Xét hàm số $f(x)=1+\frac{2014}{1+x}$ trên $[0;+\infty)$. Ta thấy $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0;+\infty)$ (Vì $f'(x)=\frac{-2014}{(1+x)^2}<0$). Do đó $1<f(x)\le 2015$.

Ta có $x_{n+1}=1+\frac{2014}{1+x_n}=f(x_n)$ với mọi n $\Rightarrow$ dãy (x_n) bị chặn.

Mặt khác, ta có $x_1<x_3\Rightarrow f(x_1)>f(x_3)\Rightarrow x_2>x_4\ \Rightarrow f(x_2)<f(x_4)\Rightarrow x_3<x_5\ \Rightarrow\ldots$.Suy ra dãy (x_{2n+1}) là dãy đơn điệu tăng và bị chặn, còn dãy (x_{2n}) là dãy đơn điệu giảm và bị chặn, nên các dãy (x_{2n+1}), (x_{2n}) có giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim x_{2n+1}=a$ và $\lim x_{2n}=b$, $(a,b\ge 1)$.

Từ $x_{2n+1}=f(x_{2n})\Rightarrow \lim x_{2n+1}=\lim f(x_{2n})\Leftrightarrow b=f(a)$.

$x_{2n+2}=f(x_{2n+1})\Rightarrow \lim x_{2n+2}=\lim f(x_{2n+1})\Leftrightarrow a=f(b)$.

Vậy ta có hệ $\begin{cases} b=1+\frac{2014}{1+a} \\ a=1+\frac{2014}{1+b}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2015}$.

Vậy $\lim x_n=\sqrt{2015}$.

Bài 28. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1=2,1 \\ x_{n+1}=\frac{x_n-2+\sqrt{x_n^2+8x_n-4}}{2}\end{cases}$ $(*), n=1,2,\ldots$ với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2-4}$. Tìm $\lim y_n$.

Hướng dẫn giải

Ta có kết quả sau: với số thực $a>2$ bất kì, ta có.

$$\frac{a-2+\sqrt{a^2+8a-4}}{2}>\frac{a-2+\sqrt{a^2+4a+4}}{2}=\frac{a-2+(a+2)}{2}=a.$$

Do đó $2,1<x_1<x_2<\ldots$ Suy ra dãy (x_n) là dãy tăng, giả sử bị chặn trên tức là có giới hạn $\lim x_n=L>2$.

Chuyển qua giới hạn điều kiện (*) ta có phương trình.

$$x=\frac{x-2+\sqrt{x^2+8x-4}}{2}\Leftrightarrow x^2-4=(x+3)(x-2).$$

phương trình này không có nghiệm hữu hạn lớn hơn 2.

Suy ra dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên nên $\lim x_n = +\infty$.

Ta có $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2} \Leftrightarrow 2x_{n+1} - x_n + 2 = \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}$.

$\Leftrightarrow (2x_{n+1} - x_n + 2)^2 = x_n^2 + 8x_n - 4 \Leftrightarrow x_{n+2}^2 - 4 = (x_n + 3)(x_n - 2)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n - 2} = \dfrac{x_n + 3}{x_{n+1}^2 - 4} = \dfrac{x_n + 2 + 1}{x_{n+1}^2 - 4} = \dfrac{1}{x_{n+1} - 2} + \dfrac{1}{x_{n+1}^2 - 4}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}^2 - 4} = \dfrac{1}{x_n - 2} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}$.

Suy ra $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2 - 4} = \dfrac{1}{x_1 - 2} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2} = 10 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 2}$.

Vậy $\lim y_n = 10$.

Bài 29. Dãy số thực $(x_n)(n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N})$. Tìm tất cả các giá trị của a để $x_n < 0$ với mọi số tự nhiên n.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x_n < 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ $x_{n+2} = 2x_{n+1}^2 - 1 < 0$ có $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x_{n+1} < 0$.

Lại từ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 2x_n^2 - 1 < 0$ có $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x_n < \dfrac{-\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow -1 < x_n < -\dfrac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra $\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{3}{4}$ và $\left|x_n + \dfrac{1}{2}\right| < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ đó $\left|x_{n+1} + \dfrac{1}{2}\right| = \left|2x_n^2 - 1 + \dfrac{1}{2}\right| = 2\left|x_n^2 - \dfrac{1}{4}\right| = 2\left|x_n - \dfrac{1}{2}\right| . \left|x_n + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{3}{2}\left|x_n + \dfrac{1}{2}\right|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức này, ta có:.

$$\left|a + \frac{1}{2}\right| = \left|x_0 + \frac{1}{2}\right| < \frac{2}{3}\left|x_1 + \frac{1}{2}\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left|x_2 + \frac{1}{2}\right| < \ldots < \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|x_n + \frac{1}{2}\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ nên phải có $\left|a + \dfrac{1}{2}\right| = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.

Thử lại với $a=-\frac{1}{2}$ thì $x_n=-\frac{1}{2}<0,\forall n$.

Vậy $a=-\frac{1}{2}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài 30. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1=2014 \\ x_{n+1}=\sqrt[3]{6x_n-6\sin x_n}, n\in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x,\forall x\ge 0$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{6x-6\sin x},x>0$.

Ta có: $f'(x)=\frac{6(1-\cos x)}{3\sqrt[3]{(6x-6\sin x)^2}}>0,\forall x>0\Rightarrow$ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: $f(x)>f(0)=0x>0$. mà $x_2=f(x_1)>0$ vì $x_1=2014>0$..

Vậy ta có $x_{n+1}=f(x_n)>0,\forall n\in N^*$.

Mặt khác: $x_{n+1}-x_n=\sqrt[3]{6x_n-6\sin x_n}-x_n=\frac{6x_n-6\sin x_n-x_n^3}{\sqrt[3]{(6x_n-6\sin x_n)^2}+x_n\sqrt[3]{6x_n-6\sin x_n}+x_n^2}$.

Vì $x-\frac{x^3}{6}\le \sin x\le x,\forall x\ge 0 \Leftrightarrow 6x-x^3-6\sin x<0,\forall x>0$.

$\Rightarrow 6x_n-6sinx_n-x_n^3<0$ do $x_n>0\Rightarrow x_{n+1}-x_n<0$.

$\Rightarrow (x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim x_n=x(x\ge 0)$, ta có phương trình:.

$x=\sqrt[3]{6x-6\sin x}\Leftrightarrow x^3-6x+6\sin x=0$.

Xét hàm số $g(x)=x^3-6x+6\sin x$.

$g'(x)=3x^2-6+6\cos x$.

$g''(x)=6x-6sinx\ge 0\forall x\ge 0$.

$\Rightarrow g'(x)\ge g'(0)=0$. Do đó $g(x)$ luôn đồng biến và liên tục với mọi $x\ge 0$.

$\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy $\lim x_n = 0$.

Bài 31. Cho hai dãy số dương $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ xác định bởi: $a_0 = \sqrt{3}, b_0 = 2$ và $\begin{cases} a_n + b_n = \dfrac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 \end{cases}$.

Với mọi $n = 0,1,2,...$. Chứng minh rằng hai dãy trên hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng quy nạp $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3.2^n}, b_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}}, n = 0,1,2,...$ $(*)$. Thật vậy.

Với $n = 0$, ta có $a_0 = \sqrt{3} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \tan\dfrac{\pi}{3.2^0}, b_0 = 2 = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^0}}$, vậy $(*)$ đúng.

Với $n = 1$, ta có $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6} = \tan\dfrac{\pi}{3.2^1}, b_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^1}}$, vậy $(*)$ đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến $n = k, k \geq 1$, tức là $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3.2^n}, b_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}}$.

Ta chứng minh $a_{n+1} = \tan\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}, b_{n+1} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}}$. Thật vậy. Từ (1) ta có.

$$\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}+1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}} = \frac{2\sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + \sin^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + \cos^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}}{\cos^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} - \sin^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}} =$$

$$= \frac{\left(\sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + \cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} - \sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + \sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}\right)} \frac{\sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + \cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} - \sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}} = \frac{\tan\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}+1}{1-\tan\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}}$$ Khi đó từ (2)

$\Rightarrow a_{n+1} = \tan\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}$

, suy ra $b_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 + 1 = \tan^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}} \Rightarrow b_{n+1} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}}$.

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì $a_n = \tan\dfrac{\pi}{3.2^n}, b_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}}, n = 0,1,2,...$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \tan\dfrac{\pi}{3.2^n} = \tan 0 = 0; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}} = \dfrac{1}{\cos 0} = 1$.

Kết luận: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0; \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.■.

Bài 32. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:. $\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 ; \forall n = 1,2,... \end{cases}$. Tìm điều kiện của a để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Ta có: $u_{n+1} - u_n = (u_n - a)^2 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n; \ \forall n = 1,2,3,...$.

* Suy ra dãy số (u_n) tăng knn; từ đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \ (L \in \mathbb{R})$, thì chuyển qua giới hạn hệ thức $u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2$ ta có: $L = L^2 + (1-2a)L + a^2 \Leftrightarrow L = a$.

- Nếu có chỉ số $k \in \mathbb{N}^*$ mà $u_k > a$ thì $u_n > a; \forall n \geq k$ trái với kết quả $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L = a$.

Do đó: $u_k \leq a$ với mọi $k = 1,2,...$ hay $u_n^2 - (1-2a)u_n + a^2 \leq a, \ \forall n = 1,2,3,...$.

$\Leftrightarrow a - 1 \leq u_1 \leq a \Leftrightarrow a - 1 \leq 2014 \leq a$.

* Đảo lại: Nếu $a - 1 \leq 2014 \leq a \Rightarrow a - 1 \leq u_1 \leq a$.

$\Rightarrow (u_1 - a + 1)(u_1 - a) \leq 0 \Rightarrow u_1^2 + (1-2a)u_1 + a^2 - a \leq 0 \Rightarrow u_2 \leq a$.

và $u_1 \leq u_2 \Rightarrow a - 1 \leq u_2 \leq a$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $a - 1 \leq u_n \leq a, \ \forall n = 1,2,3,...$.

Như vậy dãy (u_n) tăng knn, bị chặn trên bới a, do đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Kết luận: Với điều kiện $a - 1 \leq 2014 \leq a$ thì dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Bài 33. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=x+\frac{1}{x}-\sqrt{2};g(x)=f(f(x))-x=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}-2\sqrt{2}$. Khi đó.

$$g'(x)=\frac{-2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x^2+1\right)}{x^4\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)^2}\le 0\Rightarrow g(x)<g(\frac{1}{\sqrt{2}})=0\Rightarrow f(f(x))<x,\forall x\in(\frac{1}{\sqrt{2}};1)\ (*)..$$

Mặt khác $f'(x)<0,\forall x\in(\frac{1}{\sqrt{2}};1)$ nên.

$$f(x)<f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow f(f(x))>f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}},\forall x\in(\frac{1}{\sqrt{2}};1)\ (**)..$$

Từ (*) và (**) suy ra: $\frac{1}{\sqrt{2}}<f(f(x))<x,\forall x\in(\frac{1}{\sqrt{2}};1)..$

Vậy: $1=u_1>u_3>\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 1=u_1>u_3>u_5>\frac{1}{\sqrt{2}},...$ Do đó (u_{2n-1}) là đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}..$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};1\right]$ nên $u_{2n}=f(u_{2n-1})\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}..$

Vậy dãy (u_n) được phân tích thành hai dãy con hội tụ tới cùng một giới hạn. Do đó dãy (u_n) có giới hạn bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}..$

Bài 34. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2014}\left(u_n^2-u_n\right),\forall n\ge 1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{u_{k+1}-1}$.

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có: $u_{n+1}=\frac{u_n\left(u_n-1\right)}{2014}+u_n$ mà $u_1=2$ suy ra.

$2=u_1<u_2<u_3<.......$ do đó dãy (u_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=L$ với $(L>2)$ khi đó.

$$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=\lim\frac{u_n^2+2013u_n}{2014}\Leftrightarrow L=\frac{L^2+2012L}{2014}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}L=0\\ L=1\end{array}\right..$$

Vô lý do $L>2$. Suy ra dãy (u_n) không bị chặn trên do đó.

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n} = 0$.

Ta có.

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} \Leftrightarrow u_n\left(u_n - 1\right) = 2014\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}-1} = 2014\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2014\left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} S_n = 2014.$$

Bài 35. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2014 \\ x_{n+1} = \sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim x_n$?.

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x, \forall x \ge 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{6x - 6\sin x}, x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{6(1-\cos x)}{3\sqrt[3]{(6x - 6\sin x)^2}} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ f(x) luôn đồng biến với mọi x > 0.

Do đó: $f(x) > f(0) = 0 \forall x > 0$. mà $x_2 = f(x_1) > 0$ vì $x_1 = 2014 > 0$..

Vậy ta có $x_{n+1} = f(x_n) > 0, \forall n \in N^*$.

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n} - x_n = \frac{6x_n - 6\sin x_n - x_n^3}{\sqrt[3]{(6x_n - 6\sin x_n)^2} + x_n\sqrt[3]{6x_n - 6\sin x_n} + x_n^2}$.

Vì $x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x, \forall x \ge 0 \Leftrightarrow 6x - x^3 - 6\sin x < 0$. $\forall x > 0$.

$\Rightarrow 6x_n - 6\sin x_n - x_n^3 < 0$ do $x_n > 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0$.

$\Rightarrow (x_n)$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim x_n = x (x \ge 0)$, ta có phương trình:.

$x = \sqrt[3]{6x - 6\sin x} \Leftrightarrow x^3 - 6x + 6\sin x = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 6x + 6\sin x$.

$g'(x)=3x^2-6+6cosx$.

$g''(x)=6x-6\sin x\ge 0,"x\ge 0$.

$\Rightarrow$ $g'(x)\ge g'(0)=0$. Do đó $g(x)$ luôn đồng biến và liên tục với mọi $x\ge 0$ $\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy $\lim x_n=0$.