Mà: $\begin{cases} AC \perp IH \subset (ABC) \\ AC \perp A'I \subset (ACC'A') \\ (ABC) \cap (ACC'A') = AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{A'IH}$ là góc gữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(ABCD) \Rightarrow \widehat{A'IH} = 45°$

Trong tam giác $A'HI$ vuông tại $H$, ta có: $\tan 45° = \dfrac{A'H}{HI} \Rightarrow A'H = IH.\tan 45°$ .

$= IH = \dfrac{1}{2}MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{16}$

**Câu 37.** Cho hình chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy $(ABC)$ bằng $60^0$, khoảng cách giữa hai đường thẳng $SA$ và $BC$ bằng $\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo $a$ bằng

**A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

**Hướng dẫn giải:**

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.

Trong mp(SAM), Kẻ $MH \perp SA, (H \in SA)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MH$.

Do đó $MH$ là đường vuông góc chung của $SA$ và $BC$.

Suy ra $MH = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. Ta có: $SM \perp BC \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SMA} = 60^0$.

Đặt $OM = x \Rightarrow AM = 3x, OA = 2x$.

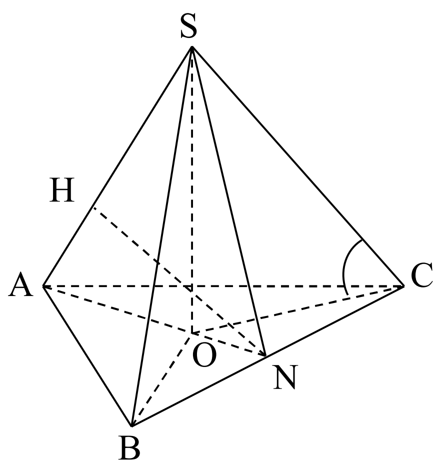
$\Rightarrow SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$ và

$SA = \sqrt{\left(x\sqrt{3}\right)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{7}$.

Trong $\Delta SAM$ ta có:

$SA.MH = SO.AM$

$\Leftrightarrow x\sqrt{7}.\dfrac{3a}{2\sqrt{7}} = x\sqrt{3}.3x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.




Khi đó:

$AM = 3x = 3.\dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a$.

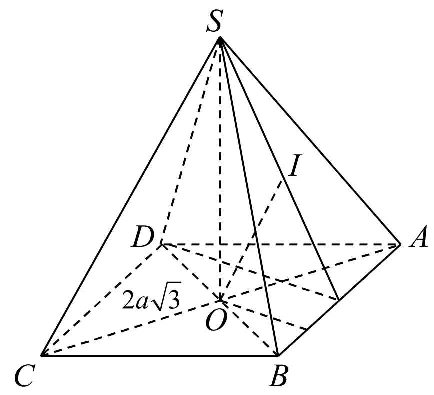
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{24}$

**Câu 38.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O$, $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$, hai mặt phẳng $(SAC)$ và $(SBD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$

. Biết khoảng cách từ điểm $O$ đến mặt phẳng $(SAB)$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**A.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

**Hướng dẫn giải**




Ta có tam giác ABO vuông tại O và $AO = a\sqrt{3}$, $BO = a$. Do đó

$\frac{AO}{BO} = \sqrt{3} = \tan 60^0 \Rightarrow \widehat{ABO} = 60^0$.

Suy ra $\Delta ABD$ đều.

Ta có:

$$\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD$$

.

Trong tam giác đều $ABD$, gọi H là trung điểm AB, K là trung điểm BH,

suy ra $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$; $OK // DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$.

Gọi I là hình chiếu của O lên SK, ta có: $OI \perp SK; AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$.

$\Rightarrow OI = d[O;(SAB)]$.

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao: $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4.S_{\Delta ABO}.SO = \frac{1}{3}.4.\frac{1}{2}.OA.OB.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

**Câu 39.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng từ $O$ đến mặt bên là $a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo $a$.

**A.** $2a^3\sqrt{3}$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $6a^3\sqrt{3}$. **D.** $8a^3\sqrt{3}$.

**Hướng dẫn giải:**

Gọi $M$ là trung điểm của $CD$,

trong $\Delta SOM$ kẻ đường cao $OH$.

$\Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow OH = a$.

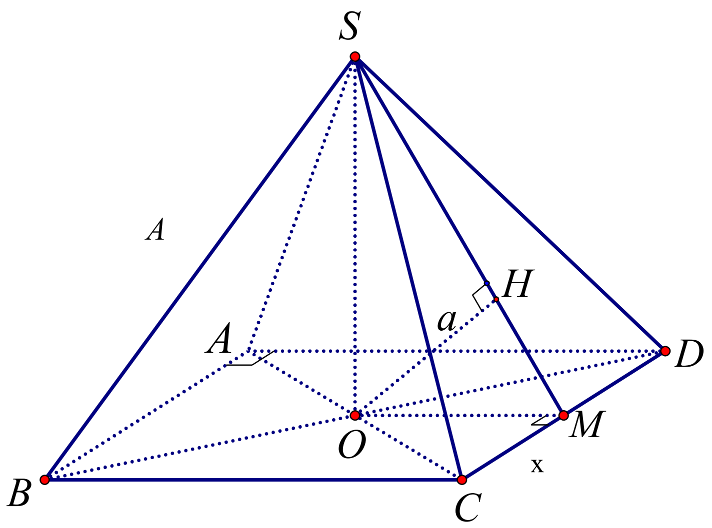
Đặt $CM = x$. Khi đó $OM = x$, $SM = x\sqrt{3}$,

$SO = \sqrt{SM^2 - x^2} = x\sqrt{2}$.

Ta có: $SM.OH = SO.OM$

$\Leftrightarrow x\sqrt{3}.a = x\sqrt{2}.x \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow CD = a\sqrt{6}, SO = a\sqrt{3}$




$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.CD^2.SO = \dfrac{1}{3}.6a^2.a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$.

**Câu 40.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$ biết $AB = 2a$ . $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo $a$ biết góc giữa $(SCD)$ và $(ABCD)$ bằng $60^0$.

**A.** $2\sqrt{6}a^3$. **B.** $6\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

**Hướng dẫn giải:**

Dựng $AM \perp CD$ tại $M$.

Ta có: $\widehat{SMA} = 60^0$ .

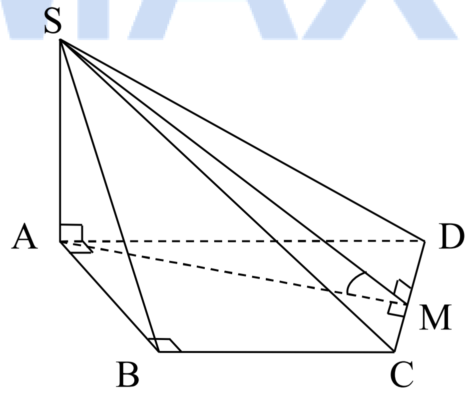
$S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2}.AB = 4a^2$

$CD = \sqrt{(AD - BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = a^2$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$

$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \dfrac{2S_{ACD}}{CD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$




Ta có: $SA = AM.\tan\widehat{SMA} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a$ . $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$ .

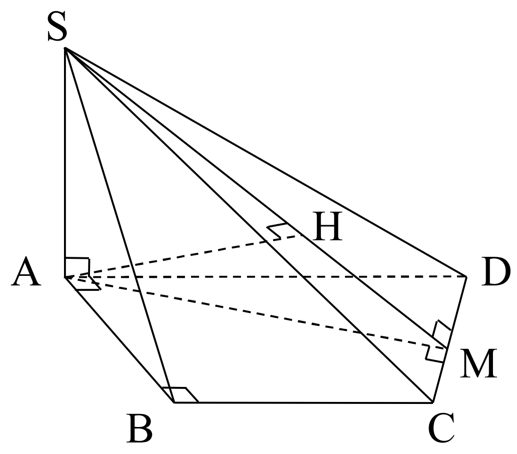
**Câu 41.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ và $B$ biết $AB = 2a$. $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo $a$, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(SCD)$ bằng $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}a$.

**A.** $6\sqrt{6}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

## Hướng dẫn giải:

Dựng $AM \perp CD$ tại $M$.

Dựng $AH \perp SM$ tại $H$.




Ta có: $AH = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}a$ .

$S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2}.AB = 4a^2$

$CD = \sqrt{(AD-BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = a^2$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$

$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \dfrac{2S_{ACD}}{CD} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = \dfrac{AH.AM}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$

**Câu 42.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng $BB'$ và $(ABC)$ bằng $60°$, tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và góc $\widehat{BAC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm $B'$ lên $(ABC)$ trùng với trọng tâm của $\Delta ABC$. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo $a$ bằng

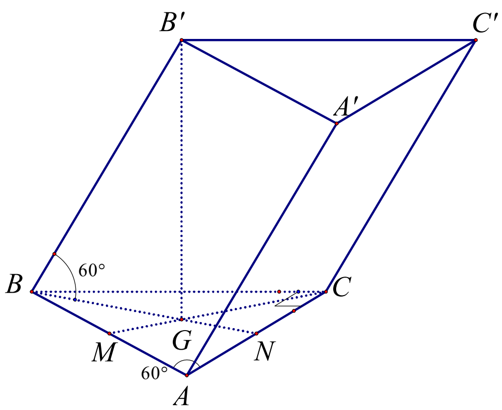
**A.** $\dfrac{13a^3}{108}$. **B.** $\dfrac{7a^3}{106}$. **C.** $\dfrac{15a^3}{108}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{208}$.

## Hướng dẫn giải:

Gọi $M, N$ là trung điểm của $AB, AC$

và $G$ là trọng tâm của $\Delta ABC$.

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{BB',(ABC)}\right) = \widehat{B'BG} = 60^0$.




$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G = \dfrac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại $G$, có $\widehat{B'BG} = 60^0$

$\Rightarrow B'G = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)

Đặt $AB = 2x$. Trong $\Delta ABC$ vuông tại $C$ có $\widehat{BAC} = 60^0$

$\Rightarrow$ tam giác $ABC$ là nữa tam giác đều $\Rightarrow AC = \dfrac{AB}{2} = x,\ BC = x\sqrt{3}$

Do $G$ là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{4}$.

Trong $\Delta BNC$ vuông tại $C$: $BN^2 = NC^2 + BC^2$

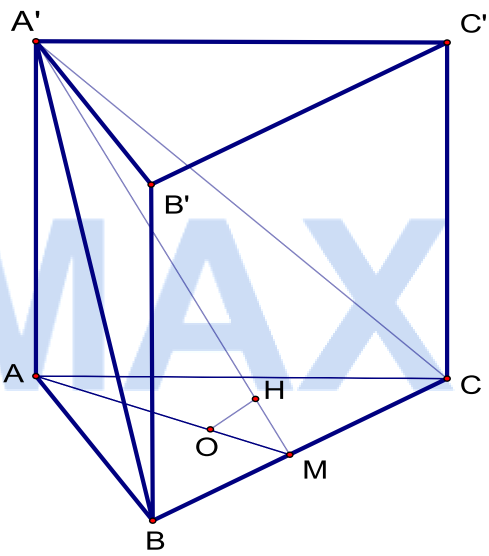
$$\frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \dfrac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy, $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

**Câu 43.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Khoảng cách từ tâm $O$ của tam giác $ABC$ đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ .

**A.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

**Hướng dẫn giải:**




Gọi $M$ là trung điểm của $BC$,
ta có $(A'AM) \perp (A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$ .

Trong $(A'AM)$ kẻ $OH \perp A'M \; (H \in A'M)$.

$\Rightarrow OH \perp (A'BC)$

Suy ra: $d\left(O,(A'BC)\right) = OH = \frac{a}{6}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và $OHM$ có góc $\hat{M}$ chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\frac{OH}{A'A} = \frac{OM}{A'M} \Rightarrow \frac{\frac{a}{6}}{A'A} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2 + AM^2}} \Rightarrow \frac{1}{A'A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

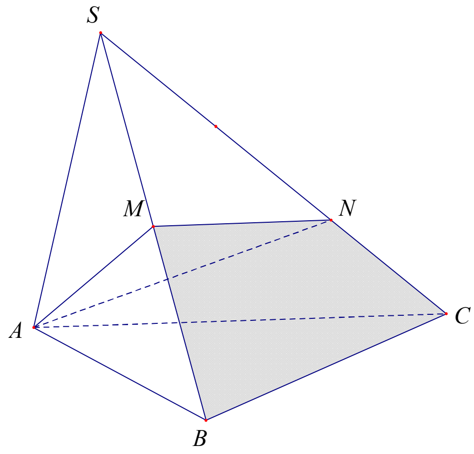
$\Rightarrow A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

## VẬN DỤNG CAO

**Câu 44.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $M$ là trung điểm của $SB$, $N$ là điểm trên cạnh $SC$ sao cho $NS = 2NC$. Kí hiệu $V_1, V_2$ lần lượt là thể tích của các khối chóp $A.BMNC$ và $S.AMN$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$ **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=2.$ **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=3$

**Hướng dẫn giải**




$\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$;

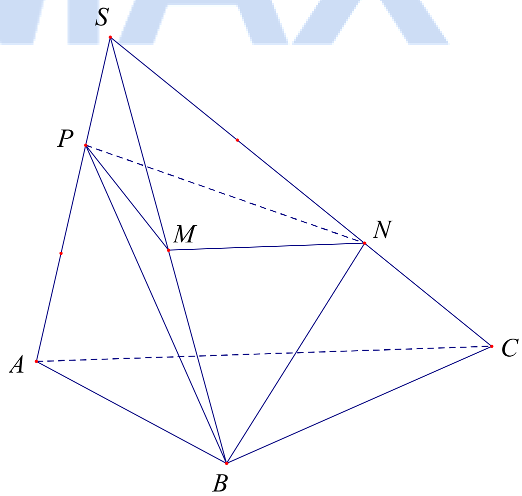
$V_{S.AMN}+V_{A.BMNC}=V_{S.ABC}$.

Suy ra, $\dfrac{V_{A.BMNC}}{V_{S.AMN}}=2$.

**Câu 45.** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $M$ là trung điểm của $SB$, $N$ là điểm trên cạnh $SC$ sao cho $NS=2NC$, $P$ là điểm trên cạnh $SA$ sao cho $PA=2PS$. Kí hiệu $V_1,V_2$ lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $BMNP$ và $SABC$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}$.

**Hướng dẫn giải**




$\dfrac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot d(N,(SAB))\cdot S_{BMP}}{\frac{1}{3}\cdot d(C,(SAB))\cdot S_{SAB}}$;

$\dfrac{d(N,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\dfrac{NS}{CS}=\dfrac{2}{3}$,

$S_{BPM}=\dfrac{1}{2}S_{BPS}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}S_{SAB}$

Suy ra, $\dfrac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$.

**Câu 46.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(ABCD)$ bằng $45°$, $M$, $N$ và $P$ lần lượt là trung điểm các cạnh $SA,SB$ và $AB$. Tính thể tích $V$ của khối tứ diện $DMNP$.

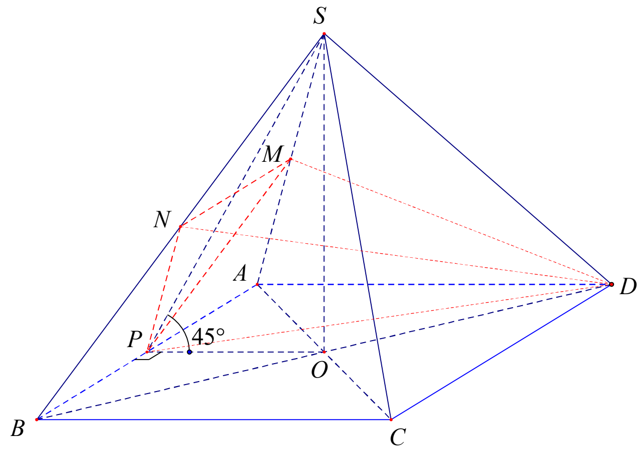
**A.** $V=\dfrac{a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{a^3}{4}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{12}$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có: $\frac{S_{SMN}}{S_{SAB}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4}$.

Tương tự, $\frac{S_{BNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}, \frac{S_{AMP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$ (có thể khẳng định $\frac{S_{MNP}}{S_{SAB}} = \frac{1}{4}$ nhờ hai tam giác MNP và BAS là hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k = \frac{1}{2}$).




Do đó $\frac{V_{D.MNP}}{V_{D.SAB}} = \frac{1}{4}$ (1)

$V_{D.SAB} = V_{S.DAB} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD}$. (2)

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} OP.\tan 45°.S_{ABCD} = \frac{4a^3}{3}$ (3). Từ (1), (2) và (3):

$V_{DMNP} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{4a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$.

**Câu 47.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = \sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ trên mặt phẳng $(ABC)$ là trung điểm cạnh $AC$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

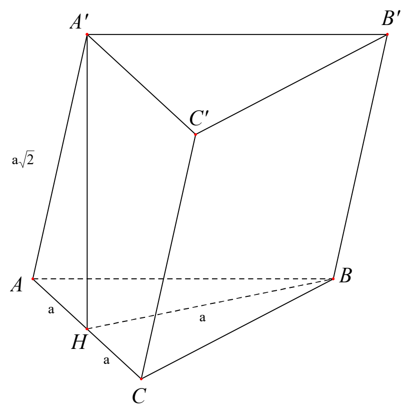
**A.** $V = \frac{1}{2}a^3$. **B.** $V = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

**Hướng dẫn giải**

Vì $ABC$ là tam giác vuông cân tại $B$ nên trung tuyến $BH$ cũng là đường cao của nó, và $HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$.

$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2} BH \cdot AC = a^3$

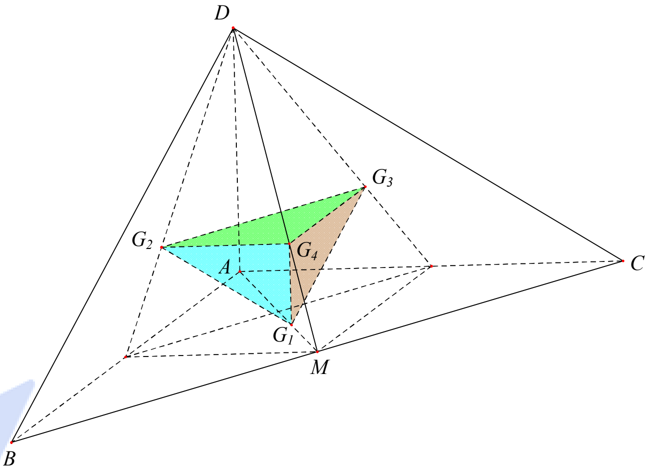



**Câu 48.** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB, AC$ và $AD$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi $G_1, G_2, G_3$ và $G_4$ lần lượt là trọng tâm các mặt $ABC, ABD, ACD$ và $BCD$. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

**A.** $4a^3$ **B.** $a^3$ **C.** $108a^3$ **D.** $36a^3$

## Hướng dẫn giải

Trong trường hợp tổng quát, ta chứng minh được $\boxed{V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD}}$.




Thật vậy, ta có $(G_2G_3G_4) \parallel (CBA)$ và $\Delta G_2G_3G_4 \backsim \Delta CBA$ (tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$). Từ đó:

$\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = k^2 = \frac{1}{9}$ và

$d(G_1,(G_2G_3G_4)) = d(G_4,(ABC))$

$= \frac{1}{3}d(D,(ABC))$ (do $G_4M = \frac{1}{3}DM$)

Suy ra $\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}} = \frac{d(G_1,(G_2G_3G_4))}{d(D,(ABC))} \cdot \frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

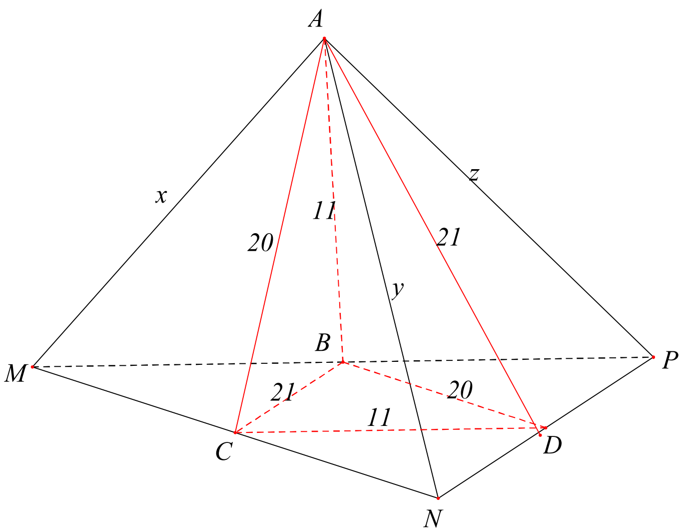
$\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{6}.AB.AC.AD = 4a^3$

**Câu 49.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 11m$, $BC = AD = 20m$, $BD = AC = 21m$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

**A.** $360m^3$ **B.** $720m^3$ **C.** $770m^3$ **D.** $340m^3$

## Hướng dẫn giải

Dựng tam giác *MNP* sao cho *C, B, D* lần lượt là trung điểm các cạnh *MN, MP, NP*. Do *BD* là đường trung bình tam giác *MNP* nên $BD = \frac{1}{2}MN$ hay $AC = \frac{1}{2}MN$.




Tam giác AMN vuông tại A (do có trung tuyến bằng một nửa cạnh tương ứng), hay $AM \perp AN$. Tương tự, $AP \perp AN$ và $AM \perp AP$.

Ta có $S_{MBC} = \frac{1}{4}S_{MNP}$, $S_{NCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$, $S_{BPD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$ .Suy ra $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$.



AMAX

Từ đó, $\boxed{V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{AMNP}}$. Đặt $x=\frac{AM}{m}, y=\frac{AN}{m}, z=\frac{AP}{m}$. Ta có $\begin{cases} x^2+y^2=4.20^2 \\ y^2+z^2=4.21^2 \\ x^2+z^2=4.11^2 \end{cases}$,

suy ra $\begin{cases} x^2=160 \\ y^2=1440 \\ z^2=324 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6}xyz=1440 \Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{AMNP}=360m^3$

*(AM, AN, AP* đôi một vuông góc nên $V_{AMNP}=\frac{1}{6}AM.AN.AP$)

$$\boxed{V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}}$$

**Câu 50.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là vuông; mặt bên $(SAB)$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SCD)$ bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABCD$.

**A.** $V=\frac{1}{3}a^3$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{2}{3}a^3$. **D.** $V=\frac{3a^3}{2}$.

**Hướng dẫn giải**

Gọi $H$ là trung điểm $AB$, suy ra $SH$ là chiều cao khối chóp đã cho.

Kí hiệu $x$ là độ dài cạnh đáy.

Ta có $SH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ và

$V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{6}x^3$.

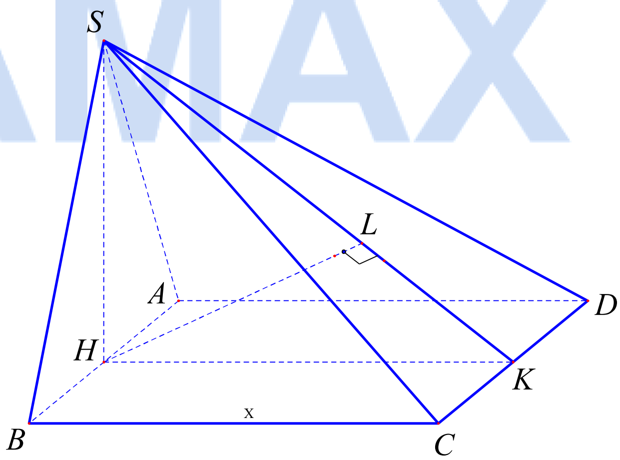
Kẻ $HK\perp CD\ (K\in CD)$;

Kẻ $HL\perp SK\ (L\in SK)$.

Suy ra $HL\perp(SCD)$ và

$d(A,(SCD))=d(H,(SCD))$

$=HL=\frac{HS\cdot HK}{\sqrt{HS^2+HK^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}x$




Theo gt, $\frac{\sqrt{21}}{7}x=\frac{3\sqrt{7}a}{7}\Rightarrow x=a\sqrt{3}$. Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{6}x^3=\frac{\sqrt{3}}{6}(a\sqrt{3})^3=\frac{3}{2}a^3$

**Câu 51.** Cho tứ diện $S.ABC$, $M$ và $N$ là các điểm thuộc các cạnh $SA$ và $SB$ sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, $(\alpha)$ là mặt phẳng qua $MN$ và song song với $SC$. Kí hiệu $(H_1)$ và $(H_2)$ là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng $(\alpha)$, trong đó, $(H_1)$ chứa điểm $S$, $(H_2)$ chứa điểm $A$; $V_1$ và $V_2$ lần lượt là thể tích của $(H_1)$ và $(H_2)$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

**A.** $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{4}{3}$

**Hướng dẫn giải**

Kí hiệu $V$ là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi $P$, $Q$ lần lượt là giao điểm của $(\alpha)$ với các đường thẳng $BC$, $AC$.

Ta có $NP//MQ//SC$. Khi chia khối $(H_1)$ bởi mặt phẳng $(QNC)$, ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có: $\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))} \cdot \frac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$;

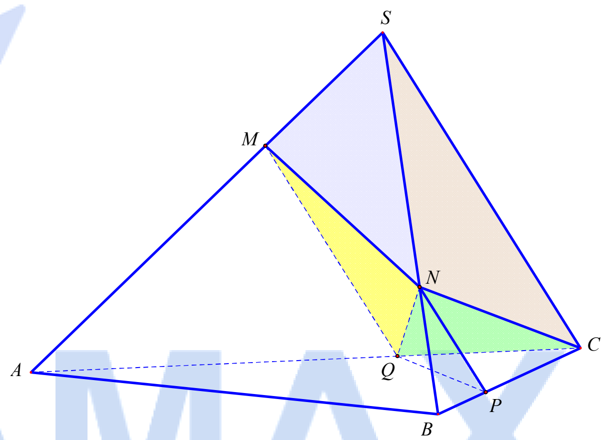
$\frac{d(N,(SAC))}{d(B,(SAC))} = \frac{NS}{BS} = \frac{2}{3}$;

$\frac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\frac{AM}{AS}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \frac{5}{9}$.

Suy ra $\frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}$

$\frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{d(N,(QPC))}{d(S,(ABC))} \cdot \frac{S_{QPC}}{S_{ABC}}$

$= \frac{NB}{SB} \cdot \frac{CQ}{CA} \cdot \frac{CP}{CB} == \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$



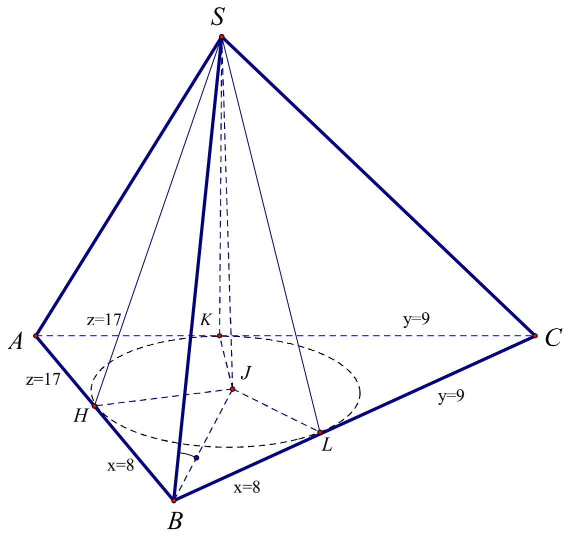

$\frac{V_1}{V} = \frac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \frac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \frac{10}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1+V_2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{5}$

**Câu 52.** Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác $ABC$; các mặt phẳng $(SAB)$, $(SAC)$ và $(SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng $(ABC)$ các góc bằng nhau. Biết $AB = 25$, $BC = 17$, $AC = 26$; đường thẳng $SB$ tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$.

**A.** $V = 408$. **B.** $V = 680$. **C.** $V = 578$. **D.** $V = 600$.

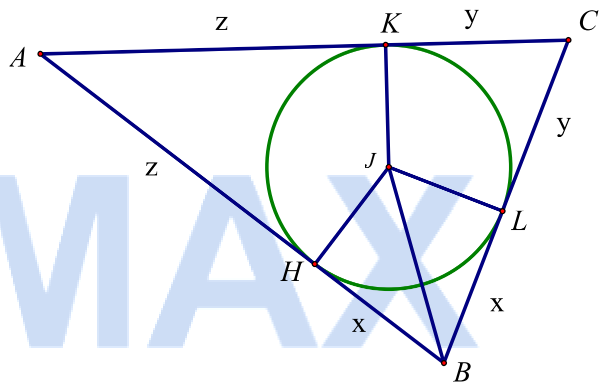
**Hướng dẫn giải**

Gọi $J$ là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; $H$, $K$ và $L$ lần lượt là hình chiếu của $J$ trên các cạnh $AB$, $BC$ và $CA$. Suy ra, $\widehat{SHJ}$, $\widehat{SLJ}$ và $\widehat{SKJ}$ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng $(ABC)$ với các mặt phẳng $(SAB)$, $(SBC)$ và $(SAC)$. Theo giả thiết, ta có $\widehat{SHJ} = \widehat{SLJ} = \widehat{SKJ}$, suy ra các tam giác vuông $SJH, SJL$ và $SJK$ bằng nhau. Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà $J$ nằm trong tam giác $ABC$ nên $J$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.




Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích $S$ của tam giác $ABC$ là $S = 204$.

Kí hiệu $p$ là nửa chu vi tam giác $ABC$, $r$ là bán kính đường tròn nội tiếp của $ABC$. Ta có $r = \frac{S}{p} = \frac{204}{34} = 6$.




Đặt $x = BH = BL$, $y = CL = CK$,

$z = AH = AK$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$.

Giải ra được $(x; y; z) = (8; 9; 17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ta có $\widehat{SBJ} = (\widehat{SB, (ABC)}) = 45^\circ$, suy ra $SJB$ là tam giác vuông cân tại $J$.

$SJ = JB = 10$.

Thể tích $V$ của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} SJ.S_{ABC} = 680$