b. $OT=\frac{\sqrt{2}}{2}OC$ và $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OT})=\frac{\pi}{4}$.Vậy T là ảnh của C trong phép đồng dạng tâm O tỉ số $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, góc quay $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Điểm C chạy trên đường thẳng Δ nên điểm T chạy trên đường thẳng Δ' là ảnh của Δ trong phép đồng dạng trên.

Với điểm *T'* ta dùng phép đồng dạng tâm O tỉ số $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$, góc quay $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ta tìm được tập hợp các điểm *T'* là đường thẳng Δ'' ảnh của Δ trong phép đồng dạng $\left(O,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

LOẠI 3: Tìm quỹ tích:

Câu 1.TRƯỜNG THPT: LÊ QUÝ ĐÔN

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a, hai tia Bx, Cy vuông góc với (P) và ở cùng một phía đối với (P). Hai điểm M, N lần lượt chuyển động trên Bx và Cy.

1/ Gọi I là trung điểm của AC, J là hình chiếu của B trên mặt phẳng (MAC).

Góc giữa MI và (P) bằng α. Tính độ dài đoạn BJ theo a và α

2/ Gọi (Q) là mặt phẳng qua B và vuông góc với MI. Chứng minh rằng (Q) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

3/ Gọi O là trung điểm BC, $BM+CN = 2k$ không đổi, kẻ OH vuông góc với MN tại H. Chứng minh rằng H chạy trên một đường tròn cố định.

Câu 2.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN CẤP TỈNH VÒNG 2

Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh AB. Gọi N là điểm chuyển động trên cạnh AC.

a) Giả sử $BM=CN$.Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$ không đổi.Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định

Hướng dẫn giải

a) Nếu tam giác ABC cân thì trung trực MN đi qua điểm A cố địnhXét tam giác ABC không cân tại A

Gọi E là điểm chính giữa cung BACcủa đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.E là điểm cố địnhvì $EB=EC; BM=CN$;góc EBM =góc ECNnên $\Delta EBM=\Delta ECN$

Suy ra: $EM=EN$ hay đường trung trực của MN luôn đi qua điểm E cố định

b) Kẻ đường phân giác trong của BAC cắt MN tại FGọi β là số đo góc BACTa có: diện tích ΔAMN=diện tích ΔAMF +diện tích ΔANF Suy ra:

$$\frac{1}{2}AM.AN.\sin\beta=\frac{1}{2}AM.AF.\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}AF.AN.\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow AF=\frac{\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\left(\frac{AM.AN}{AM+AN}\right)$$

$\Rightarrow$ AF không đổi hay F là điểm cố định

Vậy MN luôn đi qua một điểm cố đinh.

Câu 3.SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN (VÒNG 1)

a.Cho tam giác ABC vuông cân tại B, cạnh $AB=2$.Trong mặt phẳng chứa tam giác lấy M thỏa $MA^2+MB^2=MC^2$.Tìm quĩ tích điểm M

b.Cho tam giác ABC có hai trung tuyến BM và CN hợp với nhau một góc 60^0, $BM=6$,$CN=9$. Tính độ dài trung tuyến còn lại của tam giác.

Hướng dẫn giải

• Chọn hệ trục tọa độ Bxy vuông góc sao cho tia Bx qua A và tia By qua C. Ta có: $B(0;0)$, $A(2;0)$, $C(0;2)$. Giả sử $M(x;y)$.

a. • Chọn hệ trục tọa độ Bxy vuông góc sao cho tia Bx qua A và tia By qua C. Ta có: $B(0;0)$, $A(2;0)$, $C(0;2)$. Giả sử $M(x;y)$.

• $MA^2+MB^2=MC^2$

$\Leftrightarrow (2-x)^2+y^2+x^2+y^2=x^2+(2-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+4y=0$. • Phương trình trên là phương trình của một đường tròn tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$. • Vậy quỹ tích điểm M là một đường tròn tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

b. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

• Xét trường hợp: $\widehat{BGC}=120^0$

Ta có: $BC^2=GB^2+GC^2-2GB.GC.\cos 120^0=76$

$$MC^2=GM^2+GC^2-2GM.GC.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4}=28$$

Vậy $AC^2=112$ $NB^2=GB^2+GN^2-2GB.GN.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4}=13$ Vậy $AB^2=52$ Vậy độ dài trung tuyến còn lại:

$m_a^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=63 \Rightarrow m_a=3\sqrt{7}$ Xét trường hợp: $\widehat{BGC}=60^0$

Ta có: $BC^2=GB^2+GC^2-2GB.GC.\cos 60^0=28$

$$MC^2=GM^2+GC^2-2GM.GC.\cos 120^0 \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4}=52$$

Vậy $AC^2=208$ $NB^2=GB^2+GN^2-2GB.GN.\cos 120^0 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{4}=37$ Vậy $AB^2=148$

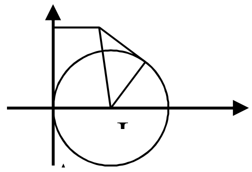
Vậy độ dài trung tuyến còn lại:

$m_a^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=171 \Rightarrow m_a=\sqrt{171}$

Câu 4.KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
LONG AN VÒNG 2-NĂM 2013

Trong mặt phẳng cho đường tròn (C) tâm I bán kính R và điểm A cố định thuộc đường tròn (C). Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A. Tìm quỹ tích điểm M biết rằng khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ bằng độ dài tiếp tuyến MT của đường tròn (C) với T là tiếp điểm.

Hướng dẫn giải



Chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ.
$O \equiv A(0;0),\ I \in Ox \Rightarrow I(R;0)$
Khi đó ta có $\Delta \equiv Oy$ Gọi M(x; y)
$\Rightarrow MT = d(M,\Delta) = d(M,Oy) = |x|$
$\overrightarrow{IM} = (x-R;y) \Rightarrow IM = \sqrt{(x-R)^2 + y^2}$ Tam giác MTI vuông tại T
$\Rightarrow IM^2 = MT^2 + IT^2$
$\Leftrightarrow (x-R)^2 + y^2 = x^2 + R^2$
$\Leftrightarrow y^2 = 2Rx$

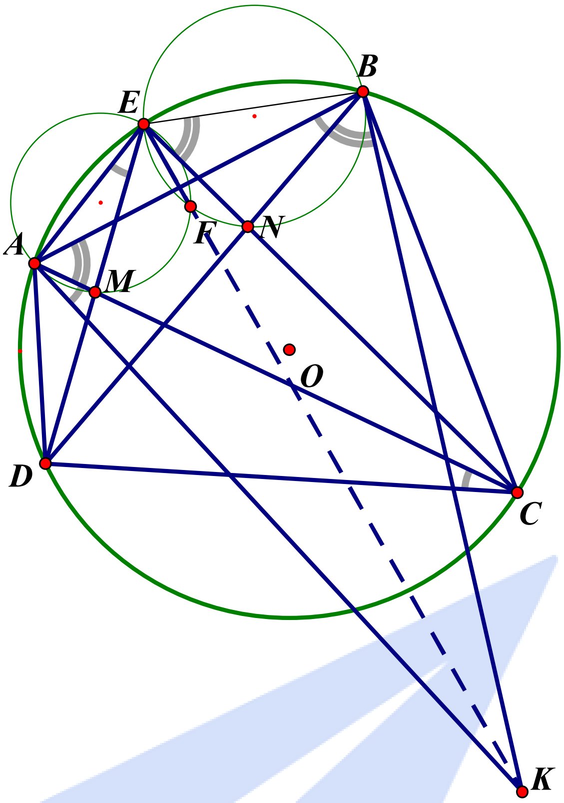
Thử lại: Gọi $M\left(\dfrac{y^2}{2R};y\right) \in (P): y^2 = 2Rx$

$IM^2 = \left(\dfrac{y^2}{2R} - R\right)^2 + y^2 = \dfrac{y^4}{4R^2} + R^2 \Rightarrow d^2(M,\Delta) = \dfrac{y^4}{4R^2} = MI^2 - R^2 = MT^2$ Vậy quỹ tích điểm M là một parabol $(P): y^2 = 2Rx$

Câu 5.KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 LONG AN VÒNG 2 NĂM 2015

Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo không vuông góc với nhau, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm di chuyển trên cung AB không chứa C,D. Gọi M là giao điểm của ED với AC, N là giao điểm của EC với BD. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và BEN cắt nhau tại giao điểm thứ hai F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn giải



Gọi Ax, By lần lượt là tiếp tuyến của $(AEM),(BEN)$ tại A, B. Khi đó:

$\widehat{xAC}=\widehat{AED}=\widehat{ACD}=const$. Do đó Ax cố định Tương tự By cố định.

Gọi $K = Ax \cap By$, suy ra K cố định. Ta có: $\widehat{CAK}=\widehat{AED}=\widehat{ABD}$

$\widehat{BAC}=\widehat{BEC}=\widehat{DBK}$ $\widehat{BAK}=\widehat{BAC}+\widehat{CAK};\widehat{ABK}=\widehat{ABD}+\widehat{DBK}$ Khi đó tam giác ABK cân tại K nên $\mathrm{P}_{K|(AEM)}=KA^2=KB^2=\mathrm{P}_{K|(BEN)}$ hay K thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (AEM) và (BEN).

Vậy EF đi qua điểm K cố định.

Câu 6.LONG AN VÒNG 2 - NĂM 2012

Cho đường tròn $(O;R)$ có tâm là O và đường kính là AB, E là điểm cố định nằm giữa A và O. Gọi D là đường thẳng qua E và cắt (O) tại C và D.

a) Tìm điểm M trên (O) sao cho $MC^2 + MD^2 = AB^2$.

b) Gọi F đối xứng E qua O và giả sử D thay đổi nhưng luôn qua E. Chứng minh: $CD^2 + DF^2 + FC^2$ luôn nhận giá trị không đổi.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $MC^2 + MD^2 = AB^2$

Û $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = 4R^2$

Û $4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 4R^2$ Û $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI} = 0$ (I là trung điểm CD)

Th1: O≡I. Khi đó mọi M nằm trên $(O;R)$ là điểm M cần tìm. Th2: O≠I.Khi đó $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OI} = 0$ Û $MO \wedge OI$

Vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng d với (O,R)

với d là đường thẳng qua O và vuông góc OI. b) $CD^2 + DF^2 + FC^2$

$= CE^2 + DE^2 + 2EC.ED + DF^2 + FC^2$

Xét DCEF ta có:

$CE^2 + CF^2 = 2R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ Tương tự xét

DDEF : $DE^2 + DF^2 = 2R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ Mặt khác: $EC.ED = R^2 - EO^2$ Thay thế các đẳng thức vào ta được : $CD^2 + DF^2 + FC^2$

$= 6R^2 + \dfrac{EF^2}{2}$ không đổi