$= (x - S)(x^2 + Sx - 2S^2 + 6P)$

$= (x - a - b)[x^2 + (a + b)x - 2(a + b)^2 + 6ab]$

$= (x - a - b)[x^2 + (a + b)x - 2(a^2$

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^3 + 4x^2 - 29x + 24$ ;
b) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ ;
c) $(x^2 - x + 2)^2 + (x - 2)^2$ ;
d) $6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$ ;
e) $x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.
f) $x^8 + x^4 + 1$;

g) $x^{10} + x^5 + 1$ ;

h) $x^{12} + 1$ ;

i) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ ;

k) $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$.

# *4. Chuyên đề*: Xác định đa thức

* Định lí Beout (BêZu) và ứng dụng:

1) Định lí BêZu:

Dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x - a bằng f(a) (giá trị của f(x) tại x = a): $f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$

(Beout, 1730 - 1783, nhà toán học Pháp)

Hệ quả: Nếu a là nghiệm của đa thừc f(x) thì f(x) chia hết cho x - a.

áp dụng: Định lí BêZu có thể dùng để phân tích một đa thức thành nhân tử. Thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn một giá trị x = a nào đó và thử xem x = a có phải là nghiệm của f(x) không.

Bước 2: Nếu f(a) = 0, theo định lí BêZu ta có: $f(x) = (x-a)p(x)$

Để tìm p(x) thực hiện phép chia f(x) cho x - a.

Bước 3: Tiếp tục phân tích p(x) thành nhân tử nếu còn phân tích được. Sau đó viết kết quả cuối cùng cho hợp lí.

Dạng 1: Tìm đa thức thương bằng phương pháp đồng nhất hệ số(phương pháp hệ số bất định), phương pháp giá trị riêng , thực hiện phép chia đa thức.

*Phương pháp1: Ta dựa vào mệnh đề sau đây :

Nếu hai đa thức P(x) và Q(x) bằng nhau: P(x) = Q(x) thì các hạng tử cùng bậc ở hai đa thức phải có hệ số phải có hệ số bằng nhau.

Ví dụ: $P(x) = ax^2 + 2bx - 3$; $Q(x) = x^2 - 4x - p$

Nếu P(x) = Q(x) thì ta có:

a = 1(hệ số của lũy thừa 2)

2b = - 4 (hệ số của lũy thừa bậc 1)

- 3 = - p (hệ số hạng tử bậc không hay hạng tử tự do)

*Phương pháp2: Cho hai đa thức P(x) và Q(x) thỏa mãn deg P(x) > deg Q(x)

Gọi thương và dư trong phép chia P(x) cho Q(x) lần lượt là M(x) và N(x)

Khi đó ta có: $P(x) = Q(x).M(x) + N(x)$ (Trong đó: deg N(x) < deg Q(x)) (I)

Vì đẳng thức (I) đúng với mọi x nên ta cho x lấy một giá trị bất kì : $x = \alpha$

($\alpha$ là hằng số). Sau đó ta đi giải phương trình hoặc hệ phương trình để tìm các hệ số của các hạng tử trong các đa thức ( Đa thức thương, đa thức chia, đa thức bị chia, số dư).

Ví dụ: Bài 1(Phần bài tập áp dụng)

Gọi thương của phép chia A(x) cho x + 1 là Q(x), ta có:

$a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a = (x+1).Q(x)$.

Vì đẳng thức đúng với mọi x nên cho x = -1 ta được:

$$-a^2 + 3a + 6 - 2a = 0 \Rightarrow -a^2 + a + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 3 \end{array}\right.$$

Với a = -2 thì $A = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4, Q(x) = 4x^2 - 10x + 4$

Với a = 3 thì $A = 9x^3 + 9x^2 - 6x - 6, Q(x) = 9x^2 - 6$

***Phương pháp 3:Thực hiện phép chia đa thức (như SGK)**

**Bài tập áp dụng**

***Bài 1:*** Cho đa thức $A(x)=a^2x^3+3ax^2-6x-2a(a\in Q)$. Xác định a sao cho A(x) chia hết cho x + 1.

***Bài 2:*** Phân tích đa thức $P(x)=x^4-x^3-2x-4$ thành nhân tử, biết rằng một nhân tử có dạng: $x^2+dx+2$

***Bài 3:*** Với giá trị nào của a và b thì đa thức : $x^3+ax^2+2x+b$ chia hết cho đa thức: $x^2+x+1$. Hãy giải bài toán trên bằng nhiều cách khác nhau.

***Bài 4:*** Xác định giá trị k để đa thức: $f(x)=x^4-9x^3+21x^2+x+k$ chia hết cho đa thức: $g(x)=x^2-x-2$.

***Bài 5:*** Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức: $f(k)=k^3+2k^2+15$ chia hết cho nhị thức: $g(k)=k+3$.

***Bài 6:*** Với giá trị nào của a và b thì đa thức: $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ chia hết cho đa thức: $g(x)=x^2-3x+4$.

***Bài 7:*** a) Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức: $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$

Chia hết cho $(x-3)^3$.

b) Xác định các giá trị của a, b để đa thức: $Q(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia hết cho đa thức $M(x)=x^2-x+b$.

c) Xác định a, b để $P(x)=x^3+5x^2-8x+a$ chia hết cho $M(x)=x^2+x+b$.

***Bài 8:*** Hãy xác định các số a, b, c để có đẳng thức:

$$x^3-ax^2+bx-c=(x-a)(x-b)(x-c)$$

*(Để học tốt Đại số 8)*

***Bài 9:*** Xác định hằng số a sao cho:

a) $10x^2-7x+a$ chia hết cho $2x-3$.

b) $2x^2+ax+1$ chia cho $x-3$ dư 4.

c) $ax^5+5x^4-9$ chia hết cho $x-1$.

***Bài 10:*** Xác định các hằng số a và b sao cho:

a) $x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

b) $ax^3 + bx^2 + 5x - 50$ chia hết cho $x^2 + 3x + 10$.

c) $ax^4 + bx^2 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

d) $x^4 + 4$ chia hết cho $x^2 + ax + b$.

***Bài 11:*** Tìm các hăng số a và b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ thì dư 7, chia cho $x-3$ thì dư -5.

***Bài 12:*** Tìm các hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho $x+2$, chia cho $x^2 - 1$ thì dư $x+5$.

***(Một số vấn đề phát triển Đại số 8)***

***Bài 13:*** Cho đa thức: $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$ và $Q(x) = x^2 + x - 2$. Xác định a, b để P(x) chia hết cho Q(x).

***Bài 14:*** Xác định a và b sao cho đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ chia hết cho đa thức $Q(x) = (x-1)^2$

***Bài 15:*** Cho các đa thức $P(x) = x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ và $Q(x) = x^2 - x + b$. Xác định a và b để P(x) chia hết cho Q(x).

***(23 chuyên đề toán sơ cấp)***

***Dạng 2:*** **Phương pháp nội suy NiuTơn**

***Phương pháp:***

***Để tìm đa thức P(x) bậc không quá n khi biết giá trị của đa thức tại n + 1 điểm*** $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n+1}$ ***ta có thể biểu diễn P(x) dưới dạng:***

$$P(x) = b_0 + b_1(x - C_1) + b_2(x - C_1)(x - C_2) + \cdots + b_n(x - C_1)(x - C_2)\cdots(x - C_n)$$

***Bằng cách thay thế x lần lượt bằng các giá trị*** $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n+1}$ ***vào biểu thức P(x) ta lần lượt tính được các hệ số*** $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$.

Bài tập áp dụng

***Bài 1:*** Tìm đa thức bậc hai P(x), biết: $P(0) = 25, P(1) = 7, P(2) = -9$.

**Giải**

*Đặt* $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1)$ ***(1)***

*Thay x lần lượy bằng 0; 1; 2 vào* ***(1)*** *ta được:* $\begin{cases} b_0 = 25 \\ 7 = 25 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = -18 \\ -9 = 25 - 18.2 + b_2.2.1 \Leftrightarrow b_2 = 1 \end{cases}$

*Vậy, đa thức cần tìm có dạng:*

$P(x) = 25 - 18x + x(x-1) \Leftrightarrow P(x) = x^2 - 19x + 25$.

***<u>Bài 2:</u>*** Tìm đa thức bậc 3 P(x), biết: $P(0) = 10, P(1) = 12, P(2) = 4, P(3) = 1$

**Hướng dẫn:** *Đặt* $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + b_3 x(x-1)(x-2)$ ***(1)***

***<u>Bài 3:</u>*** Tìm đa thức bậc ba P(x), biết khi chia P(x) cho $(x-1), (x-2), (x-3)$ đều được dư bằng 6 và P(-1) = - 18.

**Hướng dẫn:** *Đặt* $P(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) + b_3(x-1)(x-2)(x-3)$ ***(1)***

***<u>Bài 4:</u>*** Cho đa thức bậc bốn P(x), thỏa mãn: $\begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), (1) \end{cases}$

a) Xác định P(x).

b) Suy ra giá trị của tổng $S = 1.2.3 + 2.3.5 + \ldots + n(n+1)(2n+1), (n \in N^*)$.

**Hướng dẫn:** Thay x lần lượt bằng 0; 1; 2; 3 vào (1), ta được :

$$\begin{aligned} &P(-1) - P(-2) = 0 \Leftrightarrow P(-2) = 0, \\ &P(0) - P(-1) = 0 \Leftrightarrow P(0) = 0 \\ &P(1) - P(0) = 1.2.3 \Leftrightarrow P(1) = 6 \\ &P(2) - P(1) = 2.3.5 \Leftrightarrow P(2) = 36 \end{aligned}$$

*Đặt* $P(x) = b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)x + b_3(x+1)x(x-1) + b_4(x+1)x(x-1)(x-2)$ *(2)*

Thay x lần lượt bằng -1; 0; 1; 2; -2 vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} &0 = b_0 \\ &0 = b_1 \Leftrightarrow b_1 = 0, \\ &6 = b_2.2.1 \Leftrightarrow b_2 = 3, \\ &36 = 3.3.2 + b_3.3.2.1 \Leftrightarrow b_3 = 3 \\ &0 = 3.(-1)(-2) + 3.(-1)(-2)(-3) + b_4(-1)(-2)(-3)(-4) \Leftrightarrow b_4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$P(x) = 3(x+1)x + 3(x+1)x(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)x(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$$

*(Tuyển chọn bài thi HSG Toán THCS)*

***Bài 5:*** cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c, (a,b,c \neq 0)$. Cho biết $2a + 3b + 6c = 0$

1) Tính a, b, c theo $P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)$.

2) Chứng minh rằng: $P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)$ không thể cùng âm hoặc cùng dương.

***Bài 6:*** Tìm một đa thức bậc hai, cho biết: $\begin{array}{l} P(0) = 19 \\ P(1) = 85 \\ P(2) = 1985 \end{array}$

## 5. Chuyên đề: Biến đổi phân thức hữu tỉ

***Ví dụ 1.***

a) Chứng minh rằng phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản $\forall n \in N$;

b) Cho phân số $A = \frac{n^2+4}{n+5}$ $(n \in N)$. Có bao nhiêu số tự nhiên n nhỏ hơn 2009 sao cho phân số A chưa tối giản. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Lời giải

a) Đặt d = ƯCLN(5n + 2 ; 3n + 1) $\Rightarrow$ 3(5n + 2) — 5(3n + 1) $\vdots$ d hay 1 $\vdots$ d $\Rightarrow$ d = 1.

Vậy phân số $\frac{3n+1}{5n+2}$ là phân số tối giản.

b) Ta có $A = n - 5 + \frac{29}{n+5}$. Để A chưa tối giản thì phân số $\frac{29}{n+5}$ phải chưa tối giản. Suy ra n + 5 phải chia hết cho một trong các ước dương lớn hơn 1 của 29.

Vì 29 là số nguyên tố nên ta có n + 5 $\vdots$ 29

$\Rightarrow$ n + 5 =29k (k $\in$ N) hay n=29k — 5.

Theo điều kiện đề bài thì $0 \le n = 29k - 5 < 2009$

$\Rightarrow 1 \le k \le 69$ hay $k \in \{1; 2; \ldots; 69\}$

Vậy có 69 số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện đề bài.

Tổng của các số này là : 29(1 + 2 + … + 69) — 5.69 = 69690.

***<u>Ví dụ 2</u>***. Cho a, b, c $\neq 0$ và a + b + c $\neq 0$ thỏa mãn điều kiện
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$.

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có hai số đối nhau. Từ đó suy ra rằng :

$$\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}.$$

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow (a+b).\frac{c(a+b+c)+ab}{abc(a+b+c)}=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Từ đó suy ra : $\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{b^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}+\frac{1}{(-c)^{2009}}+\frac{1}{c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$

$$\frac{1}{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}+(-c)^{2009}+c^{2009}}=\frac{1}{a^{2009}}$$