$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) = 0....$

* $y + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

b) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = y$, ta có:

$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 1) = 1680 \Leftrightarrow y^2 = 1681 \Leftrightarrow y = \pm 41$

$y = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0\ (x^2 - x) + (12x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 12) = 0.....$

* $y = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x.\frac{11}{2} + \frac{121}{4}) + \frac{159}{4} = 0$

c) $(x^2 - 6x + 9)^2 - 15(x^2 - 6x + 10) = 1\ (3)$

Đặt $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = y \geq 0$, ta có

$(3) \Leftrightarrow y^2 - 15(y + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 15y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 15) = 0$

Với $y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ (loại)

Với $y - 15 = 0 \Leftrightarrow y = 15 \Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4$

+ $x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = 7$

+ $x - 3 = -4 \Leftrightarrow x = -1$

d) $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0\ (4)$

Đặt $x^2 + 1 = y$ thì

$(4) \Leftrightarrow y^2 + 3xy + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 + xy) + (2xy + 2x^2) = 0 \Leftrightarrow (y + x)(y + 2x) = 0$

+) $x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$: Vô nghiệm

+) $y + 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 3:

a) $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18 \Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 72.\ (1)$

Đặt $2x + 2 = y$, ta có

$(1) \Leftrightarrow (y - 1)y^2(y + 1) = 72 \Leftrightarrow y^2(y^2 - 1) = 72$

$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0$ Thì $y^4 - y^2 - 72 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z - 72 = 0 \Leftrightarrow (z + 8)(z - 9) = 0$

* $z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = -8$ (loại)

* $z - 9 = 0 \Leftrightarrow z = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = ...$

b) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$ (2)

Đặt $y = x - 1 \Rightarrow x + 1 = y + 2$; $x - 3 = y - 2$, ta có

(2) $\Leftrightarrow (y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 82$

$\Leftrightarrow y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16 + y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = 82$

$\Leftrightarrow 2y^4 + 48y^2 + 32 - 82 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 24z - 25 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 25) = 0$

+) $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 0; x = 2$

+) $z + 25 = 0 \Leftrightarrow z = -25$ (loại)

Chú ý: Khi giải Pt bậc 4 dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ ta thường đặt ẩn phụ $y = x + \frac{a+b}{2}$

c) $(4 - x)^5 + (x - 2)^5 = 32 \Leftrightarrow (x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32$

Đặt $y = x - 3 \Rightarrow x - 2 = y + 1$; $x - 4 = y - 1$; ta có:

$(x - 2)^5 - (x - 4)^5 = 32 \Leftrightarrow (y + 1)^5 - (y - 1)^5 = 32$

$\Leftrightarrow y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 - (y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y - 1) - 32 = 0$

$\Leftrightarrow 10y^4 + 20y^2 - 30 = 0 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0$

Đặt $y^2 = z \geq 0 \Rightarrow y^4 + 2y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 3) = 0$ ....

d) $(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$

Đặt $x - 7 = a$; $x - 8 = b$; $15 - 2x = c$ thì $-c = 2x - 15 \Rightarrow a + b = -c$, Nên

$(x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = c^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a + b)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 4ab(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow 4ab\left[\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2\right] = 0 \Leftrightarrow 4ab = 0$

(Vì $\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0$ nhưng không xẩy ra dấu bằng) $\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow x = 7; x = 8$

e) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$

(Vì $x = 0$ không là nghiệm). Đặt $x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$, thì

$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\frac{1}{x}\right)-36=0 \Leftrightarrow 6(y^2+2)+7y-36=0 \Leftrightarrow 6y^2+7y-24=0$

$\Leftrightarrow (6y^2-9y)+(16y-24)=0 \Leftrightarrow (3y+8)(2y-3)=0$

+) $3y+8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x+3)(3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 3x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

+) $2y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (2x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Bài 4: Chứng minh rằng: các Pt sau vô nghiệm

a) $x^4-3x^2+6x+13=0 \Leftrightarrow (x^4-4x^2+4)+(x^2+6x+9)=0 \Leftrightarrow (x^2-2)^2+(x+3)^2=0$

Vế trái $(x^2-2)^2+(x+3)^2 \geq 0$ nhưng không đồng thời xảy ra $x^2=2$ và $x=-3$

b) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$\Leftrightarrow x^7-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x=1$ không là nghiệm của Pt $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

Bài tập về nhà:

Bài 1: Giải các Pt

a) $(x^2+1)^2=4(2x-1)$

HD: Chuyển vế, triển khai $(x^2+1)^2$, phân tích thành nhân tử: $(x-1)^2(x^2+2x+5)=0$

b) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ (Nhân 2 nhân tử với nhau, áp dụng PP đặt ẩn phụ)

c) $(12x+7)^2(3x+2)(2x+1)=3$ (Nhân 2 vế với 24, đặt $12x+7=y$)

d) $(x^2-9)^2=12x+1$ (Thêm, bớt $36x^2$)

e) $(x-1)^4+(x-2)^4=1$ (Đặt $y=x-1{,}5$; Đs: $x=1$; $x=2$)

f) $(x-1)^5+(x+3)^5=242(x+1)$ (Đặt $x+1=y$; Đs:0; -1; -2)

g) $(x+1)^3+(x-2)^3=(2x-1)^3$

Đặt $x+1=a$; $x-2=b$; $1-2x=c$ thì $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

h) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ (Chia 2 vế cho x^2; Đặt $y=x+\frac{1}{x}$)

i) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ (Vế trái là đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ...)

Bài 2: Chứng minh các pt sau vô nghiệm

a) $2x^4 - 10x^2 + 17 = 0$

(Phân tích vế trái thành tổng của hai bình phương)

b) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$

(Phân tích vế trái thành tích của 2 đa thức có giá trị không âm....)

CHUYÊN ĐỀ 1 5 – SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

Ngày soạn:23 – 3 - 2010

A. Một số kiến thức:

1. Công thức tính diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}$ a.h (a – độ dài một cạnh, h – độ dài đường cao tương ứng)

2. Một số tính chất:

Hai tam giác có chung một cạnh, có cùng độ dài đường cao thì có cùng diện tích

Hai tam giác bằng nhau thì có cùng diện tích

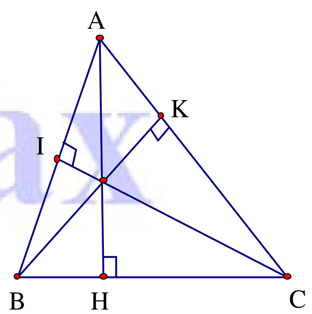
B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Cho $\triangle ABC$ có AC = 6cm; AB = 4 cm; các đường cao AH; BK; CI. Biết $AH = \frac{CI + BK}{2}$

Tính BC

Giải



Ta có: $BK = \frac{2S_{ABC}}{AC}$; $CI = \frac{2S_{ABC}}{AB}$

$\Rightarrow BK + CI = 2.\ S_{ABC}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$

$\Leftrightarrow 2AH = 2.\frac{1}{2}.\ BC.\ AH.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) \Leftrightarrow BC.\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 2$

$\Rightarrow BC = 2 : \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 2 : \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 4{,}8$ cm

Bài 2:

Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c; độ dài các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c. Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ là tam giác đều

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$

Ta xét a + h_a = b + h_b $\Rightarrow$ a – b = h_a – h_b = $\frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S.\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S.\ \frac{a - b}{ab}$

$\Rightarrow$ a – b = $2S.\ \frac{a - b}{ab}$ $\Rightarrow$ (a – b) $\left(1 - \frac{2S}{ab}\right)$ = 0 $\Rightarrow$ ΔABC cân ở C hoặc vuông ở C (1)

Tương tự ta có: ΔABC cân ở A hoặc vuông ở A (2); ΔABC cân ở B hoặc vuông ở B (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra ΔABC cân hoặc vuông ở ba đỉnh (Không xẩy ra vuông tại ba đỉnh) $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều

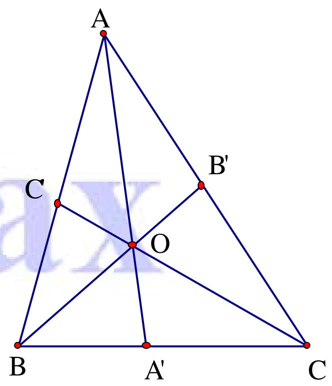
Bài 3:

Cho điểm O nằm trong tam giác ABC, các tia AO, BO, Co cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$ b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = 6$. Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất

d) $N = \frac{OA}{OA'}.\frac{OB}{OB'}.\frac{OC}{OC'} = 8$. Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất



Giải

Gọi S_{ABC} = S, S_1 = S_{BOC}, S_2 = S_{COA}, S_3 = S_{AOB}. Ta có:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$

Tương tự ta có $\frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$; $\frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$; $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$

b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

c) $M = \dfrac{OA}{OA'}+\dfrac{OB}{OB'}+\dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{S_2+S_3}{S_1}+\dfrac{S_1+S_3}{S_2}+\dfrac{S_1+S_2}{S_3} = \left(\dfrac{S_1}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_1}\right)+\left(\dfrac{S_3}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_3}\right)+\left(\dfrac{S_1}{S_3}+\dfrac{S_3}{S_1}\right)$

Aùp dụng Bđt Cô si ta có $\left(\dfrac{S_1}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_1}\right)+\left(\dfrac{S_3}{S_2}+\dfrac{S_2}{S_3}\right)+\left(\dfrac{S_1}{S_3}+\dfrac{S_3}{S_1}\right) \ge 2+2+2=6$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC

d) $N = \dfrac{S_2+S_3}{S_1}.\dfrac{S_1+S_3}{S_2}.\dfrac{S_1+S_2}{S_3} = \dfrac{(S_2+S_3)(S_1+S_3)(S_1+S_2)}{S_1.S_2.S_3}$

$\Rightarrow N^2 = \dfrac{(S_2+S_3)^2(S_1+S_3)^2(S_1+S_2)^2}{(S_1.S_2.S_3)^2} \ge \dfrac{4S_1S_2.4S_2S_3.4S_1S_3}{(S_1.S_2.S_3)^2} \ge 64 \Rightarrow N \ge 8$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 4:

Cho tam giác đều ABC, các đường caoAD, BE, CF; gọi A', B', C' là hình chiếu của M (nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng: Khi M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

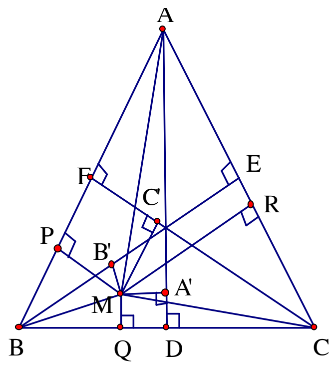
a) A'D + B'E + C'F không đổi

b) AA' + BB' + CC' không đổi

Giải

Gọi h = AH là chiều cao của tam giác ABC thì h không đổi

Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh AB; BC; CA là MP; MQ; MR thì A'D + B'E + C'F = MQ + MR + MP



Vì M nằm trong tam giác ABC nên

$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow$ BC.(MQ + MR + MP) = BC . AH

$\Rightarrow$ MQ + MR + MP = AH $\Rightarrow$ A'D + B'E + C'F = AH = h

Vậy: A'D + B'E + C'F = AH = h không đổi

b) AA' + BB' + CC' = (AH – A'D)+(BE – B'E) (CF – C'F)

= (AH + BE + CF) – (A'D + B'E + C'F) = 3h – h = 2h không đổi

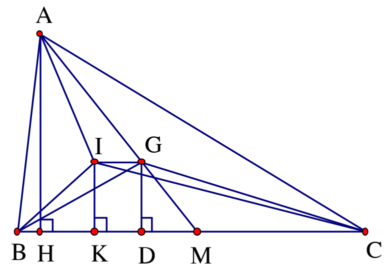
Bài 5:

Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: IG // BC

Giải

Gọi khoảng cách từ a, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD

Vì I là giap điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK



Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow BC.AH = IK(AB+BC+CA)$ (1)

Mà $BC = \dfrac{AB + CA}{2} \Rightarrow AB + CA = 2\,BC$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: BC. AH = IK. 3BC $\Rightarrow IK = \dfrac{1}{3}AH$ (a)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$S_{BGC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \Leftrightarrow BC\,.\,GD = \dfrac{1}{3} BC.\,AH \Rightarrow GD = \dfrac{1}{3}\,AH$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra IK = GD hay khoảng cách từ I, G đến BC bằng nhau nên IG // BC

Bài tập về nhà:

1) Cho C là điểm thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^0$, Mlà điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền trong của $\widehat{xOy}$, gọi MA, MB thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB

2) Cho M là điểm nằm trong tam giác đều ABC. A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A , vuông góc với AB tại B cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều

b) AB' + BC' + CA' không phụ thuộc vị trí của M trong tam giác ABC

CHUYÊN ĐỀ 16 – BẤT ĐẲNG THỨC

Phần I : các kiến thức cần lưu ý

1-Đinhnghĩa: $\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$

2-tính chất

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$	+ A > B > 0 $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ $\forall n$
+ A>B và B >C $\Leftrightarrow$ A > C	+ A > B $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n lẻ
+ A>B $\Rightarrow$ A + C >B + C	+ $\|A\| > \|B\|$ $\Rightarrow$ $A^n > B^n$ với n chẵn
+ A>B và C > D $\Rightarrow$ A +C > B + D	+ m > n > 0 và A > 1 $\Rightarrow$ $A^m > A^n$
+ A>B và C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C	+ m > n > 0 và 0 <A < 1 $\Rightarrow$ $A^m < A^n$
+ A>B và C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C	+A < B và A.B > 0 $\Rightarrow$ $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$
+ 0 < A < B và 0 < C < D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D	

3 - một số hằng bất đẳng thức

+ $A^2 \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $A^n \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $-|A| < A = |A|$

+ $|A + B| \geq |A| + |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B > 0)

+ $|A - B| \leq |A| - |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B < 0)

Phần II : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dùng định nghĩa

Kiến thức : Để chứng minh A > B Ta chứng minh A – B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \geq 0$ với $\forall$ M

Ví dụ 1 $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$

Giải:

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0$ đúng với mọi $x;y;z \in R$

Vì $(x-y)^2 \geq 0$ với $\forall x ; y$ .Dấu bằng xảy ra khi x = y

$(x-z)^2 \geq 0$ với $\forall x ; z$. Dấu bằng xảy ra khi x = z

$(y-z)^2 \geq 0$ với $\forall z; y$. Dấu bằng xảy ra khi z = y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu:

$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \geq 0$ đúng với mọi $x;y;z \in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi $x;y;z \in R$

Dấu bằng xảy ra khi x + y = z

Ví dụ 2: chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

giải

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab) = \frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b

b)Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát: $\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh $A \geq B$ theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi $H = (C+D)^2$ hoặc $H=(C+D)^2+\ldots.+(E+F)^2$

Bước 3: Kết luận $A \geq B$

2) phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2+\frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$ c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Giải:

a) $a^2+\frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2-4a+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a-b)^2 \geq 0$ (Bđt này luôn đúng)

Vậy $a^2+\frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a = b)

b) $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \Leftrightarrow 2(a^2+b^2+1) > 2(ab+a+b)$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = 1

c) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geq 4a(b+c+d+e)$

$\Leftrightarrow (a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ac+4c^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2 \geq 0$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

Giải:

$(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4) \Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12} \geq a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0$

Ví dụ 4: cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} x.y.z = 1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} < x+y+z \end{cases}$

Chứng minh rằng : có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

Giải: Xét (x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1

$= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = x + y + z - (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) > 0$

(vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} <$ x+y+z theo gt) $\rightarrow$ 2 trong 3 số x-1 , y-1 , z-1 âm hoặc cả ba sỗ-1 , y-1, z-1 là dương.

Nếủ trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\rightarrow$x.y.z>1 Mâu thuẫn gt x.y.z =1 bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x ,y ,z là số lớn hơn 1

3) Phương pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc

A) một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2 + y^2 \ge 2xy$ b) $x^2 + y^2 \ge |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \ge 4xy$ d) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$

2)Bất đẳng thức Cô sy: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n}$ Với $a_i > 0$

3)Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_2{}^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + ... + {}_n^2) \ge (a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê-bư - sép:

Nếu $\begin{cases} a \le b \le c \\ A \le B \le C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \ge \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \le b \le c \\ A \ge B \ge C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \le \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B) các ví dụ

<u>ví dụ 1</u>

Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng (a+b) (b+c)(c+a) $\geq$ 8abc

<u>Giải</u>: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) $\geq$ 8abc

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

<u>ví dụ 2:</u> Cho a > b > c > 0 và $a^2+b^2+c^2=1$ chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Do a,b,c đối xứng , giả sử a $\geq$ b $\geq$ c $\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq b^2 \geq c^2 \\ \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{a+c} \geq \frac{c}{a+b} \end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>ví dụ 3:</u> Cho a,b,c,d > 0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$$

Ta có $a^2+b^2 \geq 2ab$; $c^2+d^2 \geq 2cd$

Do abcd =1 nên cd $=\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+cd) = 2(ab+\frac{1}{ab}) \geq 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)

$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right) \geq 2+2+2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a) \geq 10$

<u>ví dụ 4</u>: Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có $\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq\left(1.a+1.b+1.c\right)^2$

$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ac\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

4) Phương pháp 4: dùng tính chất của tỷ số

A. Kiến thức

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ b – Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2) Nếu b,d >0 thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

B. Các ví dụ:

<u>ví dụ 1</u>: Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng : $1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{a}{a+b+c}<1\Rightarrow\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có : $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ (đpcm)

<u>ví dụ 2</u> : Cho: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0

Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Giải: Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$ (đpcm)

ví dụ 3 : Cho a;b;c;d là các số nguyên dương thỏa mãn : a + b = c+d =1000

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$

giải : Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{a+b}{c+d} \le \frac{b}{d}$; $\frac{a}{c} \le 1$ vì a + b = c + d

a, Nếu: b ≤ 998 thì $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d} \le$ 999

b, Nếu: b = 998 thì a =1 $\Rightarrow \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{1}{c}+\frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d = 1; c = 999

Vậy: giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ = 999 + $\frac{1}{999}$ khi a = d = 1; c = b = 999

Ví dụ 4 : Với mọi số tự nhiên n >1 chứng minh rằng : $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{n+n}<\frac{3}{4}$

Ta có $\frac{1}{n+k}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$ với k = 1,2,3,…,n-1

Do đó: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

Ví dụ 5: CMR: A = $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+........+\frac{1}{n^2}$ với n $\ge$ 2 không là số tự nhiên

HD: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2.};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};.....$

Ví dụ 6: Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chứng minh rằng :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$$

Giải :

Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d}$ (2)

$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d}$ (3)

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \qquad \text{(đpcm)}$$

5. Phương pháp 5:Dùng bất đẳng thức trong tam giác

Lưu ý: Nếu a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác thì : a; b; c > 0

Và |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

Ví dụ1:

Cho a; b; clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

Giải

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có $\begin{cases}0<a<b+c\\0<b<a+c\\0<c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<a(b+c)\\b^2<b(a+c)\\c^2<c(a+b)\end{cases}$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta có a > | b-c | $\Rightarrow a^2 > a^2-(b-c)^2 > 0$

b > | a-c | $\Rightarrow b^2 > b^2-(c-a)^2 > 0$

c > | a-b | $\Rightarrow c^2 > c^2-(a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2b^2c^2 > \left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Ví dụ2: (đổi biến số)

Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ (1)

Đặt x= b + c ; y= c + a ;z = a + b ta có a = $\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\ge\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\ge 3$

$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 6$ là Bđt đúng?

Ví dụ 3: (đổi biến số)

Cho a, b, c > 0 và a + b + c <1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9$ (1)

Giải: Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ Với x + y + z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$x+y+z\geq 3.\sqrt[3]{xyz}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ $\Rightarrow$ $(x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$

6) phương pháp làm trội :

Chứng minh BĐT sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

Giải :

a) Ta có : $\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$ (đpcm)

b) Ta có : $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$

$<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2$ (đpcm)

Bài tập về nhà:

1) Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2+3\geq 2(x+y+z)$

HD: Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

2) Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

(HD: $\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c}$ và $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$)

3) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

HD: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} = c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2c$; $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$? ; $\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}$?

CHUYÊN ĐỀ 17 – VẼ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG ĐỂ TẠO THÀNH CÁC CẶP ĐOẠN THẲNG TỶ LỆ

A.Phương pháp:

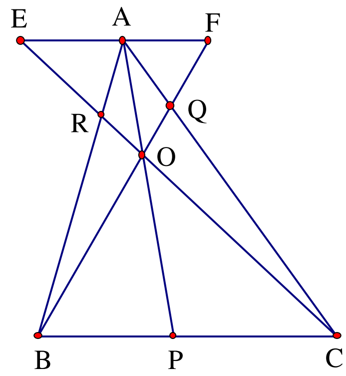
Trong các bài tập vận dụng định lí Talét. Nhiều khi ta cần vẽ thêm đường phlà một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước,. Đây là một cách vẽ đường phụ ïhay dùng, vì nhờ đó mà tạo thành được các cặp đoạn thẳng tỉ lệ

B. Các ví dụ:

1) Ví dụ 1:

Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy tương ứng các điểm P, Q, R sao cho ba đường thẳng AP, BQ, CR cắt nhau tại một điểm.

Chứng minh: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=1$ (Định lí Cê – va)



Giải

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng CR, BQ tại E, F. Gọi O là giao điểm của AP, BQ, CR

$\Delta ARE \backsim \Delta BRC \Rightarrow \frac{AR}{RB}=\frac{AE}{BC}$ (a)

$\Delta BOP \backsim \Delta FOA \Rightarrow \frac{BP}{FA}=\frac{OP}{OA}$ (1)

$\Delta POC \backsim \Delta AOE \Rightarrow \frac{PC}{AE}=\frac{PO}{AO}=$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{BP}{FA}=\frac{PC}{AE}\Rightarrow\frac{BP}{PC}=\frac{FA}{AE}$ (b)

$\Delta AQF \backsim \Delta CQB \Rightarrow \frac{CQ}{AQ}=\frac{BC}{FA}$ (c)

Nhân (a), (b), (c) vế theo vế ta có: $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=\frac{AE}{BC}.\frac{FA}{AE}.\frac{BC}{FA}=1$

* Đảo lại: Nếu $\frac{AR}{RB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=1$ thì bai đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy

2) Ví dụ 2:

Một đường thăng bất kỳ cắt các cạnh(phần kéo dài của các cạnh) của tam giác ABC tại P, Q, R.

Chứng minh rằng: $\frac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP}=1$(Định lí Mê-nê-la-uýt)

Giải:

Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt PR tại E. Ta có

$\Delta RAE \backsim \Delta RBP \Rightarrow \frac{RB}{RA}=\frac{BP}{AE}$ (a)

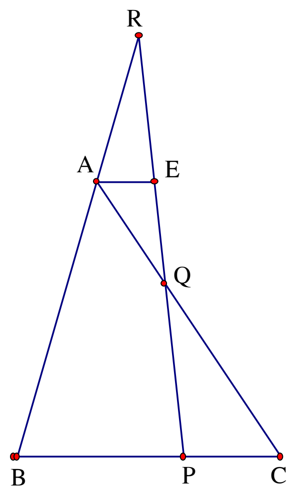
$\Delta AQE \backsim \Delta CQP \Rightarrow \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{AE}{CP}$ (b)

Nhân vế theo vế các đẳng thức (a) và (b) ta có

$\dfrac{RB}{RA}.\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{BP}{AE}.\dfrac{AE}{CP}$ (1)

Nhân hai vế đẳng thức (1) với $\dfrac{PC}{BP}$ ta có:

$\dfrac{RB}{RA}.\dfrac{PC}{BP}.\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{BP}{AE}.\dfrac{AE}{CP}.\dfrac{PC}{BP} = 1$

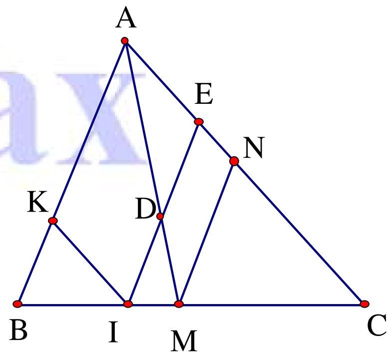


Đảo lại: Nếu $\dfrac{RB.QA.PC}{RA.CQ.BP} = 1$ thì ba điểm P, Q, R thẳng hàng

3) Ví dụ 3:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường thẳng qua I song song với AC cắt AB ở K; đường thẳng qua I song song với AB cắt AC, AM theo thứ tự ở D, E. Chứng minh DE = BK

Giải



Qua M kẻ MN // IE ($N \in AC$).Ta có:

$\dfrac{DE}{MN} = \dfrac{AE}{AN} \Rightarrow \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{MN}{AN}$ (1)

MN // IE, mà MB = MC $\Rightarrow$ AN = CN (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{DE}{AE} = \dfrac{MN}{CN}$ (3)

Ta lại có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CN}{AC} \Rightarrow \dfrac{MN}{CN} = \dfrac{AB}{AC}$ (4)

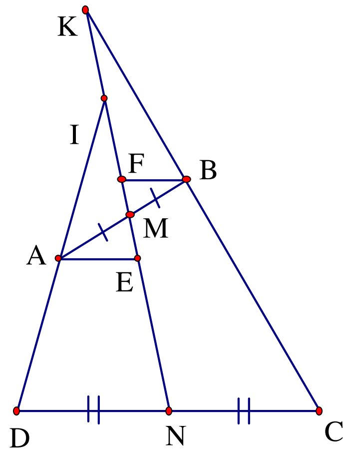
Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{DE}{AE} = \dfrac{AB}{AC}$ (a)

Tương tự ta có: $\dfrac{BK}{KI} = \dfrac{AB}{AC}$ (6)

Vì KI // AC, IE // AC nên tứ giác AKIE là hình bình hành nên KI = AE (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\frac{BK}{KI}=\frac{BK}{AE}=\frac{AB}{AC}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $\frac{DE}{AE}=\frac{BK}{AE}\Rightarrow DE=BK$



4) Ví dụ 4:

Đường thẳng qua trung điểm của cạnh đối AB, CD của tứ giác ABCD cắt các đường thẳng AD, BC theo thứ tự ở I, K. Chứng minh: IA . KC = ID. KB

Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD

Ta có AM = BM; DN = CN

Vẽ AE, BF lần lượt song song với CD

$\Delta AME=\Delta BMF$ (g.c.g) $\Rightarrow$ AE = BF

Theo định lí Talét ta có: $\frac{IA}{ID}=\frac{AE}{DN}=\frac{BF}{CN}$ (1)

Củng theo định lí Talét ta có: $\frac{KB}{KC}=\frac{BF}{CN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IA}{ID}=\frac{KB}{KC}\Rightarrow IA.KC=ID.KB$

5) Ví dụ 5:

Cho $\widehat{xOy}$, các điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho

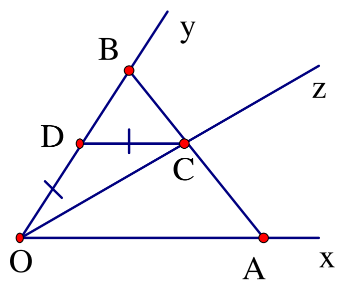
$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{k}$ (k là hằng số). Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Vẽ tia phân giác Oz của $\widehat{xOy}$ cắt AB ở C. vẽ CD // OA

(D $\in$ OB) $\Rightarrow\widehat{DOC}=\widehat{DCO}=\widehat{AOC}$

$\Rightarrow\Delta COD$ cân tại D $\Rightarrow$ DO = DC



Theo định lí Talét ta có $\frac{CD}{OA}=\frac{BD}{OB}\Rightarrow\frac{CD}{OA}=\frac{OB-CD}{OB}$

$\Rightarrow \dfrac{CD}{OA}+\dfrac{CD}{OB}=1 \Rightarrow \dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}=\dfrac{1}{CD}$ (1)

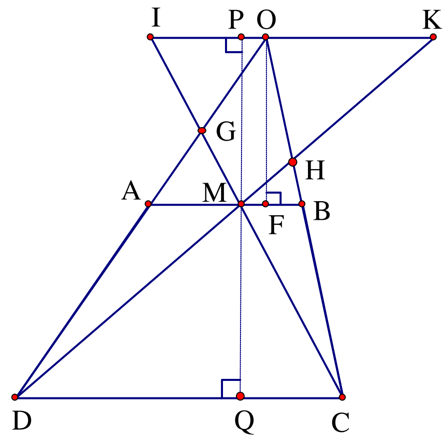
Theo giả thiết thì $\dfrac{1}{OA}+\dfrac{1}{OB}=\dfrac{1}{k}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra CD = k , không đổi

Vậy AB luôn đi qua một điểm cố định là C sao cho CD = k và CD // Ox , D $\in$ OB

6) Ví dụ 6:

Cho điểm M di động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD, Gọi O là giao điểm của hai cạnh bên DA, CB. Gọi G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng: Khi M di động trên AB thì tổng $\dfrac{OG}{GD}+\dfrac{OH}{HC}$ không đổi



Giải

Qua O kẻ đường thẳng song với AB cắt CM, DM theo thứ tự ở I và K. Theo định lí Talét ta có:

$\dfrac{OG}{GD}=\dfrac{OI}{CD}$; $\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{OK}{CD} \Rightarrow \dfrac{OG}{GD}+\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{OI}{CD}+\dfrac{OK}{CD}=\dfrac{IK}{CD}$

$\Rightarrow \dfrac{OG}{GD}+\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{IK}{CD}$ (1)

Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt IK, CD theo thứ tự ở P và Q, ta có:

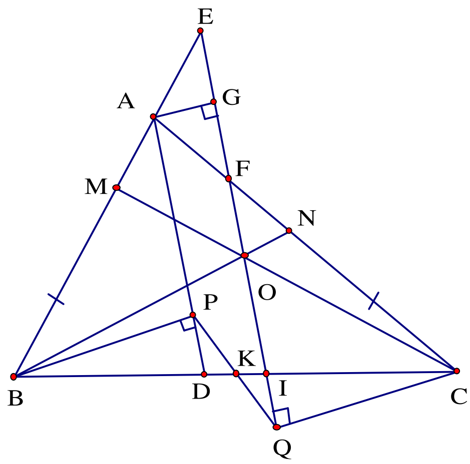
$\dfrac{IK}{CD}=\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{FO}{MQ}$ không đổi vì FO là khoảng cách từ O đến AB, MQ là đường cao của hình thang nên không đổi (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{OG}{GD}+\dfrac{OH}{HC}=\dfrac{FO}{MQ}$ không đổi

7) Ví dụ 7:

Cho tam giác ABC (AB < AC), phân giác AD. Trên AB lấy điểm M, trên AC lấy điểm N sao cho BM = CN, gọi giao điểm của CM và BN là O, Từ O vẽ đường thẳng song song với AD cắt AC, AB tại E và F.

Chứng minh rằng: AB = CF; BE = CA



Giải.

AD là phân giác nên $\widehat{BAD} = \widehat{DAF}$

EI // AD $\Rightarrow$ $\widehat{BAD} = \widehat{AEF}$ (góc đồng vị)

Mà $\widehat{DAF} = \widehat{OFC}$ (đồng vị); $\widehat{AFE} = \widehat{OFC}$ (đối đỉnh)

Suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ $\Rightarrow$ ΔAFE cân tại A $\Rightarrow$ AE =AF (a)

Aùp dụng định lí Talét vào ΔACD , với I là giao điểm

của EF với BC ta có $\frac{CF}{CA} = \frac{CI}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{CI} = \frac{CA}{CD}$ (1)

AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CF}{CI} = \frac{BA}{BD}$ (3)

Kẻ đường cao AG của ΔAFE . BP // AG (P $\in$ AD); CQ // AG (Q$\in$ OI)

thì $\widehat{BPD} = \widehat{CQI} = 90^0$

Gọi trung điểm của BC là K, ta có ΔBPK = ΔCQK (g.c.g) $\Rightarrow$ CQ = BP

$\Rightarrow$ ΔBPD = ΔCQI (g.c.g) $\Rightarrow$ CI = BD (4)

Thay (4) vào (3) ta có $\frac{CF}{BD} = \frac{BA}{BD}$ $\Rightarrow$ CF = BA (b)

Từ (a) và (b) suy ra BE = CA

Bài tập về nhà

1) Cho tam giác ABC. Điểm D chia trong BC theo tỉ số 1 : 2, điểm O chia trong AD theo tỉ số 3 : 2. gọi K là giao điểm của BO và AC. Chứng minh rằng $\frac{KA}{KC}$ không đổi

2) Cho tam giác ABC (AB > AC). Lấy các điểm D, E tuỳ ý thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi giao điểm của DE, BC là K, chứng minh rằng :

Tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không đổi khi D, E thay đổi trên AB, AC

(HD: Vẽ DG // EC (G $\in$ BC).

CHUYÊN ĐỀ 18 – BỔ ĐỀ HÌNH THANG VÀ CHÙM ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

A. Kiến thức

1) Bổ đề hình thang:

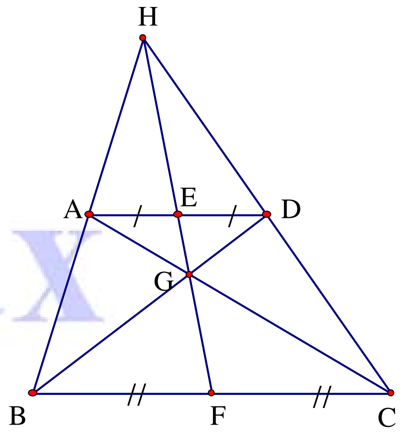
"Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau, đường thẳng đi qua giao điểm của các đường chéo và đi qua giao điểm của các đường thẳng chứa hai cạnh bên thì đi qua trung điểm của hai đáy"

Chứng minh:

Gọi giao điểm của AB, CD là H, của AC, BD là G, trung điểm của AD, BC là E và F

Nối EG, FG, ta có: $\Delta ADG \backsim \Delta CBG$ (g.g) , nên :

$\frac{AD}{CB} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{2AE}{2CF} = \frac{AG}{CG} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AG}{CG}$ (1)



Ta lại có : $\widehat{EAG} = \widehat{FCG}$ (SL trong) (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\Delta AEG \backsim \Delta CFG$ (c.g.c)

Do đó: $\widehat{AGE} = \widehat{CGF} \Rightarrow$ E , G , H thẳng hàng (3)

Tương tự, ta có: $\Delta AEH \backsim \Delta BFH \Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{BHF}$

$\Rightarrow$ H , E , F thẳng hàng (4)

Tõừ (3) và (4) suy ra : H , E , G , F thẳng hàng