Lại có $2^{2i} \equiv 4^i \equiv (-1)^i \pmod 5$ nên từ (3) ta có:

$$f(p) \vdots 5 \Leftrightarrow \left\{ \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \right\} \vdots 5 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p = 4k+1.$$

Vậy $f(p)$ chia hết cho 5 khi và chỉ khi số nguyên tố p có dạng $p = 4k+1$.

Câu 34. Cho a, m, n là các số nguyên dương sao cho $a > 1, m \neq n$. Chứng minh rằng nếu $a^m - 1$ và $a^n - 1$ có các ước nguyên tố giống nhau, thì $a+1$ là một lũy thừa của 2.

Hướng dẫn giải

Giả sử $m > n$ và $d = (m,n)$. Vì

$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1 = a^d - 1$

nên $a^d - 1$ và $a^m - 1$ có các ước nguyên tố giống nhau. Đặt

$m = d.k \quad (k > 1), b = a^d$,

thì $b - 1$ và $b^k - 1$ có các ước nguyên tố giống nhau.

Ta sẽ chứng minh k là một lũy thừa của 2. Thật vậy, nếu k không phải là lũy thừa của 2, thì k có ước nguyên tố lẻ là p. Do $b^p - 1 \mid b^k - 1$ và $b - 1 \mid b^p - 1$ nên $b^p - 1$ và $b - 1$ có các ước nguyên tố giống nhau. Gọi q là một ước nguyên tố của $b^{p-1} + \ldots + b + 1$, thì do $b \equiv 1 \pmod q$ nên

$b^{p-1} + \ldots + b + 1 \equiv p \pmod q \Rightarrow q = p.$

Do đó, $b^{p-1} + \ldots + b + 1$ chỉ có ước nguyên tố là p, suy ra

$b^{p-1} + \ldots + b + 1 = p^t.$

Vì $b^{p-1} + \ldots + b + 1 > b - 1$ nên $t > 1$. Từ $b \equiv 1 \pmod p$ suy ra $b = p.h + 1$. Khi ấy

$$b^{p-1} + \ldots + b + 1 = p + \frac{p^2(p-1)}{2}.u + A.p^2 \equiv p \pmod{p^2}.$$

Điều mâu thuẫn này chứng tỏ k là một lũy thừa của 2.

Bây giờ nếu p là một ước nguyên tố bất kì của $b+1$, thì p cũng là ước của $b-1$. Do đó, $p = 2$. Thành thử, $b+1$ là một lũy thừa của 2 hay $a^d + 1$ cũng vậy. Do $m = d.k$ là số chẵn nên $a+1 \mid a^m - 1$, suy ra các ước nguyên tố của $a+1$ cũng là các ước nguyên tố của $a^d - 1$. Nếu $a+1$ có ước nguyên tố lẻ là p, thì do $a \equiv -1 \pmod p$ nên $a^d \equiv (-1)^d = 1 \pmod p$, suy ra d là số chẵn. Nhưng là số lẻ a nên $a^d + 1 \equiv 2 \pmod 8$, suy ra $a^d + 1 = 2$. Vô lí vì $a > 1$. Vậy $a+1$ phải là lũy thừa của 2.

Câu 35. Cho số nguyên $n \geq 1$. Tìm số lớn nhất các cặp gồm 2 phần tử phân biệt của tập $\{1; 2; \ldots; n\}$ sao cho tổng của các cặp khác nhau là các số nguyên khác nhau và không vượt quá n.

Hướng dẫn giải

Giả sử có k cặp thỏa mãn đề bài. Gọi S là tổng của k cặp đó, thì

$S \geq 1 + 2 + \ldots + 2k = k(2k+1)$

Dễ thấy $S \leq n + (n-1) + \ldots + (n-k+1) = nk - \dfrac{k(k-1)}{2}$. Do đó,

$$k(2k+1) \leq nk - \frac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow k \leq \left[\frac{2n-1}{5}\right]$$

Bây giờ ta xây dựng $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]$ cặp thỏa mãn đề bài như sau

Trường hợp 1: Số n có dạng $5k+1$ hoặc $5k+2$. Khi ấy, $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]=2k$. Ta xét các cặp sau

$(4k+1;k), (4k;k-1), \ldots (3k+2;1), (3k;2k), (3k-1;2k-1), \ldots (2k+1;k+1)$

Rõ ràng dãy trên có $2k$ cặp thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: Số n có dạng $5k+3$ hoặc $5k+4$ hoặc $5k+5$. Khi ấy, $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]=2k+1$. Ta xét các cặp sau

$(4k+2;k+1), (4k+1;k), \ldots, (3k+2;1), (3k+1;2k+1), (3k;2k), \ldots, (2k+1;k+1)$

Dãy trên có $2k+1$ thỏa mãn đề bài

Vậy số lớn nhất các cặp thỏa mãn đề bài là $\left[\dfrac{2n-1}{5}\right]$

Câu 36. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên và là ước của 2415.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Cho số nguyên tố $p=4q+3$ $(q\in\mathbb{N})$. Nếu x, y là các số nguyên sao cho x^2+y^2 chia hết cho p thì x và y chia hết cho p.

Thật vậy: Nếu x chia hết cho p thì cũng có y chia hết cho p. Giả sử x không chia hết cho p khi đó y không chia hết cho p. Theo định lý Fermat ta có: $x^{p-1}\equiv 1\pmod p$, suy ra $x^{4p+2}\equiv 1\pmod p$, tương tự cũng có $y^{4p+2}\equiv 1\pmod p$.

Từ giả thiết: $x^2+y^2\equiv 0\pmod p \Rightarrow x^2\equiv -y^2\pmod p$

$\Rightarrow \left(x^2\right)^{2p+1}\equiv\left(-y^2\right)^{2p+1}\pmod p \Rightarrow x^{4p+2}\equiv -y^{4p+2}\pmod p$

$\Rightarrow x^{4p+2}+y^{4p+2}\equiv 0\pmod p \Rightarrow 2\equiv 0\pmod p \Rightarrow p=2$ (mâu thuẫn giả thiết). (Bổ đề đã được chứng minh).

Áp dụng bổ đề vào bài toán, giả sử tồn tại số các số nguyên dương x, y sao cho $x>y$, $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên và là ước của 2415. Đặt $k=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ thì $x^2+y^2=k(x-y)$ với k là ước của $2415=3.5.7.23$.

i) Nếu $k\vdots 3$ thì $k=3k_1$, ($k_1\in\mathbb{N}$, k_1 không chia hết cho 3). Suy ra $x^2+y^2\vdots 3\Rightarrow x\vdots 3$ và $y\vdots 3$ $\Rightarrow x=3x_1, y=3y_1; \left(x_1,y_1\in\mathbb{N}^*, x_1>y_1\right)$. Ta lại được $x_1^2+y_1^2=k_1\left(x_1-y_1\right)$, nhưng không có các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^2+y^2=x-y$ vì $x^2+y^2\ge x+y>x-y$.

ii) Tương tự như trên khi xét trường hợp k chia hết cho 7 và trường hợp k chia hết cho 23.

iii) Nếu $k\vdots 5$, ta thấy: $x^2+y^2=5(x-y)\Leftrightarrow(2x-5)^2+(2y+5)^2=50$, tìm được $(x;y)=(3;1)$ hoặc $(x;y)=(2;1)$.

Vậy tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ cần tìm có dạng

$(3a;a)$, $(2a;a)$, $(a;3a)$, $(a;2a)$ trong đó $a\in\{1;\ 3;\ 7;\ 23;\ 21;\ 69;\ 161;\ 483\}$

Câu 37. Cho $a_i, b_i, c_i, 1 \le i \le N$ là các số nguyên. Giả sử rằng với mỗi i trong ba số a_i, b_i, c_i có ít nhất một số lẻ. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên r, s, t sao cho $ra_i + sb_i + tc_i$ là lẻ với ít nhất $\frac{4N}{7}$ giá trị của $i, 1 \le i \le N$.

Hướng dẫn giải

Ta xét các số trên theo $\mod 2$. Ta thấy có 7 cách chọn bộ (r,s,t) với r,s,t không đồng thời bằng 0 ((r,s,t) đồng dư với $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ theo $\mod 2$).

Với mỗi bộ a_i, b_i, c_i thỏa mãn đề bài có đúng 4 trong 7 bộ sao cho $ra_i + sb_i + tc_i \equiv 1 \pmod 2$

Suy ra với mỗi bộ (a_i, b_i, c_i) đã cho nếu ta chọn ngẫu nhiên $(r,s,t) \ne (0,0,0)$ thì giá trị kì vọng của các biểu thức lẻ là $\frac{4N}{7}$.

Nhưng đây là giá trị trung bình nên phải tồn tại bộ (r,s,t) với ít nhất $\frac{4N}{7}$ giá trị của i sao cho tổng $ra_i + sb_i + tc_i$ là số lẻ.

Câu 38. Giả sử phương trình $x^{2017} + ax^2 + bx + c = 0$ (với a,b,c là các số nguyên) có 3 nghiệm nguyên x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng $(a+b+c+1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ chia hết cho 2017.

Hướng dẫn giải

Phương trình đã cho tương đương $\left(x^{2017} - x\right) + \left[ax^2 + (b+1)x + c\right] = 0 \quad (1)$

Đặt $f(x) = ax^2 + (b+1)x + c.$

Từ giả thiết x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên của PT(1), áp dụng định lí Fecma ta có

$x_i^{2017} \equiv x_i \pmod{2017}$ hay $x_i^{2017} - x_i \vdots 2017$

Từ $(1) \Rightarrow ax_i^2 + (b+1)x_i + c = -\left(x_i^{2017} - x_i\right) \vdots 2017$ hay $f(x_i) \vdots 2017$ $(i = 1,2,3)$ $\quad (2)$

Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$ thì ta có ngay đpcm.

Giả sử trái lại, trong các hiệu $x_1 - x_2$; $x_2 - x_3$; $x_3 - x_1$ không có hiệu nào chia hết cho 2017.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b + 1\right] \vdots 2017$ (do (2))

$\Rightarrow a(x_1 + x_2) + b + 1 \vdots 2017$ (3)

Tương tự, ta có $a(x_2 + x_3) + b + 1 \vdots 2017$ (4)

Từ (3) và (4), ta có $a(x_3 - x_1) \vdots 2017 \Rightarrow a \vdots 2017$. Khi đó từ (4) ta có $b + 1 \vdots 2017$

Vì $a \vdots 2017$ và $b + 1 \vdots 2017$ nên suy ra $c \vdots 2017$. Do đó $a + b + c + 1 \vdots 2017$ và ta có đpcm.

Câu 39. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất để $\left[\left(3 + \sqrt{p}\right)^{2n}\right] + 1$ chia hết cho 2^{n+1} với $\forall n \in \mathbb{N}$ ($[a]$ là phần nguyên của số a).

Hướng dẫn giải

Với $\begin{cases} p = 2 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\left(3 + \sqrt{2}\right)^4\right] + 1 = 378$ không chi hết cho 2^3.

Với $\begin{cases} p = 3 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\left(3 + \sqrt{3}\right)^2\right] + 1 = 23$ không chi hết cho 2^2.

Như vậy, số nguyên tố nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đầu bài chỉ có thể là 5.

Với $p=5$. Xét $x_1=\left(3+\sqrt{5}\right)^2=14+6\sqrt{5}, x_2=\left(3-\sqrt{5}\right)^2=14-6\sqrt{5}$

Do đó $\begin{cases} x_1+x_2=28 \\ x_1x_2=16 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2-28x+16=0$.

Đặt $S_n=x_1^n+x_2^n$, ta có:

$S_{n+2}=x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=\left(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}\right)\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2\left(x_1^n+x_2^n\right)=28S_{n+1}-16S_n$.

Do đó S_n là nghiệm của phương trình sai phân cấp hai: $S_{n+2}-28S_{n+1}+16S_n=0$.

Vì $0<x_2<1 \Rightarrow 0<x_2^n<1 \Rightarrow S_n>x_1^n=S_n-x_2^n>S_n-1 \Rightarrow \left[x_1^n\right]+1=S_n$.

Ta có $S_1=28$ chia hết cho 2^2. Giả sử S_n chia hết cho 2^{n+1} và S_{n+1} chia hết cho 2^{n+2}. Khi đó $\left[x_1^{n+2}\right]+1=S_{n+2}=28S_{n+1}+16S_n=2^{n+3}\left(7q_1+2q_2\right) \vdots 2^{n+3}$ hay $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^{2n}\right]+1=\left[x_1^n\right]+1$ chia hết cho $2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 40. Cho số nguyên dương $n>1$ thỏa mãn 3^n-1 chia hết cho n. Chứng minh rằng n là số chẵn.

Hướng dẫn giải

Gọi p là ước nguyên tố bé nhất của n. Ta có $p \neq 3$ (vì nếu $p=3$ thì $1 \vdots p$ vô lí). Do $3^n-1 \vdots n$ nên $3^n-1 \vdots p$ hay $3^n \equiv 1 \left(\bmod p\right)$.

Gọi d là số nguyên dương bé nhất sao cho $3^d \equiv 1 \left(\bmod p\right)$. Xét khai triển sau: $n=kd+r$ với $0 \leq r \leq d-1$. Ta có $3^n \equiv 3^r \left(\bmod p\right) \Rightarrow 3^r \equiv 1 \left(\bmod p\right)$. Suy ra $r=0$. Do đó $n \vdots d$.

Do p là số nguyên tố, nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có $3^{p-1} \equiv 1 \left(\bmod p\right)$. Lập luận tương tự như trên suy ra $p-1 \vdots d$.

Có hai khả năng xảy ra:

a) $d>1$: Gọi q là ước nguyên tố của d. Vì $n \vdots d$ nên $n \vdots q \Rightarrow p-1 \geq d \Rightarrow p>d \Rightarrow p>q$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn p là ước số nguyên tố bé nhất của n. Do vậy khả năng này không xảy ra.

b) $d=1$: Từ $3^d \equiv 1 \left(\bmod p\right) \Rightarrow 3 \equiv 1 \left(\bmod p\right) \Rightarrow p=2$. Do $p=2$ là ước nguyên tố của n, suy ra n chẵn (đpcm).