ thì $\triangle ABC$ vuông tại *A* (Vô lý).

Vậy $AH\perp AC$ là **sai.**

Câu 32. Cho điểm *A* nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên (P). *M, N* là các điểm thay đổi trong (P). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Nếu $AM=AN$ thì $HM=HN$.

B. Nếu $AM>AN$ thì $HM>HN$.

C. Nếu $AM>AN$ thì $HM<HN$.

D. Nếu $HM>HN$ thì $AM>AN$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất mối liên hệ giữa đường xiên (AM,AN) và hình chiếu (HM,HN). Đường xiên dài hơn có hình chiếu dài hơn và ngược lại. Mệnh đề **sai** là "Nếu $AM>AN$ thì $HM<HN$".

Câu 33. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông gó**C.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba mặt phẳng (ABC); (ABD); (ACD) đôi một vuông gó**C.**

B. Tam giác *BCD* vuông.

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác *BCD.*

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Hướng dẫn giải:

- Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên $AB \perp (ACD)$; $AC \perp (ABD)$; $AD \perp (ABC)$ do đó ba mặt phẳng (ABC); (ABD); (ACD) đôi một vuông góc.
- Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên (BCD). $AH \perp (BCD)$

  $\mathrm{AH} \perp (\mathrm{BCD}) \Rightarrow \mathrm{AH} \perp \mathrm{CD} \Rightarrow \mathrm{CD} \perp (\mathrm{ABH}) \Rightarrow \mathrm{CD} \perp \mathrm{BH}$

  Tương tự $\mathrm{AH} \perp (\mathrm{BCD}) \Rightarrow \mathrm{AH} \perp \mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{CD} \perp (\mathrm{ADH}) \Rightarrow \mathrm{BC} \perp \mathrm{DH}$

  Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.
- Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên

  $AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$

  $AC \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp BD$

  $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$

  Vậy hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.
- Vậy tam giác *BCD* vuông là **sai**.

Câu 34. Cho đoạn thẳng *AB* là *(P)* là mặt phẳng trung trực của nó**.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $MA = MB \Rightarrow M \in (P)$.
B. $MN \subset (P) \Rightarrow MN \perp AB$.
C. $MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.
D. $M \in (P) \Rightarrow MA = MB$.

Hướng dẫn giải:

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B* $\Rightarrow$ Nếu $M \in (P) \Rightarrow MA = MB$

Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB $\Rightarrow AB \perp (P)$ do đó Nếu $MN \subset (P) \Rightarrow MN \perp AB$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B* $\Rightarrow$ Nếu $MA = MB \Rightarrow M \in (P)$.

Nếu $MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$ là sai vì *MN* có thể là đoạn thẳng đi qua *A* và vuông góc với *AB* lúc đó $MN // (P)$.

VẬN DỤNG THẤP

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$**.** Chọn đáp án **đúng**:

A. $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{2AA'} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.
D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải

Lưu ý phép cộng vectơ đối với hình vuông $ABCD$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có giá trị bằng:

A. a^2. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{BAC}=45°$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{A'C'}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AB}\right)=a.a.1=a^2$

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=k\overrightarrow{AC'}$. Giá trị của k là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$. Vậy $k=1$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N là trung điểm của các cạnh AC và BD, G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và O là một điểm bất kỳ trong không gian. Giá trị k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{OG}=k\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ là:

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2..

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm tứ diện nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Vậy $k=\frac{1}{4}$.

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, G là trọng tâm của tứ diện $BA'B'C'$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IG}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Chọn đáp án ***đúng*** :

A. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-2\vec{a}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}\right)$..

Hướng dẫn giải

Ta có: G là trọng tâm của tứ diện $BA'B'C'$ nên :

$$4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'A'}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{IC'}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC'}+\left(2\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{C'A'}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}+\vec{0}+2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\vec{a}+2\left(\vec{b}-\vec{c}\right)-\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$$

Câu 40. Cho chóp $S.ABC$ có ΔSAB đều cạnh a, ΔABC vuông cân tại B và $(SAB)\perp(ABC)$. Tính góc giữa SC và (ABC) ?

A. $\alpha=39^0 12'$. **B.** $\alpha=46^0 73'$. **C.** $\alpha\approx 35^0 45'$. **D.** $\alpha=52^0 67'$

Hướng dẫn giải

Lấy H là trung điểm AB. Dễ thấy $SH\perp(ABC)$ nên CH là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC). Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCH}$.

$$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}, HC=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Rightarrow \alpha\approx 35^0 45'.$$

Câu 41. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa SB và AC ?

A. $\alpha\approx 69^0 17'$. **B.** $\alpha\approx 72^0 84'$. **C.** $\alpha\approx 84^0 62'$. **D.** $\alpha\approx 27^0 38'$.

Hướng dẫn giải

Lấy M là trung điểm SD. Khi đó góc cần tìm là góc giữa OM và OC.

Ta có MC là trung tuyến

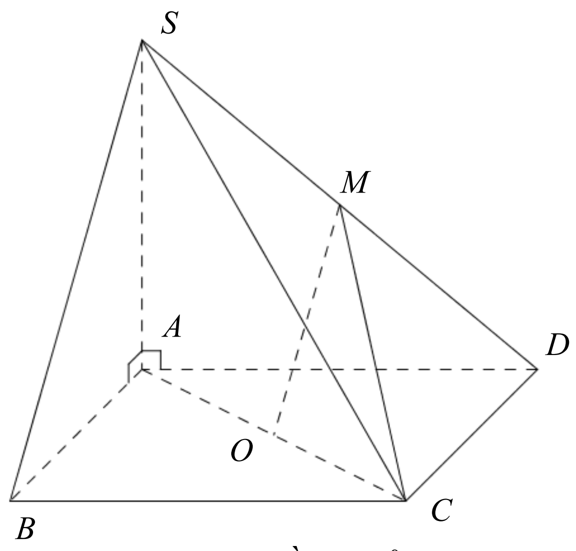
$$\Delta SCD\Rightarrow MC^2=\frac{SC^2+DC^2}{2}-\frac{SD^2}{4}=2a^2$$

$$\Rightarrow MC=a\sqrt{2}$$

Xét ΔMOC có :

$$\cos\widehat{MOC}=\frac{MO^2+OC^2-MC^2}{2.MO.OC}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha\approx 69^0 17'$$



Câu 42. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1$, $AA'=m\left(m>0\right)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để góc giữa AB' và BC' bằng 60^0 ?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải